



08 a 11 de Outubro de 2018  
Instituto Federal Fluminense  
Búzios - RJ

## A ERA DE PLANCK DO UNIVERSO DESCRITA PELO PACOTE SPECTRAL

**R. C. Freitas**<sup>1</sup> - rodolfo.camargo@pq.cnpq.br  
**G. A. Monerat**<sup>2</sup> - germano.monerat@pq.cnpq.br  
**G. Oliveira-Neto**<sup>3</sup> - gilneto@fisica.ufjf.br  
**E. V. Corrêa Silva**<sup>4</sup> - eduardo.vasquez@pq.cnpq.br  
**F. G. Alvarenga**<sup>5</sup> - flavio.alvarenga@ufes.br  
**S. V. B. Gonçalves**<sup>5</sup> - sergio.vitorino@pq.cnpq.br  
**L. G. Ferreira Filho**<sup>4</sup> - kph120@gmail.com  
**R. Fracalossi**<sup>5</sup> - rfracalossi@gmail.com

<sup>1</sup>Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, Vitória, ES, Brazil.

<sup>2</sup>Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico - Nova Friburgo, RJ, Brazil.

<sup>3</sup>Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas - Juiz de Fora, MG Brazil.

<sup>4</sup>Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Tecnologia - Resende, RJ Brazil.

<sup>5</sup>Universidade Federal do Espírito Santo, Ciência de Ciências Exatas, Vitória, ES, Brazil.

**Resumo.** Neste trabalho estudamos a quantização dos modelos de Friedmann -Lemaître -Robertson -Walker (FLRW) com radiação e um condensado de Bose-Einstein para a descrição da era de Planck de nosso Universo. Esse estudo é feito utilizando o método espectral de Galerkin, o qual foi implementado em um pacote computacional em linguagem Maple chamado Spectral. Os resultados mostram fortes indícios que a nível quântico o Universo não possui singularidades.

**Palavras-chave:** Método de Galerkin, Cosmologia Quântica, Equação de Wheeler-DeWitt

## 1. INTRODUÇÃO

O cenário cosmológico do *big bang* revela um Universo em expansão, mas que foi muito menor no passado. Alguns modelos predizem que na chamada época de Planck, cerca de  $10^{-43} s$  após a suposta explosão inicial, o Universo observável, cujo tamanho hoje é da ordem de  $10^{28} cm$ , não era maior do que cerca de  $10^{-53} cm$ . Como esta dimensão é extremamente pequena se comparada, por exemplo, ao diâmetro do próton ( $\approx 10^{-13} cm$ ), existiu um breve mas extraordinariamente importante período na evolução do Universo, no qual os efeitos quânticos dominavam. Esse período pode ser analisado em modelos cosmológicos de misuperespaço através da grandeza chamada de função de onda do Universo, a partir da qual podemos extrair várias previsões, como por exemplo, o fator de escala do Universo e a existência ou não da singularidade inicial. A dinâmica é descrita pelo formalismo hamiltoniano da Relatividade

Geral com a equação de Wheeler-DeWitt governando o comportamento da função de onda do Universo HALLIWELL (1991).

Analisaremos um modelo cosmológico em minisuperespaço descrevendo o Universo preenchido com um condensado de Bose-Einstein e fluido perfeito de radiação. O conteúdo material de Bose-Einstein além de ser candidato a explicar o processo de formação de matéria escura pode ajudar a descrever a evolução do Universo recente FUKUYAMA (2006, 2009). A equação de estado representando tal composição é do tipo

$$p = \frac{1}{3}\rho + \sigma \rho^2, \quad (1)$$

onde  $\sigma$  é parâmetro negativo que representa a auto interação atrativa para o fluido.

O fluido de radiação relativístico interagindo com o campo gravitacional é também introduzido fenomenologicamente para exercer o papel do tempo na equação de Wheeler-DeWitt FURTADO (2016).

Implementaremos todo o processo de construção das soluções cosmológicas através do método espectral de Galerkin para equações diferenciais, usando o pacote computacional Spectral, em linguagem Maple.

O trabalho será dividido da seguinte forma: Na seção 2 uma breve descrição do modelo cosmológico quântico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) com radiação e condensado de Bose-Einstein é apresentada, destacando a equação de Wheeler-DeWitt resultante. Na seção 3, a aplicabilidade do método de Galerkin com o pacote Spectral é discutida. Na seção 4 são calculados o espectro de energia com os primeiros autoestados e o valor esperado do fator de escala do Universo com sua respectiva incerteza. Finalmente, na seção 5 analisamos os resultados, destacando o caráter não singular do modelo a nível quântico.

