DIFERENTES FORMAS DE JUSTIFICAR A FÓRMULA DA ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA NO ENSINO MÉDIO

Aline Rodrigues da Silva- IF Fluminense (alyne.central@gmail.com)
Bruno Fillipe Gomes da Silva - IF Fluminense (bfgs_16@yahoo.com.br)
Fernanda Manhães Santos - IF Fluminense (nanda.s.manhaes@gmail.com)
Gilmara Teixeira Barcelos - IF Fluminense (gilmarab@iff.edu.br)
Ludmilla Rangel Cardoso Silva - IF Fluminense (ludrcs@hotmail.com)
Mayara Carlos Barbosa - IF Fluminense (mcarlos52@hotmail.com)
Pâmella de Alvarenga Souza - IF Fluminense (pamella_alvarenga@yahoo.com.br)

Resumo: A memorização de fórmulas matemáticas ainda é um problema para a aprendizagem matemática. Justificar as fórmulas matemáticas é uma estratégia que pode colaborar para melhor compreensão e aplicação delas, nos mais diversos contextos. Nesse sentido, no minicurso serão apresentadas quatro formas de justificar a fórmula da área da superfície esférica para alunos do Ensino Médio. Para tanto, serão utilizados material concreto e imagens para auxiliar a compreensão.

Palavras-chave: Superfície Esférica, Fórmula, Área.

DIFFERENT WAYS TO JUSTIFY THE FORMULA OF SPHERICAL SURFACE AREA IN HIGH SCHOOL

Abstract: *The memorization of mathematical formulas is still a problem in the learning of it. Justifying mathematical formulas is an strategy that can collaborate for a better comprehension and its application in various contexts. In this sense, in the short course four ways to justify the spherical surface formulas for High School students will be presented. For that, concrete materials and pictures to aid understanding will be used.*

Keywords: *Spherical surface, Formula, Area.*

1- Introdução

Segundo pesquisa realizada por Knijnik e Silva (2008), as dificuldades na aprendizagem de Matemática decorrem, entre outros aspectos, do formalismo e abstração dessa área do conhecimento. Complementando, os referidos autores afirmam que memorizar fórmulas é um problema para muitos alunos. Um dos motivos por que a memorização de fórmulas é considerada complicada decorre do não estabelecimento de relações entre uma fórmula e outra e também pela apresentação delas como algo pronto. As demonstrações devem ser feitas de maneira compreensível para os alunos, nem sempre com o rigor lógico, e, além disso, é importante considerar os requisitos didáticos (ÁVILA, 2010).

Segundo Ávila (2010), a reforma denominada Matemática Moderna influenciou entre outros aspectos, na redução das demonstrações apresentadas nos livros didáticos. Alguns livros limitam-se a enunciar fórmulas sem nenhuma justificativa.

Visando buscar uma justificativa para a fórmula da área da superfície esférica foi realizada uma pesquisa sobre esse tema em vinte livros didáticos de Matemática do Ensino Médio. Porém, em apenas seis livros (LIMA ET AL. 2006; SCIPIONE, ORSI E CARVALHO, 2005; GOULART, 1999; BIANCHINI e PACCOLA, 1995; BONGIOVANNI, LEITE, LAUREANO, 1993; MACHADO, 1988), encontrou-se uma justificativa, sendo quatro delas distintas entre si. Nessas quatro, a ideia de limite está presente. É importante destacar que as justificativas não constituem demonstrações, mas apenas um argumento heurístico (LIMA, 1991). Demonstrações são encontradas nos livros de Cálculo, como aplicação do conceito de Integral.

Considerando o contexto descrito, propõe-se o presente minicurso que tem por objetivo apresentar justificativas para a fórmula da área da superfície esférica. Esse tema foi escolhido pelo fato de muitos livros didáticos do Ensino Médio apresentarem a referida fórmula sem nenhuma explicação.

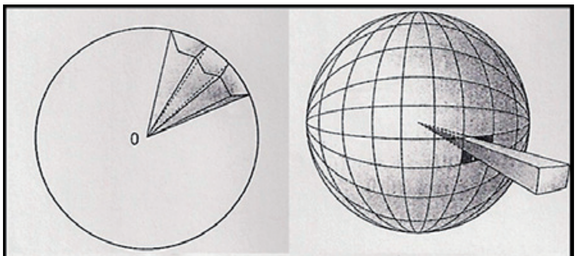
Na próxima seção, apresentam-se, resumidamente, quatro formas de justificar a fórmula da área da superfície esférica para alunos do Ensino Médio.

