

08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

UM ESTUDO DO TEMPO DE PRIMEIRA PASSAGEM EM REDES

Marcelo Sousa Chaves¹ - marcelochaves.chaves@gmail.com

Allbens Atman Picardi Faria^{1,2,3} - atman@cefetmg.br

Thiago Gomes de Mattos^{1,2} - tgmattos@cefetmg.br

¹Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, CEFET-MG - BH, MG, Brasil

²Departamento de Física, CEFET-MG - BH, MG, Brasil

³Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Sistemas Complexos - INCT-SC

Resumo. Neste trabalho é feito um estudo estatístico dos tempos de primeira passagem por fronteiras absorventes, para o movimento Browniano, na árvore de Cayley e na rede regular quadrada. Analisou-se quando o tempo médio de primeira passagem (TMPP) é uma boa medida para caracterizar o processo e as situações em que ele não o representa de forma concisa. Para tanto, utilizou-se o índice de uniformidade ω , que permite avaliar a simultaneidade de caminhadas aleatórias para um alvo fixo. Obteve-se a distribuição de probabilidade do índice, e foram identificadas duas formas características dessa distribuição: o formato de sino e o formato de U, respectivamente, quando o sítio de partida está afastado do alvo, e quando ele está próximo do alvo.

Palavras-chave: Tempo de primeira passagem, Caminhada aleatória, Redes.

1. INTRODUÇÃO

Os Fenômenos de Primeira Passagem (FPP) estão relacionados com diversos processos estocásticos, nos quais uma variável aleatória de interesse atinge pela primeira vez um determinado valor. Trata-se de um tópico bastante ativo, como a publicação de Metzler et al. (2014) que compila várias avanços. Este tópico vem proporcionando aplicações em diversas áreas de pesquisa tais como: Física, Mattos et al. (2012), em Neurologia, Burkitt (2006), em Ecologia, Mejía-Monasterio et al. (2011) e entre outras.

Uma das aplicações em Ecologia são os processos de busca por um alvo fixo ou móvel, como nos modelos predador-presa. O processo de busca pode ser modelado por uma caminhada aleatória, que é interrompida com a captura da presa, e este instante é conhecido por tempo de primeira passagem (TPP). Mejía-Monasterio et al. (2011) investigaram alguns aspectos da busca por um alvo fixo e apontam a devida precaução na análise do TPP por causa de flutuações significativas nas amostras.

Em dinâmica neuronal, o modelo integrate-and-fire revisado por Burkitt (2006), é amplamente utilizado para a análise do comportamento de sistemas neurais. Neste modelo, o potencial da membrana de um neurônio é descrito em termos das entradas sinápticas, consideradas

estocásticas, e da corrente injetada que ele recebe. O neurônio é acionado apenas quando um nível de tensão flutuante atinge pela primeira vez um nível específico, este instante é a própria definição do TPP.

Outra importante área de pesquisa que chama a atenção da comunidade científica é a Teoria das Redes. As importantes descobertas do final do Séc. XX acerca da conectividade das redes provocaram um aumento na produção de trabalhos científicos em teoria dos grafos. A descoberta de novas morfologias de redes permitiram abordar criteriosamente os problemas reais, que podem ser modelados por redes de simulação.

Essencialmente, este trabalho apresenta um estudo estatístico de tempos de primeira passagem (TPP) para caminhadas aleatórias na árvore de Cayley e na rede regular quadrada, com condições mistas de contorno. Isto é, foi imposta uma fronteira limitada representada por sítios refletores, e uma pequena abertura neste domínio, que é representada por sítios absorventes.

2. PRIMEIRA PASSAGEM

A primeira ocorrência de um dado valor preestabelecido para uma variável aleatória, elucidada o conceito de Primeira Passagem (PP) de um processo estocástico. Neste estudo, partículas aleatórias realizam o movimento browniano nos sítios da rede, e a PP ocorre quando um sítio absorvente da rede é atingido pela primeira vez.

O caráter não determinístico, inerente aos processos estocásticos, dificulta uma forma eficiente de caracterizar os modelos, tornando-se fundamental o uso de ferramentas da análise estatística para validação dos modelos. Assim, a distribuição espacial de probabilidades da partícula aleatória torna-se uma grandeza de extrema relevância para análise. Em domínios ilimitados a distribuição dos TPP é tipicamente larga, e em determinados processos a primeira passagem não existe.

Neste trabalho, as redes investigadas estão em um domínio limitado e a distribuição dos TPP é considerada estreita, uma vez que todos os momentos são possíveis, opondo-se às típicas distribuições em domínios ilimitados.

