

08 a 11 de Outubro de 2018  
Instituto Federal Fluminense  
Búzios - RJ

## UM ESTUDO DO MÉTODO ENXAME DE PARTÍCULAS PARA SE DETERMINAR MÍNIMOS GLOBAIS DE FUNÇÕES NÃO LINEARES

**Andressa Alves Machado da Silva**<sup>1</sup> – andressa\_alves@id.uff.br

**Joviana Sartori de Souza**<sup>1</sup> – jovianasartori@id.uff.br

<sup>1</sup> Universidade Federal Fluminense, Instituto do Noroeste Fluminense de Educação Superior – Santo Antônio de Pádua, RJ, Brasil

**Resumo.** Neste trabalho, apresenta-se o estudo do método de otimização estocástico Enxame de Partículas (PSO) aplicado na minimização de funções não lineares sem restrições. São abordadas hibridizações entre o método estocástico em estudo com métodos de busca direta, com o objetivo de inserir um método de busca padrão na iteração do PSO para realização de uma busca refinada para encontrar o ponto ótimo da função. Os métodos híbridos propostos são: Enxame de Partícula/Busca Coordenada (PSO/BC) e Hibridização Enxame de Partículas/ Hooke Jeeves (PSO/HJ). Os métodos em análise são testados na minimização de funções não lineares já presentes na literatura, com o objetivo de testar o desempenho dos métodos em análise na convergência das funções, na eficiência temporal e no número de iterações necessárias para obtenção do mínimo global da função. Por fim, apresenta-se a análise dos resultados obtidos e compara-se o desempenho do PSO em relação às suas hibridizações (PSO/BC e PSO/HJ), identificando o mais eficiente.

**Palavras-chave:** Minimizadores globais, Busca Coordenada, Hooke Jeeves, Enxame de Partículas.

### 1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho, realiza-se uma análise com o método estocástico Enxame de Partículas (PSO), com o objetivo de propor duas hibridizações entre o PSO e os métodos de Busca Direta: Busca Coordenada (BC) e Hooke Jeeves (HJ). Deste modo realiza-se uma análise comparativa entre o PSO e as hibridizações, tendo como objetivo aumentar a eficiência do Método PSO, uma vez que o algoritmo localiza rapidamente a região do ótimo, mais uma vez que se encontra nesta região, pode enfrentar dificuldades em fazer uma busca mais refinada, com isso os algoritmos de busca direta podem aumentar a eficiência do algoritmo. O foco principal do trabalho é apresentar métodos de otimização para determinação de mínimos globais de funções não lineares, presentes na literatura.

Com os resultados apresentados, será realizada uma comparação, verificando qual metodologia foi mais eficiente na determinação dos pontos ótimos dos problemas propostos. Assim pode-se analisar a influência dos métodos de Busca Coordenada e Hooke Jeeves no desempenho do PSO.

## 2. O MÉTODO PSO

O método de otimização estocástica Enxame de Partículas (PSO) foi desenvolvido por Eberhart e Kennedy (1995), e baseia-se em uma população, o enxame de  $s$  partículas. A cada partícula associa-se um deslocamento, que no contexto heurístico, simboliza o movimento da partícula. A nova posição da  $i$  – ésima partícula no instante  $t + 1$  é representada por:

$$x^i(t+1) = x^i(t) + v^i(t+1) \quad (1)$$

isto é, tal posição é calculada adicionando-se à antiga posição  $x^i(t)$  ao vetor deslocamento  $v^i(t+1)$ .

