



08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

COMPARAÇÃO ENTRE DUAS ABORDAGENS ANALÍTICAS PARA A MODELAGEM DA DISPERSÃO DE POLUENTES EM UM CORPO HÍDRICO

Bettina Rodrigues Machado¹ - be_rmachado@hotmail.com

Daniela Buske² - danielabuske@gmail.com

Tirzah Moreira Siqueira³ - tirzahmelo@hotmail.com

Guilherme Jahnecke Weymar⁴ - guilhermejahnecke@gmail.com

Renata Klein Moraes⁵ - srtklein@gmail.com

¹Universidade Federal de Pelotas, Centro de Engenharias - Pelotas, RS, Brasil

²Universidade Federal de Pelotas, Departamento de Matemática e Estatística - Pelotas, RS, Brasil

³Universidade Federal de Pelotas, Centro de Engenharias - Pelotas, RS, Brasil

⁴Universidade Federal de Pelotas, Centro de Engenharias - Pelotas, RS, Brasil

⁵Universidade Federal de Pelotas, Engenharia Hídrica - Pelotas, RS, Brasil

Resumo. Os episódios envolvendo o lançamento de efluentes e a degradação dos corpos hídricos vêm sendo recorrentes ao longo da história. Tendo em vista a conservação dos recursos hídricos, faz-se necessária a utilização de ferramentas ambientais que reproduzam os fenômenos de transportes de poluentes, de modo a antever a dispersão do poluente e ter uma reação em um tempo-resposta adequado. Dentre as ferramentas ambientais utilizadas, merece destaque os modelos matemáticos pela praticidade e reprodutibilidade adequada destes fenômenos. O presente estudo tem como objetivo apresentar e comparar soluções utilizando as abordagens analíticas Generalized Integral Laplace Transform Technique (GILTT) e a técnica de separação de variáveis, que modelam o problema da dispersão de poluentes em um corpo hídrico. Para tanto, é considerado um modelo bidimensional, no plano longitudinal e vertical. São apresentadas simulações numéricas, comparando as duas abordagens, com dados experimentais. Com os resultados obtidos é possível observar que as duas abordagens mostram as mesmas características para a dispersão de poluentes em um corpo hídrico e apresentam boa concordância quando comparadas com os dados experimentais.

Palavras-chave: GILTT, Separação de variáveis, Solução analítica, Dispersão de poluentes, Corpo hídrico

1. INTRODUÇÃO

A preocupação do homem com a qualidade dos corpos hídricos é milenar e remonta a épocas em que o sistema sensorial era o único critério de avaliação de qualidade (Tundisi, 2003). Os corpos d'água superficiais constituem parte fundamental do processo de disposição dos resíduos

gerados pelas atividades humanas. A água é um elemento propulsor do desenvolvimento cultural e econômico da sociedade, sendo de grande importância o conhecimento antecipado dos tipos e da magnitude dos danos que o despejo de cargas poluidoras pode causar aos ambientes aquáticos (Eiger, 2003; Tundisi, 2003).

Dentre as principais fontes de poluição das águas estão a falta de saneamento básico, o lançamento de efluentes industriais tratados indevidamente, projetos de irrigação e a exploração dos recursos hídricos para fins energéticos (Barros, 2004). A poluição é caracterizada por ser uma alteração indesejável das características físico-químicas e biológicas de um sistema que cause ou possa causar prejuízo à saúde, sobrevivência ou atividades dos seres humanos e outras espécies ou deteriorar materiais (Braga et al., 2005).

Entender a dinâmica das substâncias no ambiente natural é de suma importância para tomar ações efetivas. Porém, os processos que governam o transporte e a difusão de poluentes são numerosos e de uma complexidade tal que não é possível descrevê-los sem a utilização de modelos matemáticos que resultam, então, em um instrumento técnico indispensável para a gestão ambiental e segurança das pessoas (Ramos et al., 2015).

