



08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

MÉTODOS DE DIFERENÇAS FINITAS APLICADOS AO ESCOAMENTO BIFÁSICO COM GRAVIDADE EM MEIOS POROSOS

Isamara Landim Nunes Araujo¹ - isamara-landim@hotmail.com

Panters Rodríguez Bermúdez¹ - pantersrb@id.uff.br

Yoissell Rodríguez Núñez¹ - yoissellrn@id.uff.br

¹UFF, Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia – Volta Redonda, RJ, Brasil

Resumo. Neste trabalho estuda-se o método de diferenças finitas Lagrangeano-Euleriano, desenvolvido por E.Abreu e J.Sepulveda (Sepulveda (2015), Sepulveda et al. (2013)), e os métodos de diferenças finitas clássicos, Lax-Wendroff e Lax-Friedrichs, que permitem obter soluções numéricas para as leis de conservação hiperbólicas com condições iniciais constantes por partes. Estes métodos, nas suas formas conservativas, foram implementados no Matlab e utilizados para obter a solução numérica da lei de conservação que modela o escoamento vertical de dois fluidos imiscíveis em um meio poroso. Afim de verificar a eficácia destes métodos, a solução analítica entrópica foi obtida através da construção clássica de Oleinik. Para todos os casos os métodos obtiveram soluções numéricas em concordância com as soluções analíticas. Em geral, o problema estudado possui soluções com ondas com velocidades negativas e positivas, onde estas são comumente sequências de ondas de choque característico e ondas de rarefação.

Palavras-Chaves: Leis de Conservação, Diferenças Finitas, Abordagem Lagrangeana-Euleriana, Escoamento Bifásico.

1. INTRODUÇÃO

As leis de conservação são equações que expressam o fato de que alguma entidade física é conservada ou balanceada. O estudo destas é de fundamental importância, uma vez que as leis de conservação são responsáveis pela modelagem de problemas de diversas áreas, como por exemplo, biomecânica, engenharia de petróleo, dinâmica dos fluidos, entre outras. Em geral uma lei de conservação escalar, do tipo estudada neste trabalho, em uma dimensão apresenta a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(x, t)) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) = 0, \quad (1)$$

onde u representa uma quantidade conservada escalar e $f(u)$ corresponde ao fluxo.

Em geral, a equação (1) possui fluxo não linear dificultando assim a obtenção da solução analítica, em alguns casos. Por este motivo os métodos numéricos são utilizados para obter uma solução aproximada, um método muito utilizado é o esquema de diferenças finitas.

A equação (1) normalmente contém soluções com descontinuidades nas suas derivadas ou são descontínuas, como as ondas de choque e ondas de rarefação, estas soluções são chamadas de soluções fracas. Em geral, estas não são únicas para um dado problema, porém somente uma é a fisicamente correta. Portanto, alguns métodos podem fornecer uma solução visualmente plausível, mas fisicamente incompatível com o problema. Por esta razão os métodos conservativos são utilizados, já que estes são capazes de obter a solução entrópica, lidar apropriadamente com a condição de entropia e garantem a conservação das propriedades para a solução discreta (Leveque (1992)).

Para verificar se as soluções numéricas obtidas são entrópicas, estas foram comparadas suas respectivas soluções analíticas entrópicas obtidas pela construção de Oleinik usando a função fluxo (Araujo (2017)).

Tendo como objetivo o estudo das leis de conservação na dinâmica dos fluidos, destacamos o problema do escoamento bifásico em um meio poroso. Neste trabalho, consideramos que o escoamento ocorre em um cilindro vertical de rocha porosa, muito comprido e fino, e que este é totalmente saturado pelos dois fluidos. Consideramos que inicialmente existe uma interface impermeável, em $z = 0$, a qual separa os dois fluidos, veja a figura 1. Analisamos o escoamento somente próximo a esta interface, no instante em que a mesma desaparece devido ao movimento dos fluidos. Isto é equivalente a resolver uma classe de problemas de Riemann para uma lei de conservação escalar unidimensional (Silva (2016), Rodríguez-Bermúdez (2010), Araujo (2017)).