A partir da distribuição estacionária dos TPP obtém-se o Tempo Médio de Primeira Passagem (TMPP). Nos casos em que a distribuição dos TPP é larga, existe uma substancial flutuação entre as realizações individuais, fazendo com que o TMPP não seja uma boa medida para caracterizar o processo.

3. O CONCEITO DE SIMULTANEIDADE DE PRIMEIRA PASSAGEM

Para mensurar as flutuações nas amostras dos TPP, empregou-se o método de diagnóstico apresentado no trabalho de Mattos et al. (2012), que aplica o conceito de simultaneidade de eventos de PP. O objetivo é avaliar não apenas uma trajetória independentemente, mas sim todas combinações de duas realizações independentes e não-interagentes.

O procedimento consiste em liberar dois caminhantes brownianos não-interagentes de um mesmo sítio da rede e computar os respectivos TPP, τ_1 e τ_2 , ao atingirem um sítio absorvente. Para medir a probabilidade de que ambos os caminhantes atinjam, simultaneamente, um sítio absorvente, foi utilizado o índice de uniformidade ω , definido pela variável aleatória

$$\omega \equiv \frac{\tau_i}{\tau_i + \tau_j}, \quad (1)$$

por definição restrita ao intervalo $0 \leq \omega \leq 1$.

A distribuição $P(\omega)$ pode ter duas formas distintas: unimodal com um máximo em $\omega = 1/2$, quando o TMPP efetivamente caracteriza o comportamento de primeira passagem, ou bimodal, quando possui um mínimo em $\omega = 1/2$, caso em que o TMPP não constitui uma boa medida para caracterizar o processo.

4. REDES EXPLORADAS

Neste trabalho, foi investigado o TPP para dois modelos de redes, a árvore de Cayley e a rede regular quadrada. A árvore de Cayley é construída a partir de um ponto inicial P_0 de onde saem $r + 1$ ligações; r é denominado parâmetro de ramificação ($r \geq 2$). Em cada extremidade dessas ligações se encontra um sítio de onde saem r novas ligações, formando assim sucessivas camadas da rede conectada, Fig. 1.

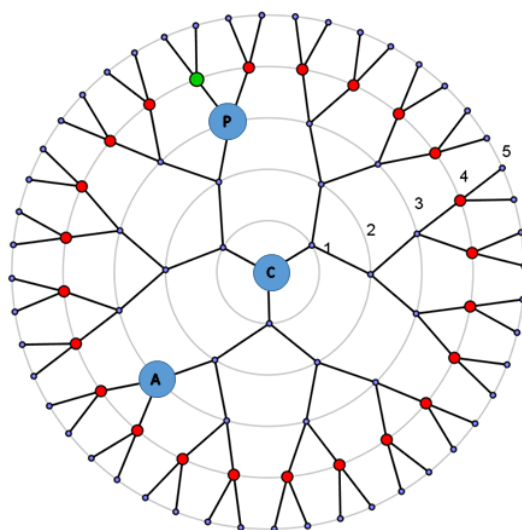


Figura 1- Árvore de Cayley com 5 camadas. Os sítios vermelhos são refletores, o sítio verde é absorvente. Note a posição dos sítios em relação ao sítio absorvente: **P** (próximo), **C** (sítio central) e **A** (muito afastado).

Nesta rede cada sítio se conecta com z vizinhos, $z = r + 1$, que é chamado de número de coordenação. O número total de sítios N_k da rede, em que k representa o número de camadas, é dado por $N_k = \frac{z(z-1)^k - 2}{z-2}$.

Na implementação da rede regular quadrada, considerou-se os quatro primeiros vizinhos de cada nó, conforme ilustra a Fig. 2. Seja L a largura da rede, o número total de sítios é dado por L^2 e o número de ligações é dado por $2L^2 - 4L - 8$.

Nesta rede, todos os nós possuem o mesmo número de vizinhos e a rede é estática, ou seja, a vizinhança não varia ao longo da evolução temporal.

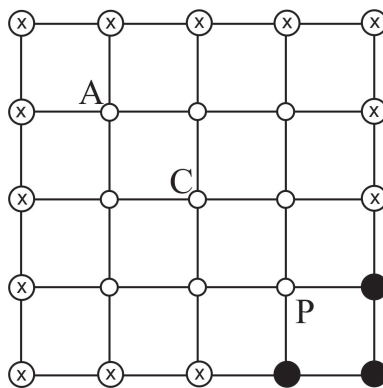


Figura 2- Rede regular quadrada com condições de contorno mistas. Os nós com x representam a condição refletora e os nós totalmente preenchidos representam a condição absorvente. Note a posição dos sítios em relação à fronteira absorvente: **P** (próximo), **C** (região central da rede) e **A** (muito afastado).