Neste trabalho é apresentado um modelo matemático bidimensional no plano longitudinal e vertical, utilizando duas abordagens distintas de resolução Generalized Integral Laplace Transform Technique (GILTT) e o método de separação de variáveis. O objetivo principal é apresentar uma solução que expresse a concentração de um determinado poluente em um corpo hídrico e verificar os resultados obtidos pelas duas abordagens e compará-las utilizando um estudo de caso.

2. MODELO

No presente estudo, apresentam-se dois tipos de soluções analíticas (GILTT e separação de variáveis) para um problema bidimensional no plano longitudinal e vertical em regime transiente.

A equação utilizada neste modelo considera as seguintes hipóteses fundamentais (Barros, 2004): o fluxo de massa na direção vertical é muito maior que na direção transversal, ou seja: $\epsilon_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \gg \epsilon_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}$; a superfície e o leito do rio não são dispersivos, ou seja, não há migração do contaminante através destes contornos; o efeito difusivo na direção longitudinal é desprezível quando comparado com o termo advectivo; o lançamento do poluente é contínuo; a área transversal do rio varia gradualmente com a direção longitudinal e a variação de sua altura é desprezível; as substâncias poluidoras são dissolvidas e têm a mesma densidade do fluido receptor e a velocidade de descarga do poluente é considerada desprezível em relação à velocidade longitudinal do rio ou canal.

Aplicando estas hipóteses fundamentais na equação de advecção-difusão, obtém-se a equação bidimensional em regime transiente que descreve matematicamente este problema:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right) - \lambda \bar{c} . \quad (1)$$

A Eq. (1) está sujeita às condições de contorno:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = 0 \quad em \quad z = 0 \quad e \quad z = h , \quad (2)$$

condição de fonte:

$$\bar{c}(0, z, t) = \delta(z - z_s) \quad em \quad x = 0 , \quad (3)$$

e condição inicial:

$$\bar{c} = 0 \quad em \quad t = 0, \quad (4)$$

sendo \bar{c} a concentração média do contaminante ($g.m^{-2}$); \bar{u} representa a velocidade média do escoamento ($m.s^{-1}$) na direção x ; ε_z representa o coeficiente de difusão turbulenta ($m^2.s^{-1}$) na direção z ; λ representa o coeficiente de degradação química do poluente (s^{-1}); h é a profundidade do rio (m); δ corresponde a função delta de Dirac e z_s é a posição da fonte poluidora (m) na direção z .

2.1 Solução pela abordagem GILTT

A Eq. (1) é resolvida utilizando a abordagem GILTT conforme (Moreira et al., 2009). Inicialmente aplica-se a transformada de Laplace na variável temporal, t , e utilizando a condição inicial (4), obtém-se:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_z \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) - \gamma \bar{C}, \quad (5)$$

onde $\bar{C}(x, z, r) = \mathfrak{L}\{\bar{c}(x, z, t); t \rightarrow r\}$ e $\gamma = \lambda + r$. Na sequência aplica-se o método espectral na variável z . Para tanto, expande-se a concentração do poluente da seguinte forma:

$$\bar{C}(x, z, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n(x, r) \psi(z), \quad (6)$$

sendo $\psi(z) = \cos(\beta_n z)$ as autofunções do problema de Sturm-Liouville associado:

$$\begin{aligned} \psi_n''(z) + \beta_n^2 \psi_n(z) &= 0 \quad em \quad 0 < z < h \\ \psi_n'(z) &= 0 \quad em \quad z = 0 \quad e \quad z = h, \end{aligned}$$

onde $\beta_n = \frac{n\pi}{h}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Substituindo a expansão (6) na Eq. (5), utilizando a propriedade de ortogonalidade das autofunções e reescrevendo na forma matricial obtém-se:

$$E'(x, r) + FE(x, r) = 0, \quad (7)$$

onde $E(x, r)$ é um vetor cujas componentes são $\bar{C}_n(x, r)$, a matriz F é definida por $F = A^{-1}B$, e as entradas das matrizes A e B são escritas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} a_{n,m} &= \int_0^h \bar{u} \Psi_n(z) \Psi_m(z) dz, \\ b_{n,m} &= - \int_0^h \varepsilon_z' \Psi_n'(z) \Psi_m(z) dz + \\ &\quad \beta_n^2 \int_0^h \varepsilon_z \Psi_n(z) \Psi_m(z) dz + \gamma \int_0^h \Psi_n(z) \Psi_m(z) dz. \end{aligned} \quad (8)$$

Seguindo o procedimento de Wortmann et al. (2005), obtém-se a seguinte solução para a equação diferencial ordinária (EDO) (7):

$$E(x, r) = G(x, r)M(x)G^{-1}(x, r)E(0, r). \quad (9)$$

onde $G(x, r)$ é a matriz dos autovetores de F , $M(x)$ é a matriz diagonal cujas entradas têm o formato $e^{-d_n x}$, sendo d_n os autovalores de F e $E(0, r)$ é o vetor determinado pela solução do sistema linear resultante da aplicação dos mesmos passos na condição de fonte (3). Portanto, a solução para a concentração dada pela expansão (6) está bem determinada, pois o vetor $\bar{C}(x, r)$ é conhecido.

Após obter a solução para a concentração de poluentes, pode-se aplicar a transformada inversa de Laplace, tendo como resultado a seguinte equação:

$$\bar{c}(x, z, t) = \mathfrak{L}^{-1}\{\bar{C}(x, z, r); r \rightarrow t\} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^h \bar{C}_n(x, r) \psi_n(z) e^{rt} dr. \quad (10)$$

Neste estudo será apresentada uma solução aproximada da integral acima utilizando uma inversão numérica, pelo método da quadratura de Gauss-Legendre (Stroud e Secrest, 1966). Logo, a solução final do problema bidimensional pela abordagem GILTT é dada pela expressão:

$$\bar{c}(x, z, t) = \sum_{k=0}^K \frac{p_k}{t} a_k \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n(x, r) \psi_n(z), \quad (11)$$

onde p_k e a_k são as raízes e pesos, respectivamente, da quadratura Gaussiana.

2.2 Solução pela abordagem de separação de variáveis

A abordagem utiliza o método de separação de variáveis (Özsisik, 1993) e uma transformação de similaridade (Hansen, 1964).

Utiliza-se a equação bidimensional em regime transiente com o coeficiente de difusão turbulenta constante:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \varepsilon_z \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} - \lambda \bar{c}. \quad (12)$$

Para solucionar a Eq. (12) pela abordagem proposta, inicialmente separa-se as variáveis da seguinte forma: $\bar{c}(x, z, t) = f_1(x) f_2(z, t)$, o que leva ao seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\bar{u} \frac{df_1(x)}{dx} = -\lambda f_1(x), \quad (13)$$

$$\frac{\partial f_2(z, t)}{\partial t} = \varepsilon_z \frac{\partial^2 f_2(z, t)}{\partial z^2}. \quad (14)$$

Apresenta-se a solução para a Eq. (14), desta forma, considera-se que:

$$f_2(z, t) = \frac{m}{A_t \sqrt{\varepsilon_z t}} g_2\left(\frac{z}{\sqrt{\varepsilon_z t}}\right), \quad (15)$$

onde m é a massa do poluente injetado no corpo hídrico e A_t é a área da seção transversal. Substituindo a Eq. (15) na Eq. (14) e aplicando a seguinte troca de variável de similaridade:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{z}{\sqrt{\varepsilon_z t}}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_z t}}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{-\rho}{2t}, \end{aligned}$$

obtem-se a seguinte EDO:

$$\frac{d^2 g_2}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \left(g_2 + \rho \frac{dg_2}{d\rho} \right) = 0. \quad (16)$$