## 2. O MODELO COSMOLÓGICO QUÂNTICO

Analisamos os modelos de Friedmann-Robertson-Walker com curvatura positiva ( $k = 1$ ), cujo conteúdo material é composto um fluido radioativo e um condensado de Bose-Einstein com auto-interação gravitacional atrativa, os quais são descritos pela seguinte Hamiltoniana ALVARENGA et al. (2018)

$$H = \frac{1}{24}p_x^2 + V_{eff}(x) - p_T, \quad (2)$$

em que  $p_x$  e  $p_T$  são respectivamente os momentos conjugados as coordenadas do fator de escala do universo e do fluido de radiação. O termo  $V_{eff}(x)$  que fará o papel do potencial efetivo conterá os termos relacionados com a curvatura da seção espacial e com o condensado de Bose-Einstein com auto-interação gravitacional atrativa:

$$V_{eff}(x) = 6x^2 + \frac{|\sigma|^2 x^4}{(1+x^3)^2}. \quad (3)$$

Aplicando o formalismo de Dirac a esse modelo implica em que os momentos canônicos sejam elevados ao grau de operadores e ainda que a função de onda do Universo quando aplicado ao operador Hamiltoniano o anule

$$\hat{H}\Psi(x, T) = 0, \quad \hat{p}_x \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_T \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial T} \quad (4)$$

Dessa forma, a equação de Wheeler-DeWitt assumirá a forma de uma equação diferencial parcial

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 144x^2 + 24\frac{|\sigma|^2 x^4}{(1+x^3)^2} \right) \Psi(x, t) = 24i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x, t), \quad (5)$$

onde reparametrizamos o tempo  $T = -t$ .

### 3. O MÉTODO DE GALERKIN E O PACOTE SPECTRAL

Dentre os diversos métodos numéricos conhecidos, o método espectral de Galerkin Boyd (2001) tem sido usado para a quantização de sistemas físicos envolvendo osciladores quânticos MONERAT et al. (2015) e até mesmo em cosmologia quântica PEDRAM (2008), OLIVEIRA-NETO et al. (2013), OLIVEIRA-NETO (2011), na busca de soluções para equações de Schrödinger e de Wheeler-DeWitt, respectivamente. Neste método, soluções são obtidas pela combinação linear de um número adequado de funções básicas, e são obtidas equações para os coeficientes de tais expansões. O problema é assim mapeado em um problema de autovalor matricial aproximado, que pode ser resolvido, por sua vez, por métodos de álgebra linear. Uma descrição detalhada do método de Galerkin é apresentada em MONERAT et al. (2015).

O pacote Spectral construído por CORRÊA SILVA et al. (2013) implementa o método espectral de Galerkin na linguagem MAPLE (2013). Além disso, o pacote contém várias ferramentas de teste para: verificação da conservação da norma; verificação da ortogonalidade entre os autoestados; verificação se o conjunto de soluções aproximadas (autovalores e autofunções) satisfaz a equação de autovalor. Além disso, o Spectral possibilita comparar as soluções para dois problemas computacionais ligeiramente diferentes (por exemplo, para diferentes valores dos parâmetros físicos do modelo, ou para diferentes números de funções básicas usadas na aproximação), e assim permitir obter conclusões sobre a estabilidade dos resultados encontrados.

Uma outra possibilidade oferecida pelo pacote Spectral é que devido ao fato do Maple poder interagir com o sistema numérico Octave, sem a necessidade de programação do Octave pelo usuário, o pacote permite ao usuário efetuar os cálculos envolvendo os autoestados e suas respectivas autoenergias através o uso do software GNU OCTAVE (2013). O que torna os cálculos bem mais rápidos e precisos. O pacote Spectral mostra-se capaz de resolver equações diferenciais que encontram-se na forma

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + f(x) \right) \Psi(x, t) = ig(x)\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x, t), \quad (6)$$

em que as funções  $f(x)$  e  $g(x)$  dependem dos modelos a serem considerados. E ainda, quando  $g(x) = 1$  a equação (6) recai na chamada equação de Schrödinger dependente do tempo.

#### 4. RESULTADOS OBTIDOS

Para aplicar o Spectral ao nosso modelo descrito pela equação (5), vemos que ao compararmos com (6) temos que

$$f(x) = 144x^2 + 24 \frac{|\sigma|^2 x^4}{(1+x^3)^2} \quad \text{e} \quad g(x) = 24. \quad (7)$$

Considerando no Spectral  $N = 100$  níveis de energia e um intervalo de amplitude  $L = 0.8$ , exibimos os dez níveis de energia mais baixos na tabela 1.