Seguindo a versão do PSO usada por Vaz e Vicente (2007), para cada partícula  $i$ , os componentes do vetor  $v^i = (v_1^i, \dots, v_n^i)^T \in R^n$  são atualizados pela equação escalar

$$v_j^i(t+1) = \iota(t)v_j^i(t) + \mu(t)\omega_{1j}(t)(y_j^i(t) - x_j^i(t)) + \nu\omega_{2j}(t)(\hat{y}_j(t) - x_j^i(t)), j = 1, \dots, n \quad (2)$$

Sendo  $\iota(t)$  o fator de inércia, os parâmetros  $\mu$  e  $\nu$  números reais positivos chamados de parâmetro cognitivo e parâmetro social, respectivamente. Para todo  $j = 1, \dots, n$ , os números  $\omega_{1j}(t)$  e  $\omega_{2j}(t)$  são números aleatórios gerados de maneira uniforme no intervalo  $(0,1)$ . O valor  $y_j^i(t)$  é o componente  $j$  do vetor posição  $y^i(t)$  ocupado pela partícula com o  $i$ -ésimo melhor valor da função objetivo calculado antes. Finalmente,  $\hat{y}_j(t)$  é o componente  $j$  do vetor posição  $\hat{y}(t)$  ocupado pela partícula que possui o menor valor da função objetivo, dentre as  $s$  partículas.

A posição  $\hat{y}(t)$  pode ser descrita como

$$\hat{y}(t) \in \underset{z \in \{y^1(t), \dots, y^s(t)\}}{\operatorname{argmin}} f(z). \quad (3)$$

A seguir, o algoritmo do método PSO.

---

### Algoritmo 1 – Método Enxame de Partícula.

---

**1** Dados  $\iota(t), \omega_1, \omega_2, n, \epsilon, \mu, \nu$

**2** Gerar aleatoriamente as posições iniciais das partículas do enxame,  $x^1_0, \dots, x^s_0$ , e os vetores descrevendo as velocidades iniciais,  $v^1_0, \dots, v^s_0$ .

**3** for t=0 faça

**4** |  $y^i(t) = x^i_0, \forall i = 1, \dots, s$  e  $\hat{y}(t) \in \underset{z \in \{y^1(t), \dots, y^s(t)\}}{\operatorname{argmin}} f(z)$

**5** fim

**6** enquanto  $(\|\hat{y}(t+1) - \hat{y}(t)\| > \epsilon)$  faça

```
7 | para  $i = 1, 2, \dots, n$   
8 | | Atualizar a velocidade  $v_i(t + 1)$  das partículas com a Eq. 2.  
9 | | Atualizar a posição  $p_i(t + 1)$  das partículas com a Eq. 1.  
10 | fim  
11 | Atualizar  $y^i(t)$  e  $\hat{y}(t + 1)$   
12 fim
```

---

### 3. O MÉTODO DA BUSCA COORDENADA

O método da Busca Coordenada foi um dos primeiros na categoria de busca direta utilizado para resolver problemas de otimização. O método realiza passos nas direções cardeais (oeste, leste, norte e sul). Souza (2010) explica o funcionamento do algoritmo da seguinte forma: se um dos passos realizados nas direções coordenadas produzirem uma queda no valor da função objetivo, o melhor deles é considerado na nova iteração. Se nenhum desses passos produzirem decréscimos, o procedimento é repetido com a metade do tamanho do passo anterior.

A Figura 1 ilustra as cinco primeiras iterações do algoritmo da busca coordenada aplicado em um problema de duas variáveis. O ponto em rosa representa o ponto inicial e a estrela em vermelho o ótimo. No início o tamanho do passo  $\alpha$  possui um dado valor inicial. Infere-se de (b), (c) e (d) que o algoritmo parte do ponto inicial e realiza buscas nas direções coordenadas, se algum dos pontos explorados provocar uma melhora no valor da função objetivo ele substituirá o ponto encontrado anteriormente. No quadro (e) observa-se uma redução do tamanho de  $\alpha$ , isto significa que nenhuma das direções coordenadas produziu melhoria no valor da função objetivo. O algoritmo é finalizado quando o tamanho do passo  $\alpha$  é menor que uma tolerância.

