

## A braquistócrona, o tracker e a impressão 3D

C.C. Vieira<sup>1\*</sup>, D. L. Barreto<sup>2</sup>, G. Gevu<sup>1</sup>, L. Mota<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro; <sup>2</sup>Colégio Estadual Coronel Francisco Ribeiro da Motta Vasconcellos

\* [lm116113432@pq.uenf.br](mailto:lm116113432@pq.uenf.br)

### Resumo

Este trabalho teve como objetivo investigar a dinâmica de esferas metálicas rolando sobre curvas impressas em 3D, a saber, plano inclinado, hipérbole e cicloide. O lançamento das esferas foi feito simultaneamente, a partir do repouso e da mesma altura. Ao rolarem pelas curvas impressas, a ordem de chegada das esferas às bases das curvas apresentaram um comportamento que normalmente fere o senso comum dos discentes dos níveis Fundamental e Médio, i.e., a esfera sobre a cicloide chegou à base da curva em menor tempo, seguida pela hipérbole e por último a reta. A análise dessa dinâmica foi conseguida com o auxílio do *software* livre *tracker*. Justamente por esse aspecto contra intuitivo, é possível trabalhar alguns elementos mais simples do cálculo variacional, geometria Euclidiana, conceitos de mecânica e até mesmo óptica em sala de aula. Assim, aliar tecnologia e experimentação pode ajudar no despertar de jovens pela Ciência.

**Palavras-chave:** Ensino, Matemática, Física, Mínima ação, TIC

### 1. Introdução

A braquistócrona é um termo utilizado na matemática e na física para descrever uma curva que representa o caminho mais rápido entre dois pontos em um campo gravitacional. O termo "braquistócrona" tem origem grega e significa "mais rápida" (brachys) "tempo" (chronos). A ideia por trás da braquistócrona é encontrar a trajetória que minimiza o tempo gasto por uma partícula para se mover de um ponto A para um ponto B, assumindo que a única força que atua sobre ela é a gravidade. Isso significa que a partícula não sofre resistência do ar ou de outras forças, o que simplifica o problema. A solução para a braquistócrona é uma curva que segue uma forma específica, conhecida como cicloide, que é a curva gerada pelo movimento de um ponto em uma circunferência que rola ao longo de uma linha reta. Essa curva é fascinante porque, de acordo com o princípio de Fermat, a luz também segue o caminho mais rápido entre dois pontos, e a braquistócrona é a trajetória que a luz tomaria na ausência de obstáculos. A braquistócrona tem aplicações importantes em áreas como engenharia, óptica e mecânica, onde o tempo é um fator crítico. Além disso, o estudo da braquistócrona também contribui para uma compreensão mais profunda dos princípios fundamentais da física e da matemática<sup>[1-4]</sup>.

O desenvolvimento de estratégias que tornem o ensino de Ciência envolvente e acessível é um desafio constante na pesquisa educacional. Uma abordagem eficaz busca proporcionar aos estudantes uma aprendizagem significativa, levando em consideração seus conhecimentos prévios. Para alcançar esse objetivo, é essencial utilizar recursos didáticos que tornem o processo de ensino-aprendizagem cativante. Nesse contexto, as Tecnologias de Informação e

Comunicação (TICs) desempenham um papel fundamental, uma vez que estão profundamente integradas ao cotidiano das pessoas. No presente trabalho, foi conduzido um experimento no campo da educação em Ciências, utilizando o *software tracker*. Este estudo se concentrou na resolução da "braquistócrona", um problema clássico da física que envolve encontrar a trajetória mais rápida entre dois pontos, considerando apenas a ação da força gravitacional.

## 2. Materiais e Métodos

### 2.1. Materiais

A fim de realizar o experimento, foram utilizados uma peça impressa em 3D contendo três curvas (plano inclinado, cicloide, hipérbole), três esferas metálicas e um *smartphone* (modelo Poco X3 NFC, Xiaomi).