Tabela 1- Espectro de energia para o modelo FRW com curvatura positiva ( $k = 1$ ), radiação e um condensado de Bose-Einstein com  $\sigma = -6$ .

$n$	$E_n$	$n$	$E_n$
1	1.974485898611541	6	26.24713592115603
2	5.225359368473296	7	34.57744295573775
3	8.933629084465441	8	44.20042764414275
4	13.47279232505126	9	55.1132001234115
5	19.21359596693284	10	67.31405763103633

A figura 1 exibe os seis primeiros autoestados associados as autoenergias mostradas na tabela 1.

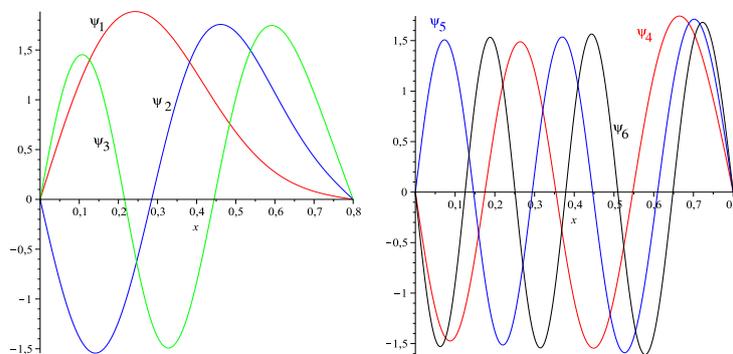


Figura 1- Os 6 primeiros autoestados do modelo FRW com  $k = 1$  e  $\sigma = -6$ .

A evolução do sistema no tempo e espaço é governada por pacotes de onda, os quais são obtidos através da superposição de um número finito de autoestados

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t}. \quad (8)$$

Para exemplificar isto, pacotes de onda foram construídos através da superposição dos 10 níveis de energia mais baixos, conforme mostrado na figura 2. Repare que assim como os autoestados, o pacote construído também satisfazem as condições de contorno  $\Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0$ . Isso é uma consequência do método Espectral de Galerkin.

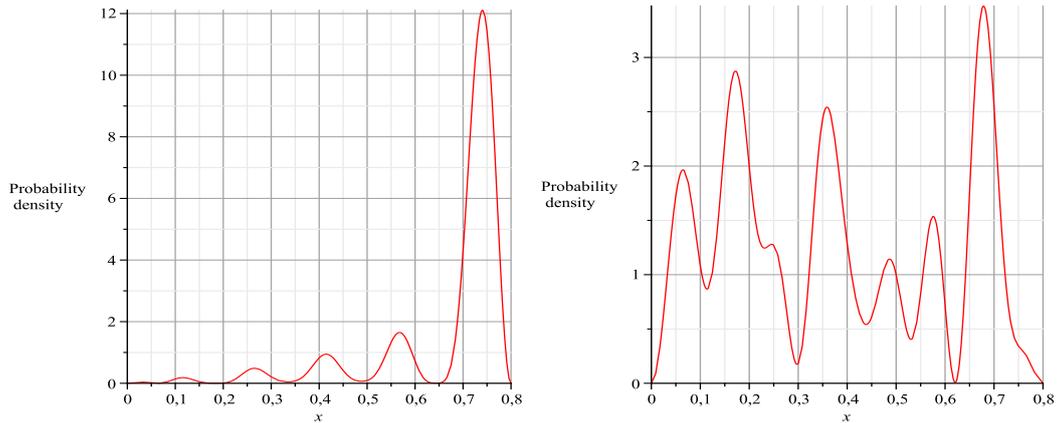


Figura 2- Pacotes de onda construídos com a superposição dos 10 primeiros autoestados, associados as energias da tabela 1: (a) para  $t = 0$  e (b)  $t = 1$ . Aqui  $c_n = 1$  para  $1 \leq n \leq 10$  e  $c_n = 0$  para  $n > 10$ . Aqui consideramos  $\sigma = -6$  e  $L = 0.8$ .