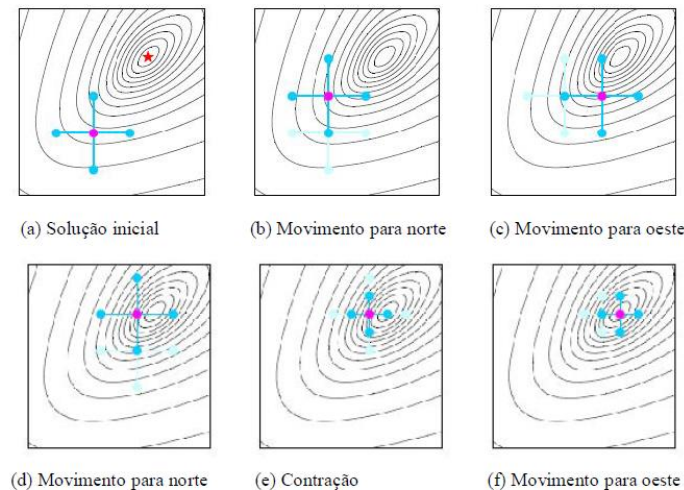


Figura 1- Algoritmo Busca coordenada.

De Diniz- Ehrnhardt et al. (2010), tem-se o algoritmo da Busca coordenada.

---

#### Algoritmo 2 – Busca Coordenada.

---

```

1  Dados  $x^1 \in \Omega \subseteq R^n$ ,  $a_1 > 0$ 
2   $m = 2n$ , onde  $n$  é a dimensão do espaço  $R^n$ .
3  enquanto (Critério de parada não for satisfeito) faça
4      para  $k = 1, 2, \dots, m$  faça
5           $x^* = x^k + \alpha_k \cdot d$ , onde  $d$  são as direções canônicas do espaço  $R^n$ .
6          se  $f(x^*) < f(x^k)$  então
7               $x^{k+1} = x^*$ 
8               $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ 
9              senão
11                  $x^{k+1} = x^k$  e  $\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k}{2}$ 
11             fim
12         fim
13     fim
14      $k \leftarrow k + 1$ .
15 fim
    
```

#### 4. O MÉTODO DE HOOKE JEEVES

Método proposto por Hooke e Jeeves (1961), que realiza dois tipos de busca: exploratória e padrão. O algoritmo tem início com a busca exploratória, que no ponto inicial realiza uma pesquisa em todas as direções de busca selecionando o melhor resultado para função objetivo. Segundo Oliveira e Souza (2016) depois de aplicar a busca exploratória, é realizada a busca padrão também conhecida por progressão ou aceleração avançando da direção indicada até um valor determinado pelo fator de aceleração. Deste ponto o algoritmo retorna à busca exploratória, repetindo os passos até alcançar o próximo ponto.

A Figura 2 ilustra as duas primeiras iterações do método. Bazaraa (2006) propõe que dado o ponto inicial  $x_1$  uma pesquisa exploratória é realizada ao longo das direções coordenadas produzindo o ponto  $x_2$ . Depois uma busca padrão é feita ao longo da direção  $x_2 - x_1$  levando a  $y$ . Outra busca exploratória a partir de  $y$  chega ao ponto  $x_3$ . A próxima busca padrão é realizada ao longo da direção  $x_3 - x_2$  produzindo  $y'$ .

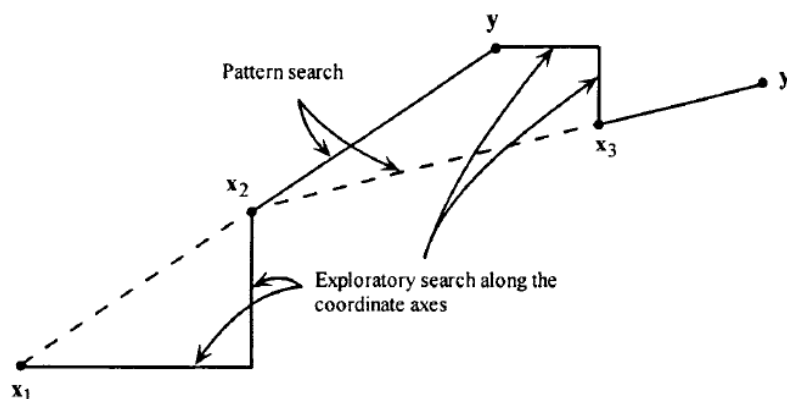


Figura 2- Ilustração dos passos do algoritmo Hooke Jeeves.