5. RESULTADOS

Neste trabalho foram simuladas uma significativa quantidade de caminhadas aleatórias para o cálculo do TPP em ambos os tipos de redes investigadas. A rede quadrada foi implementada com 10.000 sítios, e a árvore de Cayley com 10 camadas. No cálculo do índice de uniformidade, foram feitas as combinações entre os TPP, exceto entre si mesmos.

As Fig. 3 e 4 exibem, respectivamente, as $P(\tau)$ da rede quadrada e da árvore de Cayley, para as três posições distintas investigadas. Em ambos os casos, as $P(\tau)$ seguem um comportamento exponencial.

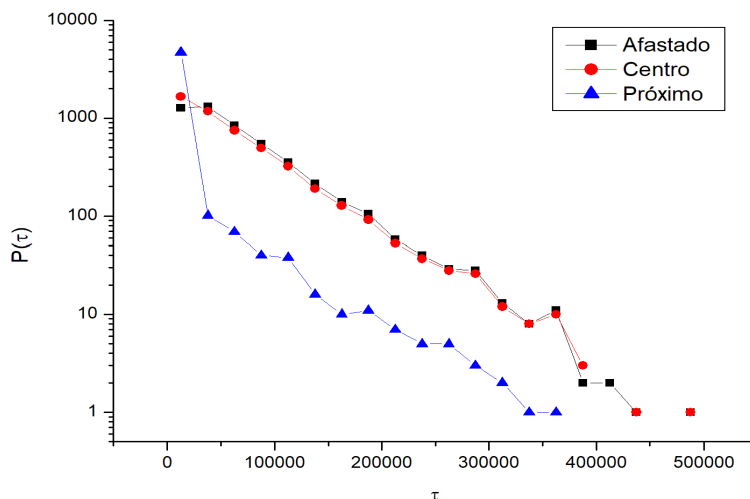


Figura 3- $P(\tau)$ da primeira passagem na rede regular quadrada com condições de contorno mistas. A curva preta refere-se ao caso em que o sítio de partida está muito afastado da fronteira absorvente. A curva vermelha para o sítio de partida que está na região central da rede. A curva azul para o sítio de partida que está próximo à fronteira absorvente.

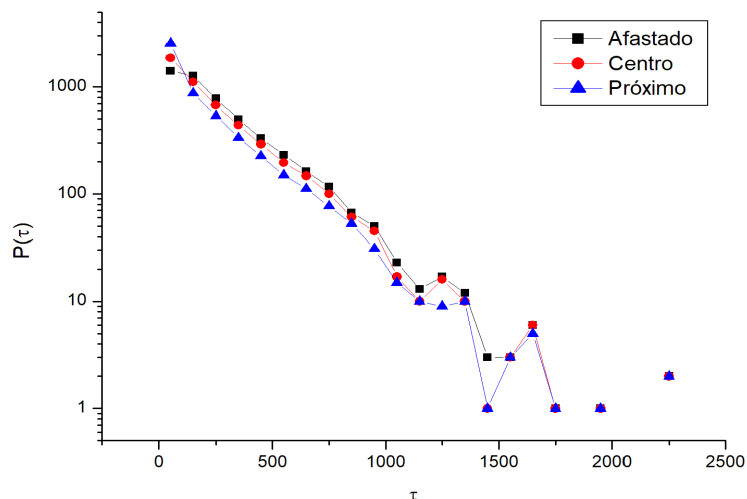


Figura 4- $P(\tau)$ da primeira passagem na árvore de Cayley com condições de contorno mistas. A curva preta refere-se ao caso em que o sítio de partida está muito afastado da fronteira absorvente. A curva vermelha para o sítio de partida que está na região central da rede. A curva azul para o sítio de partida que está próximo à fronteira absorvente.

As Fig. 5 e 6 exibem, respectivamente, as $P(\omega)$ da rede quadrada e da árvore de Cayley, para as três posições distintas investigadas. Em ambos os gráficos, as $P(\omega)$ para um sítio de partida afastado da fronteira absorvente, apresentam um formato de sino. O pico em $\omega = 1/2$, indica uma maior probabilidade de que, duas partículas Brownianas não-interagentes, cheguem com o mesmo tempo a um sítio da fronteira absorvente. Por outro, quando tem-se um mínimo em $\omega = 1/2$, torna-se muito pouco provável que duas partículas cheguem com mesmo tempo aos sítios da fronteira absorvente. Além disso, observa-se uma $P(\omega)$, com um comportamento suave, entre as duas distribuições anteriormente mencionadas. Este comportamento não nos permite qualificar se o TMPP é uma boa medida para o processo.