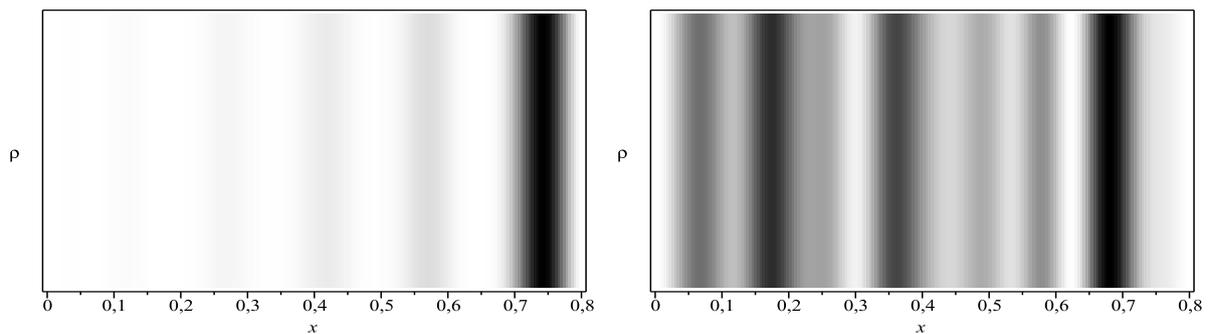


Figura 3- As densidades de probabilidade respectivamente nos instantes  $t = 0$  e  $t = 1$  para  $k = 1$  e  $\sigma = -6$ , construídas pela superposição dos 10 primeiros autoestados. Aqui as regiões mais escuras apresentam as maiores densidades de probabilidades.

O pacote Spectral também permite expressar as densidades de probabilidades (mostradas na figura 2) de outra forma (vide figura 3).

O pacote Spectral permite também calcular o valor esperado  $\langle x \rangle$  da coordenada espacial, que aqui representa o fator de escala do Universo. Assim, a evolução temporal desta quantidade fornecerá o comportamento do Universo durante a Era de Planck. O valor esperado é calculado pela expressão:

$$\langle x \rangle (t) = \frac{\int_0^L x |\Psi(x, t)|^2 dx}{\int_0^L w(x) |\Psi(x, t)|^2 dx}. \quad (9)$$

O comportamento do  $\langle x \rangle (t)$  exibido na figura 4 (curva vermelha) mostra que nessa fase o Universo oscila rapidamente; e que este nunca se anula ( $\langle x \rangle (t) \neq 0, \forall t$ ), indicando a ausência de singularidades no universo. Em outras palavras, quando efeitos quânticos são levados em consideração, as singularidades existentes no modelo clássico, descritos pela Teoria

da Relatividade Geral, não se fazem presentes. Foi possível também calcular as incertezas associadas a medida do  $\langle x \rangle$ , a qual é definida como

$$\Sigma(t) = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}. \quad (10)$$

A figura 4 exhibe o comportamento no tempo das incertezas  $\Sigma + \langle x \rangle$  (curva verde acima),  $\langle x \rangle - \Sigma$  (curva verde abaixo) e  $\langle x \rangle$  (curva vermelha) no decorrer do tempo; mostrando que tais quantidades são maiores sempre positivas! O que reforça mais o nosso argumento de que a nível quântico não há singularidades no modelo.

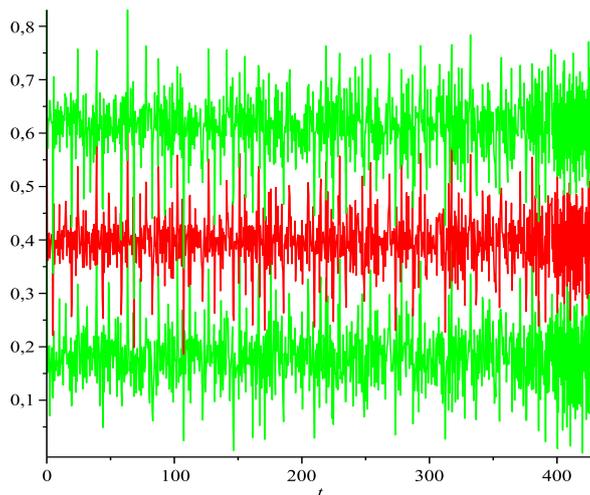


Figura 4- Evolução temporal do valor esperado da posição  $\langle x \rangle$  (curva central, vermelha) e de  $\langle x \rangle + \Sigma$  (curva superior, verde) e  $\langle x \rangle - \Sigma$  (curva inferior, verde), em que  $\Sigma$  é a incerteza associada a  $\langle x \rangle$ .