De Oliveira e Souza (2006) tem-se o algoritmo de Hooke Jeeves.

---

**Algoritmo 3 – Hooke Jeeves.**

---

1 Defina  $d_1, \dots, d_n$  como as direções coordenadas. Escolher um escalar  $\epsilon > 0$  para determinar a parada do algoritmo. Escolher o tamanho do passo inicial  $\Delta \geq \epsilon$ , e o fator de aceleração  $\alpha > 0$ . Escolha o ponto de partida  $x^1$ , faça  $y^1 = x^1$  e  $k = 1$  e vá ao passo principal.

2 Passo principal:

```

3   enquanto  $\Delta > \epsilon$  faça
4       para  $i = 1, \dots, n$  faça
5           se  $f(y^i + \Delta d_i) < f(y^i)$  então
6               |
6                $y^{i+1} = y^i + \Delta d_i$ ;
7           fim
8           senão
9               se  $f(y^i - \Delta d_i) < f(y^i)$  então
10                  |
10                   $y^{i+1} = y^i - \Delta d_i$ ;
11                  fim
12                  senão
13                      |
13                       $y^{i+1} = y^i$ ;
14                  fim
15              fim
16          fim
17          se  $f(y^{n+1}) < f(x^k)$  então
18              |
18               $x^{k+1} = y^{n+1}$ ;
19               $y^1 = x^{k+1} + \alpha(x^{k+1} - x^k)$ ;
20              senão
21                  |
21                   $\Delta \leftarrow \frac{\Delta}{2}$ ;
22                   $x^{k+1} \leftarrow x^k; y^1 \leftarrow x^k$ ;
23              fim
24          fim
25           $k \leftarrow k + 1$ ;
26      fim
    
```

---

## 5. MÉTODOS HÍBRIDOS DE OTIMIZAÇÃO

A proposta de hibridização apresentada neste trabalho, acrescenta os métodos de busca padrão: Busca Coordenada (BC) e Hooke Jeeves (HJ) ao longo das iterações do Método Enxame de Partículas (PSO).

### 5.1 Enxame de Partículas (PSO)/ Busca Coordenada (BC)

A hibridização Enxame de Partículas/Busca coordenada (PSO/BC) tem por objetivo adicionar o método da busca coordenada ao fim de uma iteração do PSO. São realizados os passos do algoritmo PSO e, ao final da primeira iteração, quando o algoritmo encontra o valor de  $g_{best}$ , a melhor posição ocupada pelo grupo, o método direto se inicia. O algoritmo da busca coordenada usa como chute inicial  $g_{best}$ , ao final do método direto o algoritmo retorna aos passos do PSO analisando a solução encontrada pelo critério de parada. Se o resultado for satisfatório, o algoritmo é finalizado apresentando o ponto ótimo da função. Caso negativo, nova iteração do algoritmo é feita reiniciando os passos listados.

## 5.2 Enxame de Partículas (PSO)/Hooke Jeeves (HJ)

O algoritmo Enxame de Partículas/Hooke Jeeves (PSO/HJ) é um método híbrido que adiciona o método Hooke Jeeves ao final da iteração do PSO. Realizam-se os passos do PSO e no final da primeira iteração quando o algoritmo encontra  $g_{best}$ , a melhor posição ocupada pelo grupo, o método direto tem início. O algoritmo de Hooke Jeeves também usa  $g_{best}$  como chute inicial, realiza a busca exploratória e a busca padrão. Com o término destas buscas, o método retorna para os passos do PSO analisando a solução encontrada pelo critério de parada. Se o resultado for satisfatório, o algoritmo é encerrado encontrando assim o ponto ótimo. Ao contrário, é realizada uma nova iteração do algoritmo reiniciando os passos listados.