2. ESCOAMENTO BIFÁSICO COM GRAVIDADE EM MEIOS POROSOS

O escoamento de fluidos em meios porosos é modelado por uma lei de conservação hiperbólica, esta equação é deduzida a partir de três equações básicas: a lei de Darcy, que descreve a relação do fluxo com o gradiente de pressão; a equação da continuidade, que descreve a conservação da massa; e a equação de estado que tanto pode ser uma lei de gases como a equação da compressibilidade para o caso de líquidos (Araujo (2017)).

O estudo neste trabalho considera um escoamento bifásico com fase aquosa, com componente água presente, e fase oleosa, com óleo presente nesta fase, onde não há gás dissolvido no óleo.

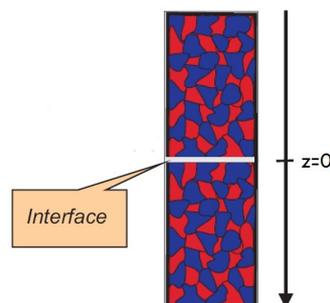


Figura 1- Esquema do escoamento bifásico.

Fonte- Silva (2016)

Considerando que o escoamento estudado é isotérmico, então este é modelado somente por

duas equações: a lei de balanço de massa

$$\nabla \cdot (v_i \rho_i) = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi s_i \rho_i) + \tilde{q}, \quad (2)$$

onde ϕ é a porosidade, ρ_i , s_i , v_i , representam a densidade, a saturação e a velocidade, da fase i respectivamente e \tilde{q} é o termo fonte.

E a lei de Darcy

$$v_i = -K \frac{k_i}{\mu_i} \left(\frac{\partial p_i}{\partial z} - \rho_i g \right), \quad (3)$$

onde K é a permeabilidade absoluta da rocha, k_i , μ_i e p_i representam a permeabilidade relativa, a viscosidade e a pressão, da fase i , respectivamente (Silva (2016)).

Para prosseguir com o desenvolvimento do modelo consideramos as seguintes hipóteses: o escoamento ocorre somente na direção vertical (z), não há termo fonte, o escoamento é isotérmico, a porosidade do meio é constante, o meio é totalmente saturado ($s_w + s_o = 1$), os efeitos de compressibilidade das fases e da rocha e os efeitos de pressão capilar entre as fases são desprezados. E restringimos a análise para o modelo com permeabilidades relativas quadráticas ($k_i = s_i^2$), assim este problema é modelado pela seguinte lei de conservação: (Rodríguez-Bermúdez (2010), Araujo (2017))

$$\frac{\partial s_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(f(s_w)) = 0. \quad (4)$$

Com função fluxo dada por:

$$f(s_w) = \frac{s_w^2}{s_w^2 + \mu(1 - s_w)^2} [v + (1 - s_w)^2 \mu(1 - \rho)], \quad (5)$$

onde s_w representa a saturação da água, $\mu = \mu_w/\mu_o$ e $\rho = \rho_o/\rho_w$. O parâmetro v esta relacionado aos gradientes de pressão.

3. MÉTODOS DE DIFERENÇAS FINITAS

Os métodos de diferenças finitas são métodos utilizados para obter soluções numéricas para equações diferenciais ordinárias e/ou parciais, em particular muito úteis para leis de conservação. Este esquema consiste em aproximar as derivadas da equação por aproximações obtidas através da expansão em série de Taylor, para detalhes ver Leveque (2007).

Para obtermos a solução fisicamente correta, solução entrópica, da lei de conservação o método numérico deve ser conservativo já que estes são capazes de obter a solução entrópica e lidar apropriadamente com a condição de entropia. Um esquema de diferenças finitas conservativo tem a seguinte forma (Kröner (1997))

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} (G(U_j^n, U_{j+1}^n) - G(U_{j-1}^n, U_j^n)). \quad (6)$$

A função G é chamada de fluxo numérico, k é o passo de tempo na malha discreta e h é o passo de espaço na malha discreta.