A Eq. (16) é facilmente resolvida por redução de ordem. Portanto, a solução para f_2 está bem determinada:

$$f_2(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon_z t}} e^{-\left(\frac{z^2}{4\varepsilon_z t}\right)}. \quad (17)$$

A solução para a Eq. (13) é obtida por fator integrante (Özisik, 1993), a expressão encontrada é:

$$f_1(x) = e^{-\frac{\lambda}{\bar{u}}x}. \quad (18)$$

Desta forma, a concentração final é: $\bar{c}(x, z, t) = B f_1(x) f_2(z, t)$, a constante B é determinada aplicando-se a condição de fonte, assim a concentração $\bar{c}(x, z, t)$ está bem determinada.

3. PARAMETRIZAÇÕES E RESULTADOS

3.1 Parametrizações

Em problemas de dispersão de poluentes, as escolhas das parametrizações turbulentas representam um aspecto importante na modelagem. Pois esses parâmetros contêm todas as informações da física do problema. Assim, apresentam-se as parametrizações escolhidas para o perfil de velocidade e para o coeficiente de difusão turbulenta.

O perfil de velocidade turbulenta utilizado segue aproximadamente o perfil da lei logarítmica dado por Fischer et al. (1979) e :

$$U(Z) = 1 + \frac{u^*}{\bar{u}\kappa} [1 + \ln(Z)], \quad (19)$$

sendo que

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}},$$

sendo u^* a velocidade de atrito ($m.s^{-1}$), \bar{u} a velocidade média do escoamento ($m.s^{-1}$), κ a constante de Von Karman, τ_0 a tensão de cisalhamento no fundo do rio ($Kg.m^{-2}.s^{-1}$) e ρ a densidade do fluido ($Kg.m^{-3}$).

O coeficiente de difusão vertical, já adimensionalizado, utilizado na simulação das duas abordagens pode ser derivado a partir do perfil de velocidade, dado por Fischer et al. (1979):

$$\varepsilon_z(Z) = \frac{\bar{u}\kappa}{u^*} Z(1 - Z), \quad (20)$$

onde \bar{u} é a velocidade média do escoamento ($m.s^{-1}$), κ é a constante de Von Karman e u^* é a velocidade de atrito ($m.s^{-1}$).

A Fig. 1 apresentam os comportamentos dos perfis de velocidade de escoamento e do coeficiente de difusão turbulenta:

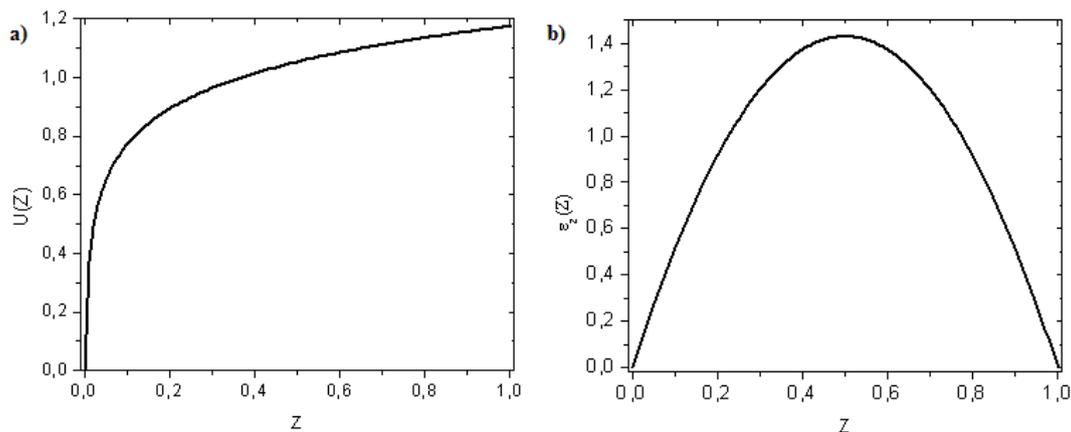


Figura 1- Perfis de a) velocidade turbulenta b) difusividade vertical turbulenta como funções da profundidade.