### 2.2. Metodologia

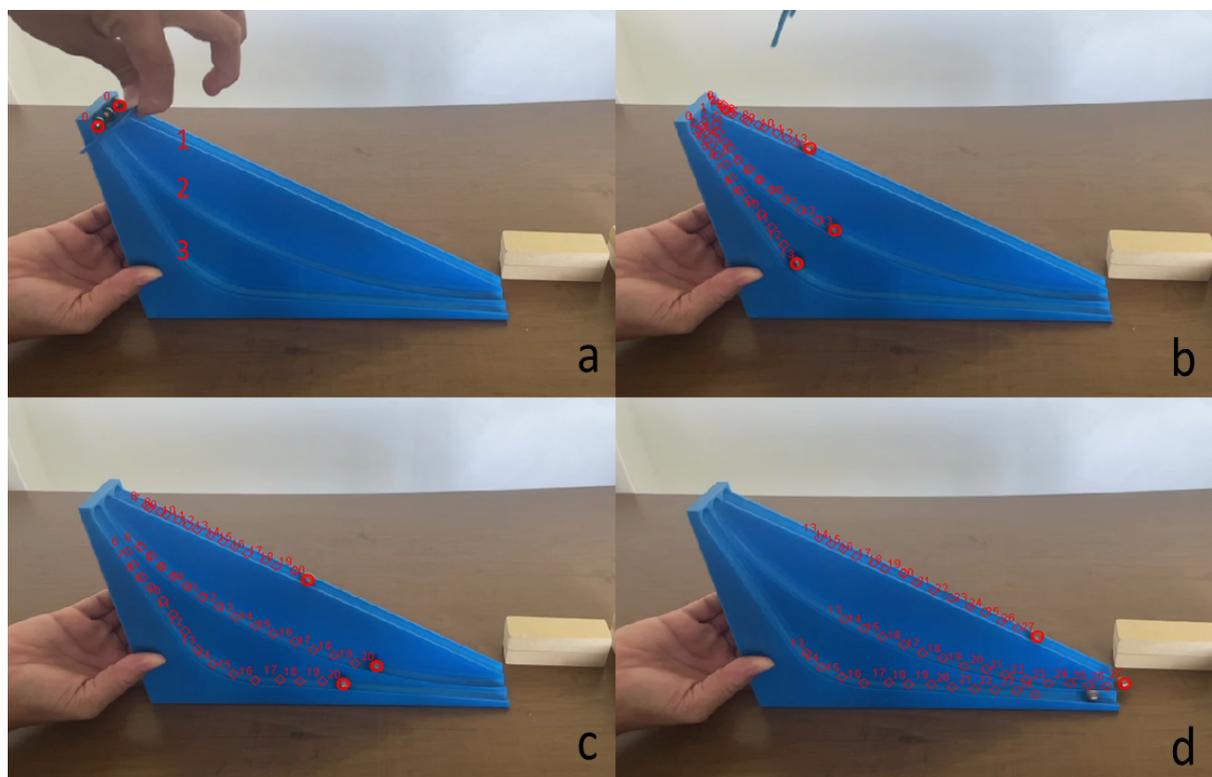
As curvas foram impressas usando uma impressora 3D de filamento flexível (Creality, modelo Ender 3 S1). Um vídeo da dinâmica das esferas rolando sobre as curvas foi gravado com o auxílio do *smartphone*. As gravações foram feitas em câmera lenta com números de quadros reduzidos a 120 fps (*frames per second*). Em seguida, o vídeo analisado no *software livre tracker*. Esse programa é utilizado para a análise de movimento quadro a quadro a partir de um vídeo, ou seja, uma videoanálise<sup>[5]</sup>.

## 3. Resultados e Discussão

A Fig. 1 mostra quatro instantes da dinâmica das três esferas metálicas rolando suavemente pela superfície de três curvas impressas em 3D a partir do momento em que são liberadas do repouso. Os números 1, 2 e 3 correspondem ao plano inclinado, à cicloide (braquistócrona) e à hipérbole, respectivamente. Em (a) tem-se o instante de liberação das esferas a partir do repouso. Na Fig. 1(b) e (c) estão apresentados dois instantes intermediários dessa dinâmica sob ação gravitacional, e em (d) o instante em que a esfera que rolou sobre a braquistócrona atingiu a base da curva em um intervalo de tempo menor comparado às outras duas curvas. Ao observar-se a Fig. 1(d), é razoável inferir que a esfera que rolou pela hipérbole chegou antes da esfera que percorreu o plano inclinado. Esses resultados mostraram-se consistentes com alguns reportados em literatura. Vieira et al., (2016)<sup>[6]</sup> estudaram o problema da braquistócrona à luz do cálculo variacional e do Princípio de Fermat. Eles construíram um aparato metálico que possui exatamente as três curvas propostas neste trabalho, e calcularam o tempo de descida para esferas metálicas rolando sobre as curvas. Os valores estimados foram iguais 2,43 s, 1,63 s e 1,47 s para a reta, hipérbole e cicloide, respectivamente.