3.1 Métodos de Diferenças Finitas Clássicos

1. Método Lax-Friedrichs

O esquema Lax-Friedrichs (LF) na sua forma conservativa (6) possui o seguinte fluxo numérico:

$$G(U_{j-1}^n, U_j^n) = \frac{1}{2} (f_{j-1} + f_j) - \frac{1}{2\nu} (U_j^n - U_{j-1}^n), \quad (7)$$

onde

$$\nu = k/h, \quad f_j = f(U_j^n). \quad (8)$$

2. Método Lax-Wendroff

O fluxo deste esquema é dado pela seguinte equação:

$$G(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{1}{2} \left[f_{j+1} + f_j - \frac{1}{\nu} (\lambda_{j+1/2})^2 \Delta_+ U_j \right], \quad (9)$$

onde

$$\Delta_+ U_j = U_{j+1}^n - U_j^n, \quad \lambda_{j+1/2} = \nu \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta_+ U_j}. \quad (10)$$

Vale ressaltar que o esquema Lax-Wendroff produz soluções numéricas que, em geral, não convergem para a solução entrópica fazendo-se necessária a adição de um termo ao esquema, denominado viscosidade não linear, e se obtém o esquema Lax-Wendroff Modificado (M-LW) com função fluxo numérico (9), para detalhes veja Madja et al. (1979).

Para que os métodos clássicos sejam convergentes, eles devem satisfazer a chamada condição CFL, dada pela equação abaixo (Leveque (2007)):

$$\max_j |f'(U_j^n)| \frac{k}{h} \leq 1. \quad (11)$$

3.2 Método Lagrangeano-Euleriano

Apesar dos métodos clássicos serem frequentemente utilizados para resolver as leis de conservação, estes muitas vezes tem dificuldade em obter uma solução numérica boa quando a função fluxo destas leis é descontínua e quando há presença de ondas estacionárias na solução. De modo que, isto motive o desenvolvimento de uma nova classe de métodos conhecidos como “well-balance”, como por exemplo o esquema Lagrangeano-Euleriano (LEH) que apresenta indícios de ser “well-balance” (Sepulveda (2015), Silva et al. (2017)). Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (12)$$

onde $f(u)$ é uma função suave.

O primeiro passo do processo de construção do esquema consiste em escrever a equação diferencial de (12) na forma divergente (Sepulveda (2015))

$$\nabla_{t,x} \begin{bmatrix} u \\ f(u) \end{bmatrix} = 0. \quad (13)$$

Para obter a solução numérica é necessário discretizar o domínio. Dessa forma em um nível de tempo t^n , temos $x_j^n = jh$, $x_{j+1/2}^n = jh + h/2$, na malha uniforme original, onde $h_j^n = \Delta x^n = x_{j+1/2}^n - x_{j-1/2}^n = h$, $j \in \mathbb{Z}$. Para a evolução da solução no tempo, tem-se a malha não-uniforme dada por $h_j^{n+1} = \overline{\Delta x}^{n+1} = \overline{x}_{j+1/2}^{n+1} - \overline{x}_{j-1/2}^{n+1}$ em um nível de tempo t^{n+1} . Aqui x_j^n e \overline{x}_j^{n+1} são os centros das células $[x_{j-1/2}^n, x_{j+1/2}^n]$ e $[\overline{x}_{j-1/2}^{n+1}, \overline{x}_{j+1/2}^{n+1}]$ respectivamente, e a aproximação numérica u nessas células podem ser definidas por

$$U(x_j, t^n) = U_j^n = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}^n}^{x_{j+1/2}^n} u(x, t^n) dx, \quad (14)$$

e

$$\overline{U}_j^{n+1} = \frac{1}{h_j^{n+1}} \int_{\overline{x}_{j-1/2}^{n+1}}^{\overline{x}_{j+1/2}^{n+1}} u(x, t^{n+1}) dx, \quad (15)$$

respectivamente.

Considere os centros celulares do volume finito Lagrangeano-Euleriano

$$D_j^n = \{(t, x) / t^n \leq t \leq t^{n+1}, \sigma_j^n(t) \leq x \leq \sigma_{j+1}^n(t)\} \quad (16)$$

onde $\sigma_j^n(t)$ é uma curva parametrizada tal que $\sigma_j^n(t^n) = x_j^n$ e $\frac{d\sigma_j^n(t)}{dt} = \frac{f(u)}{u}$, e a região D_j^n é chamada de “tubo integral”, veja a figura 2. Fazendo uso do teorema da divergência sobre este volume finito, isto mostra que existe uma conservação local discreta sobre ele.