## 6. RESULTADOS NUMERICOS

Nessa seção, apresentam-se as funções não lineares testadas, e os resultados obtidos com a metodologia trabalhada. As funções estão presentes em Surjanovic e Bingham (2013). Foram realizados testes com funções de 2 e 10 variáveis. O tempo computacional refere-se ao tempo médio necessário para obtenção dos minimizadores globais, tendo realizado 50 execuções de cada método. Assim a tabela com os resultados numéricos trazem uma aproximação para o valor do mínimo obtido. Para uma melhor comparação, foi utilizado o mesmo gerador de números aleatórios para todos os métodos trabalhados.

### 6.1 Função Rosenbrock

A função Rosenbrock muito conhecida, devido sua forma, como função “banana” ou função vale. Dada pela Eq. (4)

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2] \quad (4)$$

Tem apenas um mínimo global, que se encontra no vale estreito e parabólico. **Mínimo global:**  $f(x) = 0$ , em  $x = (1, \dots, 1)$ . Na forma bidimensional, seu gráfico é representado pela Figura 3. O domínio está contido nos hipercubos  $x_i \in [-5, 5]$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $x_i \in [-10, 10]$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  e  $x_i \in [-100, 100]$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ .

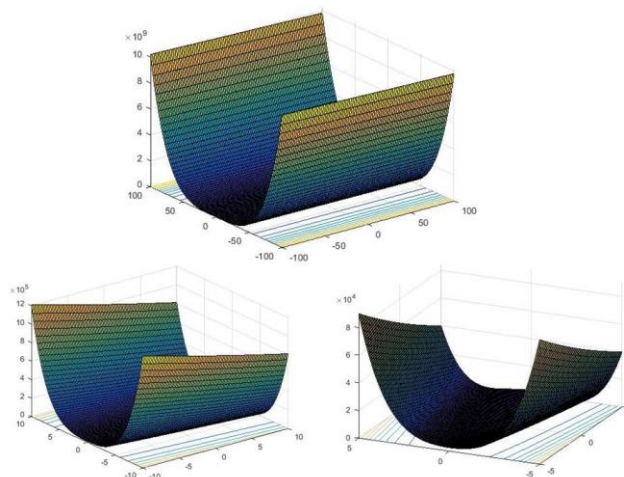


Figura 3 - Representação gráfica da Função Rosenbrock.

## 6.2 Função Levy

A função Levy é dada pela Eq. (5).

$$f_2(x) = \sin^2(\pi w_1) + \sum_{i=1}^{d-1} (w_i - 1)^2 [1 + 10 \sin^2(\pi w_i + 1)] + (w_d - 1)^2 [1 + \sin^2(2\pi w_d)] \quad (5)$$

$$\text{Com,} \quad w_i = 1 + \frac{x_i - 1}{4}, \text{ para } i = 1, \dots, d.$$

**Mínimo global:**  $f(x) = 0$ , em  $x = (1, \dots, 1)$ . Seu gráfico bidimensional é representado abaixo. O domínio está contido nos hipercubos  $x_i \in [-10, 10], \forall i = 1, \dots, n$ ,  $x_i \in [-50, 50], \forall i = 1, \dots, n$  e  $x_i \in [-1000, 1000], \forall i = 1, \dots, n$ .