3.2 Resultados

O experimento utilizado para mostrar o comportamento do modelo apresentado está descrito em (Nokes & McNulty, 1984). Os autores simularam a dispersão de uma solução contendo NaCl em um canal com 15 m de comprimento e profundidade de 0,15 m. O canal possui largura de 0,56 m, velocidade média de 0,55 $m.s^{-1}$, a constante de Von Kármán, κ , é de 0,35 e a velocidade de atrito, u^* é de 0,055 $m.s^{-1}$.

O gráfico apresentado na Fig. 2 mostram os resultados obtidos através das abordagens GILTT e separação de variáveis confrontados com os dados experimentais (Nokes & McNulty, 1984).

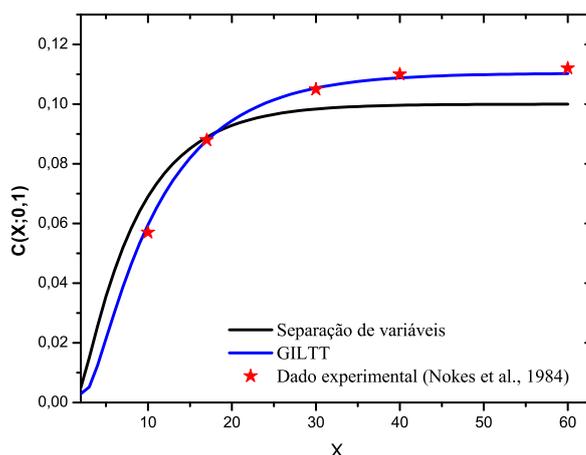


Figura 2- Validação do modelo analítico bidimensional em $Z = 0,1$ comparado com dados experimentais (Nokes & McNulty, 1984).

Através do gráfico percebe-se que há uma boa concordância entre os resultados. Além

disso, verifica-se que os dados da concentração preditos pela abordagem GILTT se aproximam mais dos dados experimentais do que os resultados apresentados pela abordagem de separação de variáveis. Isso pode ser explicado pelo fato de que a abordagem GITT considera as parametrizações da turbulência variáveis, já para a abordagem de separação de variáveis na sua solução as parametrizações são consideradas constantes.

A seguir, é feita a análise estatística (Hanna, 1989) do modelo bidimensional a fim de avaliar o seu desempenho. Os índices estatísticos utilizados são:

Erro quadrático médio normalizado

$$NMSE = \frac{\overline{(C_o - C_p)^2}}{\overline{C_o C_p}},$$

coeficiente de correlação

$$COR = \frac{\overline{(C_o - \overline{C_o})(C_p - \overline{C_p})}}{\sigma_o \sigma_p},$$

fração de inclinação

$$FB = \frac{\overline{C_o} - \overline{C_p}}{0.5(\overline{C_o} + \overline{C_p})}$$

e desvio fracional padrão

$$FS = \frac{\sigma_o - \sigma_p}{0.5(\sigma_o + \sigma_p)},$$

sendo C_o e C_p as concentrações observadas e preditas, respectivamente e σ_o e σ_p os desvios-padrão das concentrações observadas e preditas, nesta ordem.

A Tabela 1 apresenta os valores dos índices estatísticos, obtidos pelas abordagens GILTT e separação de variáveis, para o experimento 1.