## 5. CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

No presente trabalho utilizamos o pacote de computação SPECTRAL construído em linguagem Maple para obter a quantização dos modelos Friedmann-Robertson-Walker (FRW) com curvatura positiva, cujo conteúdo material é composto por um fluido de radiação e um condensado de Bose-Einstein. O pacote implementa o método espectral de Galerkin e mais algumas ferramentas que permitem averiguar a acurácia dos resultados. Através do uso do pacote foi possível obter o espectro de energia para os 100 primeiros níveis e cada um dos autoestados. Cada um dos autoestados obtidos satisfazem as condições de contorno estabelecidas por Hawking e Page. O mesmo ocorre para os pacotes de onda que foram construídos pela superposição destes autoestados. Todos os pacotes de onda obtidos se mostraram bem definidos em todo o espaço considerado, até mesmo quando o fator de escala do Universo vai a zero ( $x = 0$ ). Também apresentaram uma excelente conservação da norma com um erro inferior a  $10^{-14}$ .

Os valores esperados do fator de escala de nosso Universo evoluem com oscilações limitadas, mas nunca se anulam. O mesmo acontece com as incertezas associadas a ele. Isto nos proporciona um forte indicativo de que esses modelos não possuem singularidades no nível quântico.

## REFERÊNCIAS

- J. J. HALLIWELL, Quantum Cosmology and Baby Universes. (World Scientific, Singapore, 1991).
- T. FUKUYAMA and M. MORIKAWA, Progr. Theoret. Phys, 115 (2006) 1047-1068, [arXiv:astro-ph/0509789].
- T. FUKUYAMA and M. MORIKAWA, Phys. Rev. D, 80 (2009) 063520, [arXiv:0905.0173].
- F. G. ALVARENGA, R. G. FURTADO e S. V. B. GONÇALVES, S. Brazilian Journal of Physics, v. 47, p. 96 (2016).
- F. G. ALVARENGA, L. G. Ferreira Filho, R. Fracalossi, R. C. Freitas, S. V. B. Gonçalves, G. A. Monerat, G. Oliveira-Neto, E. V. Corrêa Silva, Primordial Universe with radiation and Bose-Einstein condensate. [arXiv:1610.06416v1], (2018). <http://lanl.arxiv.org/pdf/1610.06416>. Accessed 13 July 2018.
- J.P. BOYD, Chebyshev and Fourier Spectral Methods, second ed., Dover, New York, (2001).
- MONERAT, G. A.; E.V. Corrêa Silva ; LEAL, L. B. ; OLIVEIRA NETO, Gil de . O método de Galerkin para a quantização de sistemas Hamiltonianos. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 37, p. 4301-1-4301-11, (2015).
- P. PEDRAM, et al., Gen. Relativity Gravitation 40 (2008) 1663.
- OLIVEIRA-NETO, G. ; MONERAT, G. A. ; CORRÊA SILVA, E. V. ; Neves, C. ; FERREIRA FILHO, L. G. . Quantization of Friedmann-Robertson-Walker Spacetimes in the Presence of a Cosmological Constant and Stiff Matter. International Journal of Theoretical Physics, v. 52, p. 2991-3006, 2013.
- OLIVEIRA-NETO, G. ; MONERAT, G. A. ; CORRÊA SILVA, E. V. ; Neves, C. ; FERREIRA FILHO, L. G. . AN EARLY UNIVERSE MODEL WITH STIFF MATTER AND A COSMOLOGICAL CONSTANT. International Journal of Modern Physics: Conference Series, v. 03, p. 254-265, 2011.
- Corrêa Silva, E.V. ; Monerat, G.A. ; DE OLIVEIRA NETO, G. ; Ferreira Filho, L.G. . Spectral: Solving Schroedinger and Wheeler-DeWitt equations in the positive semi-axis by the spectral method. Computer Physics Communications, v. 185, p. 380-391, 2013.
- Maplesoft. Maple 13 Installation and Licensing Guide: Release 13.02. Available at [http://www.maplesoft.com/support/install/maple13\\_install.html](http://www.maplesoft.com/support/install/maple13_install.html) (accessed 28.08.2013) Maple is a registered trademark of Waterloo Maple Inc.
- GNU Octave, Available at <http://www.gnu.org/software/octave/>, (accessed 28.08.2013). GNU Octave, as part of the GNU Project, it is free software under the terms of the GNU General Public License (GPL).

## THE PLANCK ERA OF THE UNIVERSE DESCRIBED BY THE SPECTRAL PACKAGE

**Abstract.** *In this work we study the quantization of the FRW models with radiation and a Bose-Einstein condensate for the description of the Planck era of our Universe. This study is done using the Galerkin spectral method, which was implemented in a Maple language computational package called Spectral. The results show strong evidence that at the quantum level the Universe has no singularities.*

**Keywords:** *Spectral method. Quantum Cosmology. Weeler-DeWitt equation*