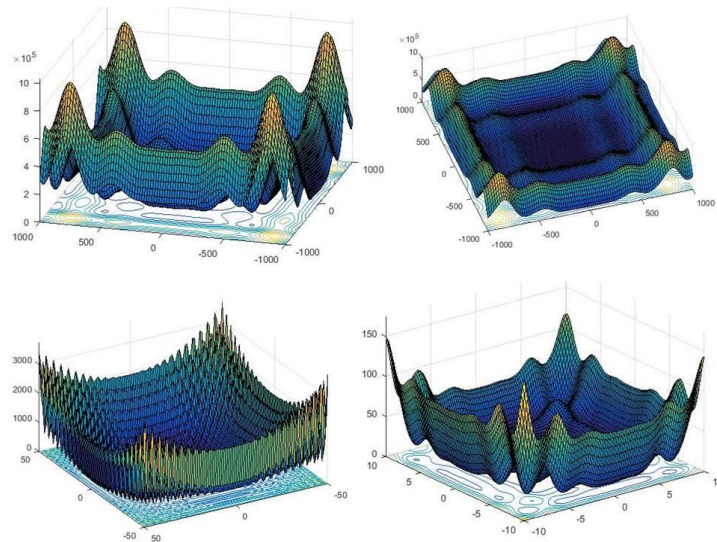


Figura 4 – Representação gráfica da função Levy.

## 6.3 Função Sphere

A função Sphere é descrita pela Eq. (6). A função é contínua, convexa e unimodal.

$$f_3(x) = \sum_{i=1}^d x_i^2 \quad (6)$$

**Mínimo global:**  $f(x) = 0$ , em  $x = (0, \dots, 0)$ . Seu gráfico é dado pela figura 5. Seu domínio é avaliado no hipercubo  $x_i \in [-100, 100], \forall i = 1, \dots, d$ .



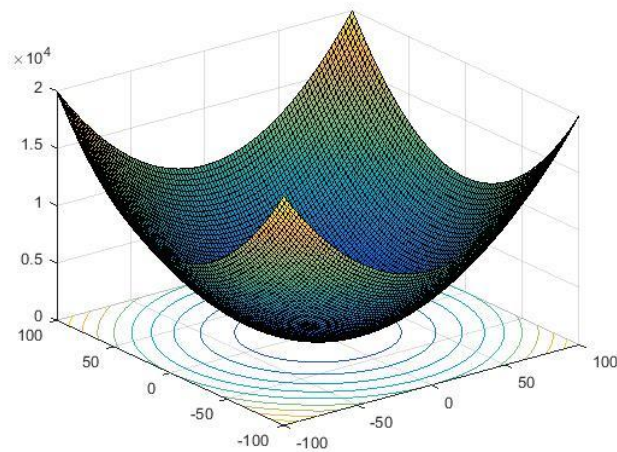


Figura 5 – Representação gráfica da função Sphere.

### 6.4 Função Matyas

A função bidimensional Matyas é representada pela Eq. (7).

$$f_4(x) = 0,26(x_1^2 + x_2^2) - 0,48x_1x_2 \quad (7)$$

**Mínimo global**  $f(x) = 0$  em  $x = (0,0)$ . Seu gráfico é visto na Figura 6.

As regiões do seu domínio são  $x_i \in [-10, 10]$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $x_i \in [-100, 100]$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  e  $x_i \in [-1000, 1000]$ .