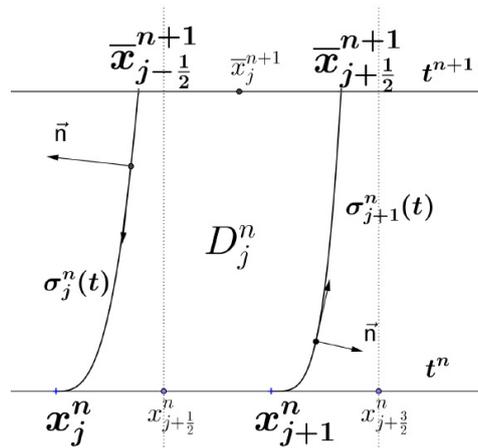


Figura 2- Volume de controle D_j^n (“tubo-integral”) para conservação espaço-tempo na forma discreta.
Fonte- Sepulveda (2015).

A conservação local é dada por:

$$\int_{\overline{x}_{j-1/2}^{n+1}}^{\overline{x}_{j+1/2}^{n+1}} u(x, t^{n+1}) dx = \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} u(x, t^n) dx \quad (17)$$

onde já definimos $\bar{x}_{j-1/2}^{n+1} = \sigma_j^n(t^{n+1})$ e $\bar{x}_{j+1/2}^{n+1} = \sigma_{j+1}^n(t^{n+1})$.

Usando (14), (15) e (17), obtém-se a seguinte aproximação para a malha não uniforme

$$\bar{U}_j^{n+1} = \frac{h}{h_j^{n+1}} \left[\frac{1}{2} U_j^n + \frac{1}{2} U_{j+1}^n \right]. \quad (18)$$

Definindo esta aproximação sobre a malha original tem-se

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{h} \left[c_{0j} \bar{U}_{j-1}^{n+1} + c_{1j} \bar{U}_j^{n+1} \right] \quad (19)$$

onde $c_{0j} = \left(\frac{h}{2} + g_j^n k^n\right)$, $c_{1j} = \left(\frac{h}{2} - g_j^n k^n\right)$ e podemos aproximar $g_j^n \approx f(u_j^n)/u_j^n$.

As equações $\sigma_j^n(t^n) = x_j^n$ e $\frac{d\sigma_j^n(t)}{dt} = \frac{f(u)}{u}$ com a equação (19) formam o bloco básico destes esquemas Lagrangeanos-Eulerianos.

O método Lagrangeano-Euleriano para leis de conservação hiperbólicas é dado pela seguinte formulação numérica

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{4}(U_{j-1}^n + 2U_j^n + U_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}(f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)), \quad (20)$$

e a condição CFL para este esquema é dada por (Sepulveda (2015)):

$$\max_j |f'(U_j^n)| \frac{k}{h} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (21)$$

O esquema (20) pode ser escrito na forma conservativa (6), onde o fluxo numérico é definido por,

$$G(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{1}{4} \left[\frac{h}{k} (U_j^n - U_{j+1}^n) + 2(f(U_{j+1}^n) + f(U_j^n)) \right]. \quad (22)$$

4. CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DE OLEINIK

A construção geométrica de Oleinik permite obter a solução analítica entrópica, através da função fluxo do problema, em todo o domínio. Para um determinado problema de Riemann a construção é feita de modo que se possa conectar os dados iniciais, u_l e u_r , através de envoltórias convexas ou côncavas da função de fluxo, dependendo da relação entre os dados iniciais. Se parte desta envoltória for uma reta tangente ou secante à função fluxo isso representa uma onda de choque, cuja a inclinação da reta é a velocidade da onda. E nos lugares onde a envoltória coincide com a função fluxo, isto representa uma onda de rarefação, onde sua velocidade varia conjuntamente com a derivada da função fluxo nos pontos referentes. Nos casos que existam pontos de junção entre rarefações e choques característicos adjacentes é preciso determinar estes pontos para realizar a construção de Oleinik. O método usual para se determinar estes pontos consiste em calcular o zero da equação (23)

$$\frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} - f'(u^+) = 0, \quad \text{com } u^- \text{ fixo} \quad (23)$$

para choques característicos à direita, ou o zero da equação (24)