2- Deduzindo a área da superfície esférica

Diferente do cilindro e do cone, a esfera não possui uma superfície "desenvolvível", ou seja, não é possível fazer cortes numa esfera e depois aplica-la sobre o plano, sem dobrar em esticar (LIMA, 1991). Sendo assim, para calcular a área da superfície esférica, faz-se necessário buscar métodos diferentes dos utilizados nos cilindros e cone.

A primeira justificativa baseia-se na ideia de decompor a esfera em um número muito grande, *n*, de sólidos geométricos de forma aproximadamente piramidal, com vértice comum no centro da esfera e cujas "bases" são partes da superfície esférica, partes congruentes (Figura 1). Para *n* muito grande, essas partes da superfície esférica são assimiláveis a figuras planas, regiões poligonais que são as bases de pirâmides as quais os sólidos podem ser assimilados, pirâmides de altura r (raio da esfera). A aproximação é tanto melhor quanto maior for o valor de n (e consequentemente menor a área da base de cada pirâmide) (GOULART, 1999; BONGIOVANNI, LEITE, LAUREANO, 1993). Uma justificativa análoga é apresentada por Lima et al. (2006), nesta ao invés de pirâmides consideram-se cones.

Figura 1 – *Justificativa 1*



A aproximação é tanto melhor quanto maior for o valor de n (e conseqüentemente menor a área da base de cada pirâmide, no caso).

Indicando por A_b a área da base de cada uma destas pirâmides, o volume de cada uma é $\frac{1}{3} A_b \cdot r$. Na totalidade, $n \cdot \frac{1}{3} A_b r$, que podemos fazer igual ao volume da esfera.

Assim, temos: $n \cdot \frac{1}{3} A_b r = \frac{4\pi r^3}{3}$

e daí, $n \cdot A_b = 4\pi r^2$

Como, para n suficientemente grande, $n \cdot A_b$ é a área da superfície esférica, indicando esta área por A, temos:

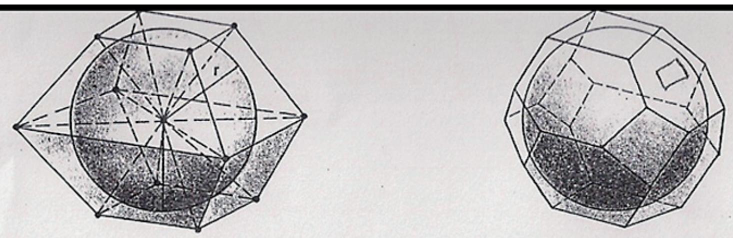
$$\boxed{A = 4\pi r^2}$$

Fonte: GOULART, 1999, p. 239-240.

A segunda justificativa parte da ideia de imaginar a esfera inscrita num poliedro de muitas faces, todas tangentes à esfera (MACHADO, 1988). Este poliedro pode ser visto como a união de pirâmides, cada uma com base numa das faces e o vértice no centro da esfera (Figura 2).

A terceira justificativa considera duas esferas concêntricas de raios diferentes, cuja diferença entre os raios é muito pequena, de forma que a diferença entre o volume das duas esferas seja, aproximadamente, a área da superfície esférica (Figura 3) (BIANCHINI, PACCOLA, 1995). Esta justificativa também é apresentada por Lima (1991).

Figura 2 *–Justificativa 2*



Supondo o poliedro com n faces, temos n pirâmides de alturas iguais ao raio da esfera, r. Sejam $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ as áreas das bases das pirâmides e V_n o volume do poliedro. Temos:

$$V_n = \frac{1}{3}A_1r + \frac{1}{3}A_2r + \frac{1}{3}A_3r + \ldots + \frac{1}{3}A_nr$$
$$V_n = \frac{r}{3}(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n)$$

Para n muito grande, V_n é aproximadamente igual ao volume V da esfera e a soma $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$ tende à área A da superfície esférica. (Quanto maior o n, melhores ficam estas aproximações.) Imaginando n "tendendo a infinito", teremos a igualdade

$$V = \frac{r}{3}A.$$

Uma vez que provamos anteriormente a fórmula do volume, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, chegamos à conclusão que:

$$A = \frac{3}{r}V = \frac{3}{r}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2.$$

Fonte: MACHADO, 1988, p.200.