Mais recentemente, diferentes apanhados teóricos e/ou experimentais sobre a cicloide têm sido relatados. Uma proposta didática destinada aos estudantes do Ensino Médio para a resolução do problema da braquistócrona utilizando o GeoGebra foi apresentada<sup>[7]</sup>. O movimento de um ponto da periferia de um corpo rolante foi filmado com um *smartphone* e analisado com o *tracker* a fim de determinar a equação da trajetória desse ponto. Foi verificado que, de fato, a parametrização desse ponto periférico de uma roda, que rola sem

deslizar sobre uma rampa em formato de uma cicloide define também uma cicloide<sup>[8]</sup>. Investigação recente explorou a potencialidade da experimentação em sala de aula como vetor facilitador no processo ensino-aprendizagem. Além disso, foi mostrado o quão contra intuitivo pode ser a análise inicial dos estudantes em relação à braquistócrona. Quando comparada ao plano inclinado, 80% deles afirmaram que a esfera ao rolar sobre a reta chegaria primeiro à base da curva<sup>[9]</sup>.



**Figura 1.** Lançamento das esferas sobre três curvas, 1 – plano inclinado, 2 – cicloide, 3 – hipérbole. As letras a, b, c, e d identificam quatro instantes a partir da liberação das esferas.

#### 4. Conclusões

A dinâmica de três esferas metálicas rolando sobre diferentes curvas impressas em 3D foi abordada. As esferas foram lançadas simultaneamente a partir do repouso e rolaram sobre um plano inclinado, uma cicloide e uma hipérbole. Observou-se que a esfera sobre a cicloide chegou à base da curva em menor tempo, seguida pela hipérbole e pela reta. Tal resultado parece contra intuitivo, uma vez que é aprendido nos Ensinos Fundamental e Médio que a menor distância entre dois pontos é uma reta. Contudo, esse resultado é válido apenas na Geometria Euclidiana. A marcação das posições das esferas rolantes, quadro a quadro, possibilitada pela videoanálise via *tracker* é fundamental para a construção desse conhecimento. Portanto, a análise por vídeo se candidata como potencial ferramenta

7, 8, 9 E 10 DE NOVEMBRO DE 2023

# X CONEPE

SOCIEDADE TECNOLÓGICA:  
*conexões para além da conectividade*

ISSN 2525-975X

didático-pedagógica no processo de ensino-aprendizagem. As próximas etapas serão realizar um estudo sistemático da dinâmica de rolamento dessas esferas sobre as curvas impressas em 3D. Igualmente, explorar o uso das TICs no Ensino, buscando despertar o interesse de jovens pela Ciência.

## Agradecimentos

C.C. Vieira agradece à Pró-Reitoria de Extensão da UENF pela bolsa de Extensão, D.L. Barreto agradece à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) pela bolsa de Treinamento e Capacitação Técnica (Processo E-26/204.879/2022) e L. Mota agradece à FAPERJ pelo suporte financeiro através dos Processos E-26/211.777/2022 e E-26/210.167/2022.

## Referências

- [1] LAM, M. R. et al. Demonstration of quantum brachistochrones between distant states of an atom. **Physical Review X**, v. 11, n. 1, p. 011035, Fev. 2021.
- [2] BARI, R. Simulating the action principle in optics. **Physics Teacher**, v. 61, n. 3, p. 212-217, Mar. 2023.
- [3] PLETER, O. T.; CONSTANTINESCU, C. E. A review of flight trajectory optimisations. *Journal of Navigation*, v. 75, n. 3, p. 646-661, Mai. 2022.
- [4] BATISTA, G. S. et al. Experiências com a braquistócrona. **Física na Escola**, v. 7, n. 2, p. 58-60, Out. 2006.
- [5] MARCULINO, C. H. S. et al. Uso de vídeo-análise para promover a experimentação dos conceitos de física com atividades ao ar livre. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 3, p. 243-256, Abr/Jun. 2019.
- [6] VIEIRA, C. G. et al. O problema da braquistócrona: uma proposta para o ensino. **Abakós**, v. 4, n. 2, p. 94-104, Mai. 2016.
- [7] Apresentação da resolução do problema da braquistócrona em software livre aplicado para o Ensino Médio. PICOLLOTO, Angela; STURION, Elaine; HERNRIQUE, F. **Open Science Research IX**. São Paulo: Editora Científica Digital, 2022. p. 602-611.
- [8] LEDO, G. M. et al. Rolamento de uma roda sobre uma rampa cicloide. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 45, n. e2022274, p. 1-6, Mai. 2023.
- [9] SANTIAGO, R. B.; RAYMUNDO, M. P. Investigação experimental do movimento de corpo sobre trajetórias com diferentes perfis: reta inclinada, parábola e cicloide. **Vértices**, v. 22, n.2, p. 336-354, Jun. 2020.