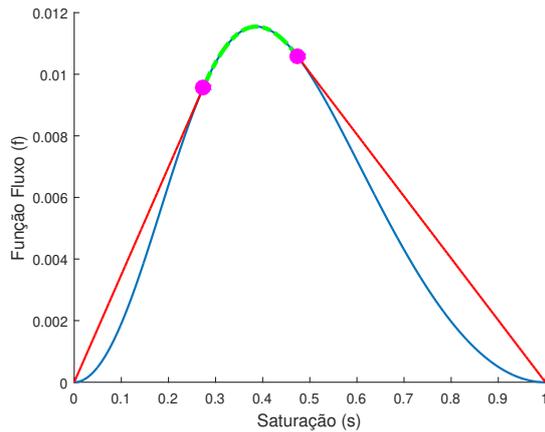
$$\frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} - f'(u^-) = 0, \quad \text{com } u^+ \text{ fixo} \quad (24)$$

para choques característicos à esquerda.

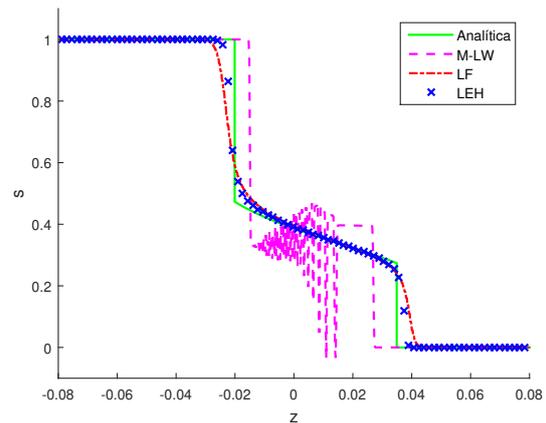
5. RESULTADOS

Os métodos numéricos foram utilizados para resolver a lei de conservação (4) com fluxo (5) e condições iniciais constantes por partes (Problema de Riemann), definidas por:

$$s(z, 0) = \begin{cases} s_l & z \leq 0, \\ s_r & z > 0. \end{cases} \quad (25)$$



(a) Construção de Oleinik.

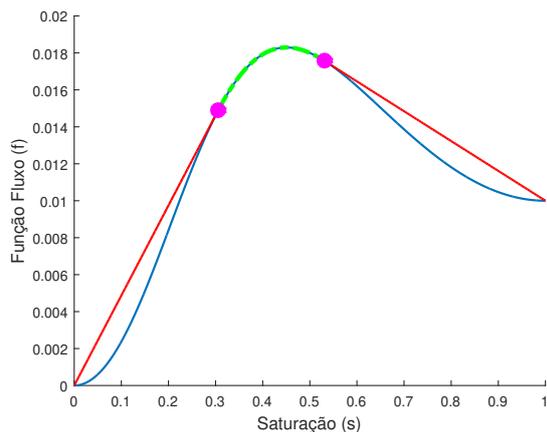


(b) Resultados numéricos.

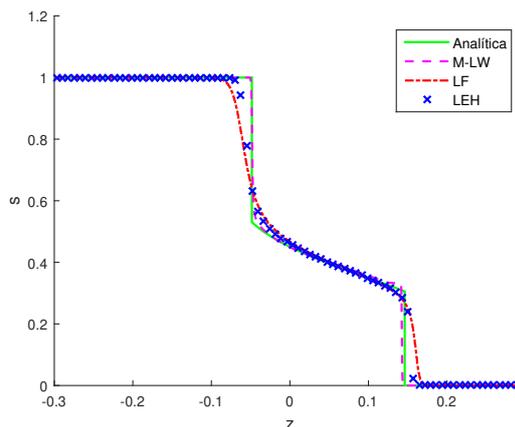
Figura 3- Caso puramente gravitacional, $v = 0$. Dados de Riemann $s_l = 1$, $s_r = 0$. Para este caso têm-se $t = 1$, $CFL = 0.2$, $\mu = 0.25$ e $\rho = 0.8$.

Para este problema a construção de Oleinik, veja a figura 3(a), fornece que há primeiramente a presença de uma onda de choque conectando os estados $s = 1$ e $s = 0.4732$, com velocidade de choque característica -0.0201 , de forma que a onda se desloque 0.0201 à esquerda do ponto $z = 0$ no tempo $t = 1$. Posteriormente há uma onda de rarefação abrangendo os estados $s = 0.4732$ e $s = 0.2740$, com velocidades negativas e positivas, seguida de uma onda de choque com velocidade característica 0.0349 , conectando os estados $s = 0.2740$ e $s = 0$, sofrendo então um deslocamento de 0.0349 à direita do ponto $z = 0$ no tempo $t = 1$.