Tabela 1- Avaliação estatística do modelo bidimensional utilizando o experimento 1 para as duas abordagens

Modelo	NMSE	COR	FB	FS
GILTT	0,00	0,800	0,00	0,069
Separação de Variáveis	0,01	0,797	0,03	0,539

A partir dos resultados obtidos pelas abordagens, observam-se um NMSE e FB bem próximos de zero (valor ideal), um COR próximo de 0,8 o que mostra uma boa correlação entre os dados observados e preditos. Para o índice estatístico FS a abordagem de separação de variáveis está distante do valor ideal (zero) mostrando que os desvios-padrão dos dados observados e preditos apresentam discrepâncias, que podem ser explicadas pelo fato de que esta abordagem considera as parametrizações constantes, já para a abordagem GILTT o FS está próximo do valor ideal. Com isso, pode-se afirmar que as abordagens simulam satisfatoriamente as concentrações observadas no experimento.

Um aspecto muito importante nos estudos da dispersão de poluentes é ter conhecimento do local onde ocorre a concentração máxima das substâncias poluidoras. Para tal fim, os modelos de dispersão são ótimas ferramentas que preveem essas zonas críticas de poluição.

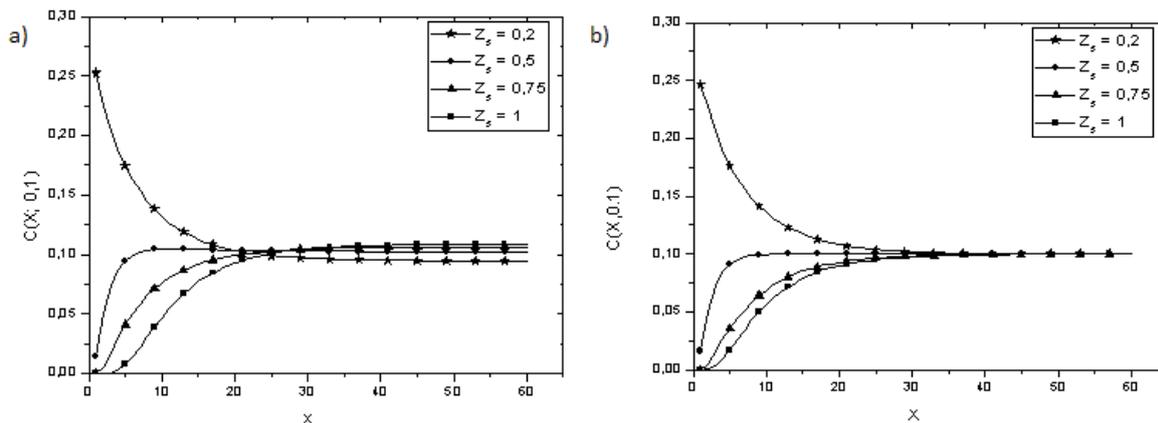


Figura 3- Gráfico da concentração de poluentes C em função da distância X para quatro posições de fonte ($Z_s = 0,2$; $Z_s = 0,5$; $Z_s = 0,75$ e $Z_s = 1$) com as abordagens a) GILTT b) Separação de variáveis.

Desta forma, na Fig. 3 apresentam-se os gráficos da concentração em função da distância X , considerando diferentes alturas de fonte ($Z_s = 0,2$; $Z_s = 0,5$; $Z_s = 0,75$; $Z_s = 1$) para as duas abordagens GILTT e separação de variáveis. Com a comparação dos gráficos (Fig. (3) a) e b)), percebe-se uma boa concordância entre os resultados apresentados nas duas abordagens (GILTT e separação de variáveis). Observa-se uma pequena diferença nas abordagens quando analisam-se as concentrações para distâncias maiores que 30 ($X > 30$), para a abordagem de separação de variáveis todas as alturas de fontes aproximam-se de uma concentração limite de aproximadamente $C \approx 0,10$, já para a abordagem GILTT percebe-se que para cada altura da fonte tem-se uma concentração limite diferente.