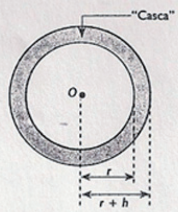
A quarta justificativa é atribuída a Arquimedes (LIMA, 1991). A ideia baseia-se em considerar a superfície esférica como obtida pela rotação de uma semicircunferência em torno de um diâmetro. Inscreve-se, nessa semicircunferência, a metade de um polígono regular de 2n lados. Por rotação, essa poligonal gera uma superfície formada por n-2 troncos de cone mais um cone no topo e outro na base. Todos os cones e troncos têm geratrizes de mesmo comprimento. A área dessa superfície inscrita é uma aproximação da área da esfera. Aumentando indefinidamente o número de lados do polígono regular inscrito obtém-se, no limite, a área da esfera (LIMA, 1991; SCIPIONE, ORSI e CARVALHO, 2005).

Com a discussão realizada no minicurso, visa-se possibilitar a compreensão da fórmula da área da superfície esférica, tornando a aprendizagem deste tema mais simples e agradável para os alunos do Ensino Médio.

***Figura 3** – Justificativa 3*

Área da superfície esférica

Consideremos duas superfícies esféricas de mesmo centro, sendo r o raio da menor e $r + h$ o raio da maior. À região do espaço compreendida entre elas chamaremos "casca esférica". O volume dessa casca esférica será a diferença entre os volumes das duas respectivas esferas. Veja a figura.



$$V_c = \frac{4\pi}{3}\cdot(r+h)^3 - \frac{4\pi}{3}\cdot r^3$$

$$V_c = \frac{4\pi}{3}\cdot(\cancel{r^3} + 3r^2\cdot h + 3r\cdot h^2 + h^3 - \cancel{r^3})$$

$$V_c = \frac{4\pi}{3}\cdot(3r^2\cdot h + 3r\cdot h^2 + h^3)$$

Dividindo os dois membros por h, temos:

$$\frac{V_c}{h} = \frac{4\pi}{3}\cdot(3r^2 + 3r\cdot h + h^2)$$

Vamos agora fazer h "diminuir cada vez mais", ou seja, vamos diminuir cada vez mais a espessura da "casca esférica".

Fazendo "h tender a zero", a expressão $\frac{V_c}{h}$ do primeiro membro é, por definição, a área da superfície esférica de raio r.

Dessa forma, chamando de A_s a área da superfície esférica, temos:

$$A_s = \frac{4\pi}{3}\cdot(3r^2 + 3\cdot \underbrace{\cancel{h}}_{0}\cdot r + \underbrace{\cancel{h^2}}_{0})$$

$$A_s = \frac{4\pi}{\cancel{3}_{1}}\cdot \overset{1}{\cancel{3}}r^2 \Rightarrow A_s = 4\pi r^2$$

Então concluímos:

> A fórmula que fornece a área de uma superfície esférica de raio r é:
> $A_s = 4\pi r^2$ unidades

Fonte: BIANCHINI, PACCOLA, 1995, p. 257.

Referências

ÁVILA, G. Reflexões sobre o ensino de geometria**,** *Revista do Professor de Matemática (RPM)*, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 71, ano 28, p. 03-07, 2010.

BIANCHI, E.; PACCOLA, H. *Matemática,* v. 2. São Paulo: Moderna, 1995.

BONGIOVANNI, V.; LEITE, O. R. V.; LAUREANO, J. L. T. *Matemática e Vida*, v.2, 2.ed. São Paulo: Ática, 1993.

GOULART, M. C. *Matemática no Ensino Médio*, v. 2. São Paulo: Scipione, 1999.

KNIJNIK, G. SILVA F.B.de S. O problema são as fórmulas: um estudo sobre os sentidos atribuídos à dificuldade em aprender matemática. *Cadernos de Educação,* Faculdade de Educação/ UFPel | Pelotas, n. 30, p. 63-78, 2008.

LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*, 6. ed., v. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MACHADO, A. dos S. *Matemática Temas e Metas*, v. 4, São Paulo: Atual, 1988.

SCIPIONE, D. P. N.; ORSI, S. F.; CARVALHO, M. C. *Quinta-Matemática-Ensino Médio*. São Paulo: Saraiva, 2005.