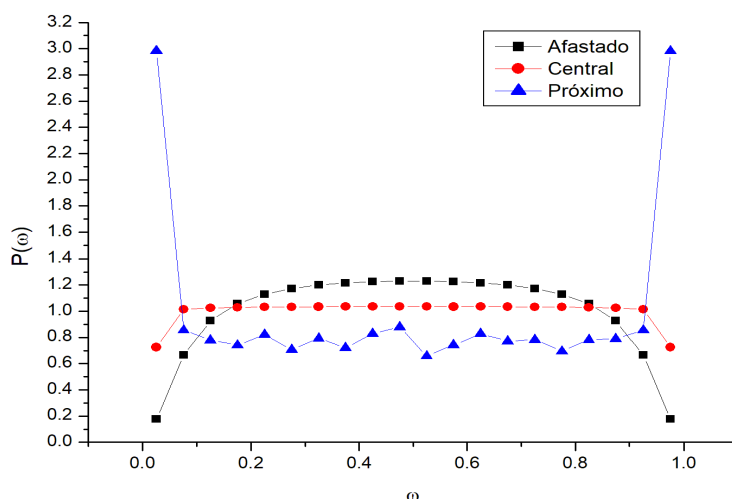


Figura 5- $P(\omega)$ da primeira passagem na rede regular quadrada com condições de contorno mistas. O caminhante aleatório é liberado em três sítios de partida distintos.

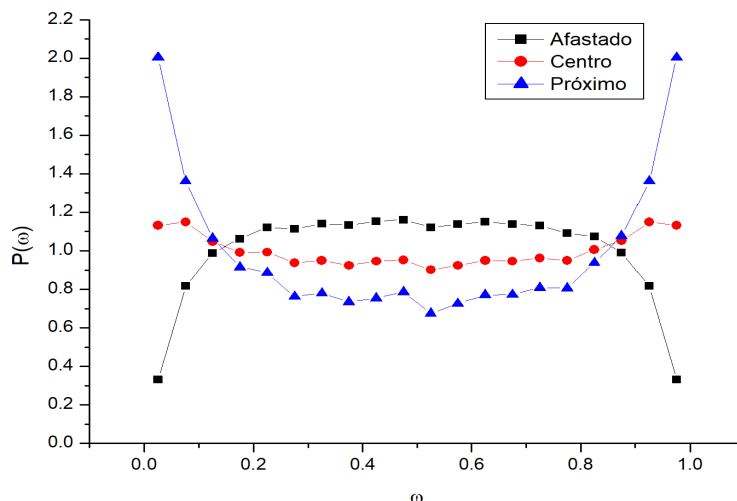


Figura 6- $P(\omega)$ da primeira passagem na árvore de Cayley com condições de contorno mistas, em que o caminhante aleatório é liberado em três sítios de partida distintos.

6. CONCLUSÕES

A análise do TPP de caminhadas aleatórias, em diferentes morfologias de rede, requer o devido cuidado com a posição de partida do caminhante aleatório, pois sua trajetória sofre grande influência da sua posição inicial na rede. O índice de uniformidade é de fundamental importância para a avaliação do TPP em redes de simulação. Essa ferramenta estatística se mostra eficiente para a análise do TMPP para caminhadas aleatórias em redes com alvos fixos, sendo capaz de avaliar o comportamento do processo, para dadas posições de partida e de chegada.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CEFET-MG pelos suportes financeiros.

REFERENCES

- Burkitt, A. N., (2006), A Review of the Integrate-and-fire Neuron Model: I. Homogeneous Synaptic Input. *Biological Cybernetics*, 95, 1-19.
- Mattos, T.G., Mejía-Monasterio, C., Metzler, R. and Oshanin, G. (2011), First Passages in Bounded Domains: When is the Mean First Passage Time Meaningful? *Physical Review E*, 86, 3.
- Metzler, R., Oshanin, G., and Redner, S. (2014), “*First-passage phenomena and their applications*”, 1^o ed., World Scientific Publishing Company, United States.
- Mejía-Monasterio, C., Oshanin, G. and Schehr, G. (2011), First Passages for a Search by a Swarm of Independent Random Searchers. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 6, 6022.
- Ostilli, M., (2012), Cayley Trees and Bethe Lattices: A concise analysis for mathematicians and physicists. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391, 3417-3423.

STUDY OF FIRST PASSAGE TIME IN LATTICE

Abstract. *This work shows a statical study of first passage time to adsorbing boundaries of a Brownian motion in the Cayley tree and square lattice. We analyze when the mean time of first passage (TMPP) is a good measure to characterize the process and the situations in which it*

does not represent it in a concise way. For this, we used the uniformity index, which allows us to evaluate the simultaneity of random walks to a fixed target. We obtain the probability distribution of the index, and we find two characteristic forms of this distribution: bell-shaped form and the U-shaped behavior, respectively, when the starting site is away from the target, and when it is close to the target.

Keywords: *First passage time, Random Walk, Lattice*