Nas duas abordagens, percebe-se que, conforme era esperado, a concentração é maior quando a fonte está localizada na altura $Z_s = 0,2$ porque a concentração está sendo medida próxima da fonte de poluição. Em contrapartida, para as demais alturas de fonte, a concentração é máxima para distâncias mais afastadas. Verifica-se também que para distâncias maiores que $X = 30$ a concentração praticamente não apresenta variações de valores, mostrando que o poluente já está dissolvido no meio.

Na Fig. 4, apresentam-se os gráficos da profundidade em função da concentração para três distâncias ($X = 0,5$; $X = 2$; $X = 10$) considerando a altura de fonte $Z_s = 0,2$.

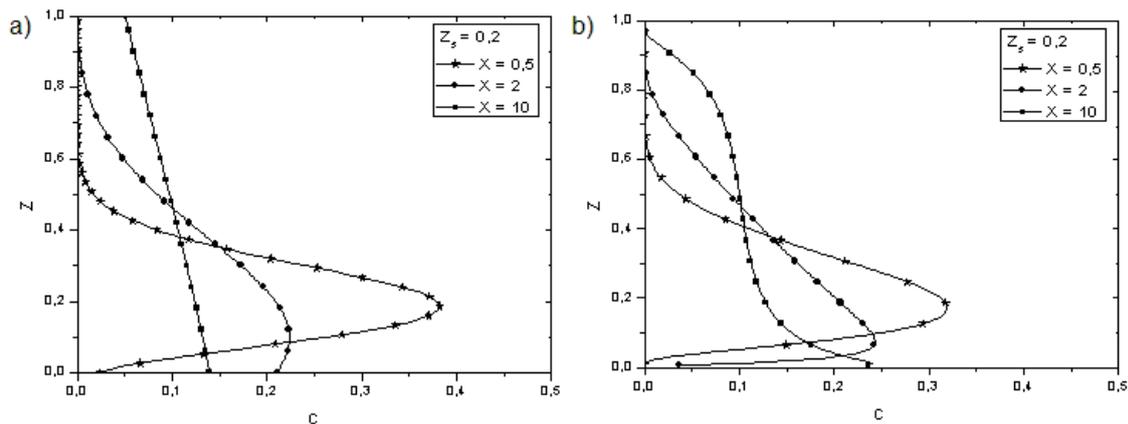


Figura 4- Perfil vertical da concentração de poluentes C para três distâncias ($X = 0,5$; $X = 2$ e $X = 10$) com a posição da fonte em $Z_s = 0,2$ com as abordagens a) GILTT b) Separação de variáveis.

Através dos gráficos observa-se que a concentração alcança o seu valor máximo na altura em que a fonte poluidora está localizada e que a concentração apresenta maiores valores para as distâncias próximas do local de despejo do contaminante. Além disso, verificou-se que para distâncias mais afastadas da fonte o perfil de concentração não apresenta grandes variações para a abordagem GILTT, ou seja, existe uma tendência à obtenção de um perfil homogêneo de concentração. Já para a abordagem de separação de variáveis a concentração ainda possui uma variação, acredita-se que esta explicação seja pelo fato da abordagem de separação de variáveis considerar constante as parametrizações da turbulência.

4. CONCLUSÃO

Neste trabalho foram apresentadas, através das abordagens GILTT e separação de variáveis, duas soluções analíticas para o modelo bidimensional vertical em regime transiente, simulando o processo de dispersão de contaminantes em rios e canais.

Pelos resultados apresentados nos gráficos, observou-se uma boa concordância entre duas abordagens, as características apresentadas pela GILTT e separação de variáveis são muito similares. Pode-se destacar o fato de que as duas abordagens representaram os dados experimentais de uma forma bem coerente, desta forma constatou-se o bom desempenho do modelo utilizando as duas abordagens.