Nas soluções numéricas obtidas, veja a figura 3(b), percebemos que o método M-LW apresenta muitas oscilações espúrias prejudicando a captação da onda de rarefação. Já o LF e o LEH são um pouco difusivos, e para este caso, perdem um pouco a eficácia na captura dos choques. Mas, percebemos que o LEH é o mais eficiente neste caso.



(a) Construção de Oleinik.

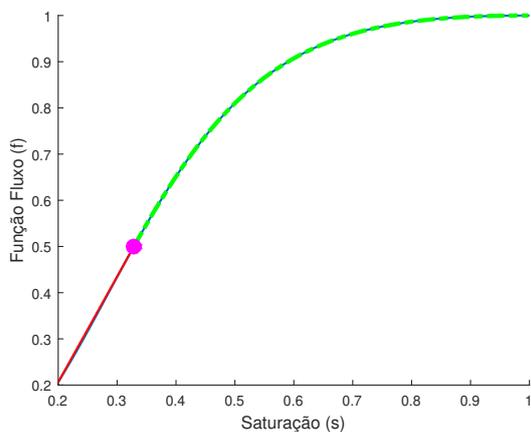


(b) Resultados numéricos.

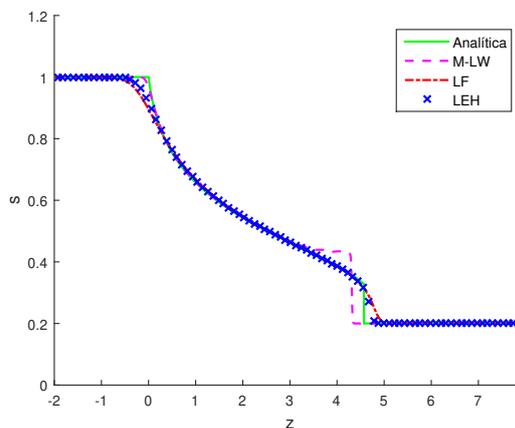
Figura 4- Caso com gravidade dominante, $v = 0.01$. Dados de Riemann $s_l = 1$, $s_r = 0$. Para este caso têm-se $t = 3$, $CFL = 0.14$, $\mu = 0.25$ e $\rho = 0.8$.

De acordo com a construção de Oleinik, veja a figura 4(a), a solução entrópica deve ser uma onda de choque negativa conectando os estados $s = 1$ e $s = 0.5305$, com velocidade característica -0.0161 , e sofrerá um deslocamento de 0.0484 , à esquerda do ponto $z = 0$, no tempo $t = 3$. Depois há uma onda de rarefação abrangendo os estados entre $[0.5305, 0.3057]$, com velocidades negativas e positivas. Em seguida, ocorre uma onda de choque conectando os estados $s = 0.3057$ e $s = 0$, com velocidade característica 0.0487 , se deslocamento 0.1462 à direita do ponto $z = 0$ no tempo $t = 3$.

Os métodos numéricos, veja a figura 4(b), obtiveram aproximações de ótima precisando, se destacando o esquema M-LW.



(a) Construção de Oleinik.



(b) Resultados numéricos.

Figura 5- Caso com gradientes de pressão dominante, $v = 1$. Dados de Riemann $s_l = 1$, $s_r = 0.2$. Para este caso têm-se $t = 2$, $CFL = 0.4$, $\mu = 0.25$ e $\rho = 0.8$.

A solução analítica, veja a figura 5(a), é uma onda de rarefação que engloba todos os estados entre $s = 1$ e $s = 0.3279$, com velocidade positiva, seguida de uma onda de choque conectando os estados $s = 0.3279$ e $s = 0.2$, com velocidade característica 2.2857 , portanto o choque irá se deslocar 4.5714 , à direita do ponto $z = 0$, no tempo $t = 2$.

De acordo com as soluções numérica, veja a figura 5(b), o método M-LW não foi capaz de capturar a parte final da onda de rarefação (próxima ao choque) corretamente, ocasionando dessa forma um erro na captura do choque. Já os demais métodos obtiveram um bom resultado.