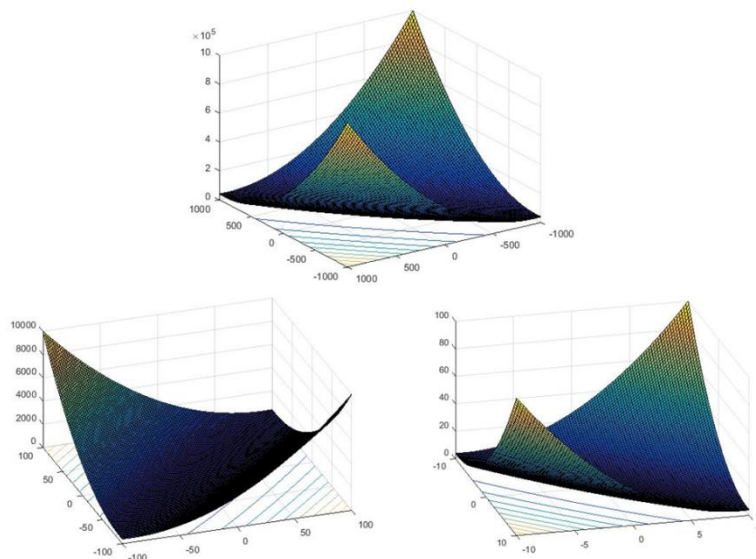


Figura 6 - Representação gráfica da função Matyas.

### 6.5 Função Griewank

A função Griewank é dada pela Eq.(8). Griewank possui muitos mínimos locais distribuídos de forma regular. **Mínimo global:**  $f(x) = 0$ , em  $x = (0, \dots, 0)$ .



$$f_5(x) = \sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{4000} - \prod_{i=1}^d \cos \frac{x_i}{\sqrt{i}} + 1 \quad (8)$$

Seu gráfico bidimensional é visto na Figura 7. O domínio está contido nos hipercubos  $x_i \in [-5, 5], \forall i = 1, \dots, n$ ,  $x_i \in [-10, 10], \forall i = 1, \dots, n$ ,  $x_i \in [-50, 50], \forall i = 1, \dots, n$  e  $x_i \in [-5000, 5000], \forall i = 1, \dots, n$ .

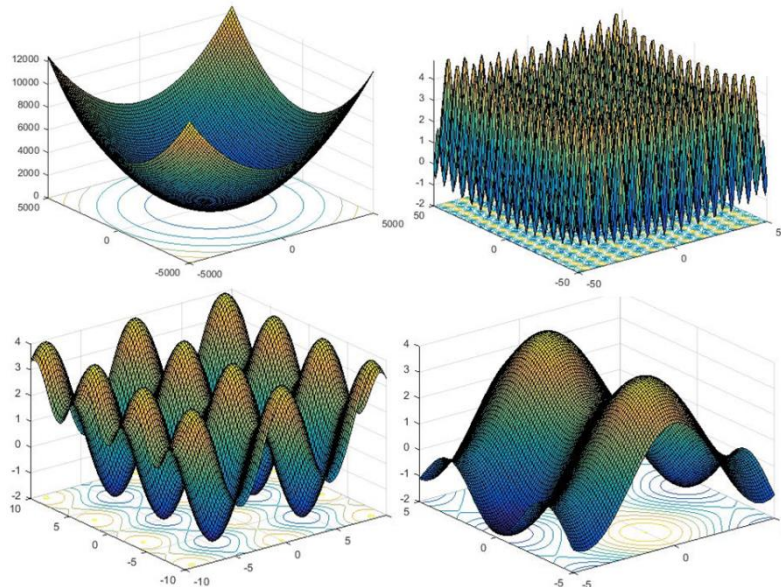


Figura 7 – Representação gráfica da função Griewank.

## 6.6 Tabela de Resultados

Além do tempo médio computacional, foram obtidos a média de iterações necessárias para a convergência dos métodos analisados.

Tabela 1: Resultados do Método PSO e das hibridizações propostas

$f$	PSO		PSO/BC		PSO/HJ	
	Tempo	Iteração	Tempo	Iteração	Tempo	Iteração
$f_1$	2,4213	405	0,8737	118	1,3400	96
$f_2$	2,4296	249	1,5859	62	2,1150	74
$f_3$	0,2836	73	0,1667	35	0,1243	10
$f_4$	0,0198	29	0,0173	19	0,0144	4
$f_5$	0,3395	66	0,0482	6	0,0389	3