Na comparação entre as duas abordagens, percebe-se uma pequena melhora da abordagem GILTT, acredita-se que esta melhora é devido ao fato de que a abordagem GILTT considera as parametrizações turbulentas variáveis na altura, já a abordagem de separação de variáveis considera constante esses parâmetros.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Rio Grande do Sul (Fapergs) pelo auxílio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Barros, F.P.J. (2004), “*Modelos Multidimensionais para Dispersão de Contaminantes em Rios e Canais: Soluções Híbridas por Transformação Integral*”, Dissertação de Mestrado, PEM/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Braga, B., Hespanhol, I., Conejo, J., Barros, M., Spencer, M., Porto, M., Nucci, P., Juliano, N. and Eiger, S. (2005), “*Introdução a Engenharia Ambiental*”, 2º ed., Pearson Prentice Hall, São Paulo.
- Eiger, S. (2003), “Transporte de poluentes em meios aquáticos: aspectos conceituais e de modelagem matemática”, *Reúso de água*, Santos, 175-232.
- Fischer, H.B., List, J.E., Koh, R.C.Y., Imberger, J. and Brooks, N.H. (1979), “*Mixing in Inland and Coastal Waters*”, Academic Press, London.
- Hanna, S. R. (1989), “Confidence limit for air quality models as estimated by bootstrap and jackknife resampling methods”, *Atmospheric Environment*, vol 23, 1385-1395.
- Hansen, A. G. (1964), “*Similarity Analysis of Boundary Value Problems in Engineerin*”, Prentice-Hall, Canada.
- Moreira, D.M., Vilhena, M.T., Buske, D. and Tirabassi, T., M. (2009), “The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere”, *Atmospheric Research*, vol 92, 1-17.
- Nokes, R.I., McNulty, A.J. and Wood, I.R. (1984), “Turbulent dispersion from a steady two-dimensional horizontal source”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol 149, 147-159.
- Özisik, M. (1993), “*Heat Conduction*”, 2º ed., John Wiley & Sons, New York.
- Ramos, P.A., Freire C.D., Villar, L.B.B.S, Chaves, L.V.C., Alves, N.J.J. and Tavates Neto, H.I.J. (2015), “O uso da modelagem para prever a dispersão de nuvens poluentes na atmosfera”, *Blucher Chemical Engineering Proceedings*, vol 1, nº 2, 9006-9012.
- Siqueira, T.N. (2017), “Emprego de fontes de contaminação de diferentes geometrias nas estimativas do risco à saúde humana devido à ingestão de água subterrânea contaminada”, *Revista Brasileira de Ciências Ambientais*, vol 43, 85-100.
- Tundisi, J.G. (2003), “*Água no século XXI: Enfrentando a escassez.*” 2ª ed, RIMA, São Carlos.
- Wortmann, S., Vilhena, M. T., Moreira, D. and Buske, B. (2005), “A new analytical approach to simulate the pollutant dispersion in the PBL”, *Atmospheric Environment*, vol 39, 2171-2178.

COMPARISON BETWEEN TWO ANALYTICAL APPROACHES FOR THE MODELING OF POLLUTANT DISPERSION IN A WATERBODY

Abstract. Events involving disposal of liquids wastes and water resources degradation has been repeated over the years. Bearing in mind, the conservation of the water resources it's necessary the application of ambiental tools that reproduce the pollutant's phenomenon of transport, in this way is possible anticipate the pollutant dispersion and have a reaction in an adequate time. Among the ambiental tools deserves particular emphasis the mathematical models for practicality and reproducibility of these phenomenon's. These work aim's to present and compare the solutions using the analytical approach of GILTT (Generalized Integral Laplace Transform Technique) and separation of variables, which model the problem of dispersion of contaminants in a waterbody. Therefore, is considered the two-dimensional, in the longitudinal vertical plane model. Numerical simulations are presented comparing the two approaches with experimental data. With the results obtained it is possible to observe that the two approaches show the same characteristics for the dispersion of pollutants in a waterbody and present good agreement when compared with the experimental data.

Keywords: GILTT, Separation of variables, Analytical solution, Pollutant dispersion, Waterbody