6. CONCLUSÕES

Os métodos Lax-Friedrichs e Lagrangeano-Euleriano apresentam um comportamento difusivo, porém o LEH é menos difusivo. Já o método Lax-Wendroff Modificado apresenta um comportamento dispersivo, e devido a este comportamento as soluções podem apresentar oscilações espúrias. Estas oscilações, que aparecem na captura do choque, podem causar erros nas ondas de rarefações que ocorrem antes ou depois do choque, podendo tornar este método menos eficiente do que os demais.

Em termos gerais, para os casos estudados, os métodos utilizados apresentam um desempenho aceitável ou bom nos casos estudados, sendo estes capazes de capturar as ondas de choque e rarefação. O que pode ser comprovado ao se comparar as soluções numéricas com suas respectivas soluções analíticas, obtidas pela construção geométrica de Oleinik.

O método LEH é um método de alta resolução, como se pode verificar nas soluções numéricas obtidas em Sepulveda (2015), Silva (2016), Silva et al. (2017), Sepulveda et al. (2013), e este foi o que obteve soluções numéricas mais próximas das soluções exatas nos casos apresentados.

REFERÊNCIAS

- Araujo, I.L.N. (2017), “*Métodos Numéricos de Diferenças Finitas para Leis de Conservação: Aplicação ao Escoamento Bifásico de Água e Óleo com Gravidade em um Meio Poroso*”, Monografia, UFF, Volta Redonda.
- da Silva, D.S.M., Rodríguez-Bermúdez, P., Lobão, D.C., Alvarez, G.B. (2017), “Um Método do tipo Lagrangeano-Euleriano Aplicado a uma Lei de Balanço Escalar com Fluxo Descontínuo e Termo Fonte de Dirac”, *XXXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, Campinas, vol 5, n.1.
- da Silva, D.S.M. (2016), “*Soluções de Riemann para um Escoamento Bifásico com Fonte de Dirac em um Meio Poroso*”, Tese de Mestrado, MCCT/UFF, Volta Redonda.
- Kröner, D. (1997), “*Numerical Schemes for Conservation Laws*”, Wiley-Teubner Series, Advances in Numerical Mathematics.
- Leveque, R.J. (2007), “*Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*”, SIAM, Philadelphia.
- Leveque, R.J. (2007), “*Numerical Methods for Conservation Laws*”, 2º ed., Birkhauser.
- Madja, A.; Osher, S. (1979), Numerical viscosity and the entropy condition. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 32, 797-838.
- Rodríguez-Bermúdez, P. (2010), “*Buoyancy Driven Three-Phase Flow in Porous Media*”, Tese de Doutorado, IMPA, Rio de Janeiro.
- Sepulveda, J.A.P.; Abreu, E. (2013), “A Lagrangian approximation schemes for balance laws”. *VII Encontro Nacional de Matemática e Aplicações*, Rio de Janeiro.
- Sepulveda, J.A.P. (2015), “*Lagrangian-Eulerian Approximation Methods for Balance Laws and Hyperbolic Conservation Laws*”, Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Mestrado Computacional em Ciência e Tecnologia e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

FINITE DIFFERENCES METHODS APPLIED TO TWO-PHASE FLOW WITH GRAVITY IN POROUS MEDIA

Abstract. *In this work we study the Lagrangean-Eulerian finite difference method, developed by E.Abreu and J.Sepulveda (Sepulveda (2015), Sepulveda et al. (2013)), and the classical finite difference methods, Lax-Wendroff and Lax-Friedrichs, that allow us to obtain numerical solutions to the hyperbolic conservation laws with constant initial conditions in parts. These methods, in their conservative forms, were implemented in Matlab and used to obtain the numerical solution of the conservation law that models the vertical flow of two immiscible fluids in a porous medium. In order to verify the efficacy of these methods, the entropic analytical solution was obtained through the classic Oleinik construct. For all cases the methods obtained numerical solutions in agreement with the analytical solutions. In general, the problem studied has solutions with waves with negative and positive velocities, where these are commonly sequences of characteristic shock waves and waves of rarefaction.*

Keywords: *Conservation Laws, Finite Difference, Lagrangian-Eulerian Approach, Two-Phase Flow.*