## 7. CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi avaliar a eficácia do Método Enxame de Partículas e suas hibridizações na minimização de funções não lineares irrestritas. Realizando uma análise comparativa entre os métodos propostos, para verificar qual se comportou de maneira mais

eficiente na busca pelo ponto ótimo das funções. De modo geral, os algoritmos apresentaram comportamento eficiente para a minimização das funções testadas, todos convergiram para os resultados numéricos corretamente o que comprova o bom desempenho dos métodos analisados. É possível afirmar que as hibridizações encontraram melhores resultados que o método estocástico sozinho, contribuíram para a redução do número de iterações para a convergência das funções. Além disso, em relação a eficiência temporal, é compreensível que os métodos híbridos encontrem o ótimo das funções em um tempo próximo ao PSO, uma vez que realizam os passos do algoritmo PSO e do método inserido a ele. Portanto, conclui-se que as hibridizações propostas são eficientes para a minimização de funções não lineares. Em tese as duas hibridizações encontraram bons resultados mantendo um padrão eficiente de convergência., mas o método híbrido Enxame de Partículas/Hooke Jeeves assumiu melhor comportamento na maioria dos problemas analisados.

## REFERÊNCIAS

- Bazaraa, Mokhtar S. (2006), “Nonlinear Programming: Theory and Algorithms.” 3 ed. Atlanta, Georgia: Wiley Interscience.
- Diniz-Ehrhardt, M. A.; Lopes, V. L. R.; Pedrosa, L. G. 2010, “Métodos sem derivadas para minimização irrestrita.” Notas em Matemática Aplicada, v. 49.
- Eberhart, R., Kennedy, J. (1995), “New optimization using particle swarm theory.” *IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON MICRO MACHINE AND HUMAN SCIENCE, Nagoya, vol. 6, p. 39-43.*
- Hooke, R.; Jeeves. T. A. (1996),” Direct search solution of numerical and statistical problems.” Journal of the Association for Computing Machinery, v. 8. p. 212-229.
- Surjanovic, S.; Bingham, D. (2005), “Virtual Library of Simulation Experiments: Test Functions and Datasets.” Acesso em janeiro 2017, [www.sfu.ca/~ssurjano/optimization.html](http://www.sfu.ca/~ssurjano/optimization.html).
- Oliveira, M.; Souza, J. (2016), “Determinação de minimizadores globais de funções por meio de métodos híbridos com base no método Luus Jaakola . In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional.” Vitoria – ES. Anais do XLVIII SBPO.
- Souza, J. (2010), “Análise global da estabilidade termodinâmica de misturas: um estudo com o método do conjunto gerador”, Tese de doutorado, IPRJ-UERJ, Nova Friburgo.
- Vaz, A. I., Vicente, L. N. 2007, “A particle swarm pattern search method for bound constrained global optimization.” *Journal of Global Optimization*, v. 39, n. 2, p. 197-219.

## A STUDY OF THE PARTICLE SWARM METHOD TO DETERMINE MINIMUM GLOBAL NONLINEAR FUNCTIONS

**Abstract.** *In this work, the study of the stochastic method of Particle Swarm Optimization (PSO) applied in the minimization of nonlinear functions without restrictions is presented. Hybridizations between the stochastic method under study with direct search methods, with the objective of inserting a standard search method in the PSO iteration to perform a refined search to find the optimal point of the function. The proposed hybrid methods are: Particle Swarm Optimization / Coordinate Search (PSO / BC) and Particle Swarm Optimization/ Hooke Jeeves (PSO / HJ). The methods under analysis are tested in the minimization of nonlinear functions already present in the literature, in order to test the performance of the methods under analysis in the convergence of functions, in the temporal efficiency and in the number of iterations necessary to obtain the global minimums of the function. Finally, we present the analysis of the results obtained and compare the performance of the PSO in relation to its hybridizations (PSO / BC and PSO / HJ), identifying the most efficient.*

**Keywords:** *Global Minimizers, Coordinate Search, Hooke Jeeves, Particle Swarm.*