



08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

UMA NOVA SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO DE ADVECCÃO-DIFUSÃO TRANSIENTE APLICADA À MODELAGEM DA DISPERSÃO DE POLUENTES ATMOSFÉRICOS

Glênio Aguiar Gonçalves¹ – gleniogoncalves@yahoo.com.br

Daniela Buske¹ – danielabuske@gmail.com

Régis Sperotto de Quadros¹ – quadros99@gmail.com

Camila Fávero¹ – camilafavero@msn.com

¹Universidade Federal de Pelotas, PPG em Modelagem Matemática – Pelotas, RS, Brasil

Resumo. Neste trabalho é apresentada uma solução analítica para a equação de advecção-difusão transiente para simular a dispersão de poluentes na atmosfera. Nesta nova abordagem a equação de advecção-difusão é resolvida usando uma combinação dos métodos de separação de variáveis e GILTT. A principal vantagem é que, desta forma, é evitada a inversão numérica realizada nos trabalhos da literatura usando o método GILTT. Simulações numéricas e comparações estatísticas com dados experimentais da literatura são apresentados para mostrar a boa performance do modelo.

Palavras-Chave: Dispersão atmosférica, Solução analítica, Equação de advecção-difusão transiente, Modelagem da dispersão de poluentes

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos uma grande atenção tem sido dispendida para resolver analiticamente a equação de advecção-difusão com o objetivo de simular a dispersão de poluentes na atmosfera de uma maneira mais realística. Uma grande variedade de soluções apareceu na literatura como resultado destas pesquisas, mas na sua grande maioria, as soluções são para casos muito específicos, considerando coeficientes de difusão simples ou constantes (Moreira et al., 2009).

No início dos anos 2000, surgiu o método GILTT que resolve a equação de advecção-difusão multidimensional dependente do tempo (Moreira et al., 2006, 2009; Buske et al., 2012a, 2012b, 2016), assumindo perfil de vento e coeficientes de difusão variáveis. Para o caso de um problema dependente do tempo, a equação de advecção-difusão é resolvida aplicando a transformada de Laplace na variável temporal e o problema estacionário

resultante é então resolvido pelo método GILTT. A concentração final é obtida por inversão numérica no tempo usando quadratura gaussiana.

Neste trabalho mostramos um avanço em relação aos trabalhos previamente publicados, apresentando uma solução para a equação de advecção-difusão multidimensional dependente do tempo, mitigando a inversão numérica da variável temporal. Tal solução é obtida através de uma combinação dos métodos de separação de variáveis e GILTT. A grande vantagem é que, desta forma, obtêm-se a concentração final de poluentes muito mais rapidamente.

2. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO

A equação tridimensional de advecção-difusão, com fechamento Fickiano da turbulência, que descreve a dispersão de poluentes na atmosfera, é escrita como

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (1)$$

onde $C(t, x, y, z)$ é a função concentração (kg/m^3), K_y é o coeficiente de difusão lateral (m^2/s), $K_z = K_z(z)$ é o coeficiente de difusão vertical (m^2/s), u é a componente da velocidade média do vento na direção x (m/s). A Eq. (1) está sujeita às seguintes condições de contorno, inicial e de fonte:

$$K_z \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0, h \quad (2.a)$$

$$u C(0, x, y, z) = Q(0) \delta(x) \delta(y) \delta(z - H_s) \quad (2.b)$$

$$u C(t, 0, y, z) = Q(t) \delta(y) \delta(z - H_s) \quad (2.c)$$

na qual h (m) é a altura da camada limite, H_s (m) é a altura da fonte e Q (g/m^2) é a intensidade da fonte, respectivamente.

Fazendo a separação de variáveis da equação diferencial do modelo de dispersão tridimensional, inicialmente considerando u e K_y constantes,

$$\frac{d}{dt} T_{\kappa\lambda} = -(\kappa^2 K_y + \lambda) T_{\kappa\lambda} \quad (3.a)$$

$$u \frac{d}{dx} X_{\alpha\lambda} = (\alpha + \lambda) X_{\alpha\lambda} \quad (3.b)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} Y_{\kappa} = -\kappa^2 Y_{\kappa} \quad (3.c)$$

$$\frac{d}{dz} \left(K(z) \frac{d}{dz} Z_{\alpha} \right) = \alpha \frac{d}{dx} Z_{\alpha} \quad (3.d)$$

onde os autovalores são expressos em uma forma conveniente.

A solução da Eq. (3.a) é dada por:

$$T_{\kappa\lambda}(t) = T_{\kappa}(t)T_{\lambda}(t) = e^{-\kappa^2 K_y t} e^{-\lambda t} \quad , \quad (4)$$

a solução da Eq. (3.b) é:

$$X_{\alpha\lambda}(x) = X_{\alpha}(x)X_{\lambda}(x) = e^{\frac{(\alpha+\lambda)x}{u}} = e^{\frac{\alpha x}{u}} e^{\frac{\lambda x}{u}} \quad , \quad (5)$$

e a solução da Eq. (3.c) é:

$$Y_{\kappa}(y) = A(\kappa) \cos(\kappa y) \quad (6)$$

A solução da Eq. (3.d) é obtida pelo método GILTT (Moreira et al., 2009).

Assim, a solução do problema é dada na forma de produto como

$$C_{k\lambda\alpha}(t, x, y, z) = [T_{\kappa}(t)Y_{\kappa}(y)] [T_{\lambda}(t)X_{\lambda}(x)] [X_{\alpha}(x)Z_{\alpha}(z)] \quad (7)$$

Olhando individualmente cada um dos fatores que compõem a Eq. (7), usando as Eq. (4-6), é possível escrever que.

$$\psi_{\kappa}(t, y) = T_{\kappa}(t)Y_{\kappa}(y) = A(\kappa) e^{-\kappa^2 K_y t} \cos(\kappa y) \quad (8)$$

$$\varphi_{\lambda}(t, x) = T_{\lambda}(t)X_{\lambda}(x) = e^{-\lambda t} e^{\frac{\lambda x}{u}} e^{\lambda t} = e^{-\frac{\lambda}{u}(ut-x)} \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K(z) \frac{\partial}{\partial z} \phi_{\alpha}(x, z) \right) = u \frac{\partial}{\partial x} \phi_{\alpha}(x, z) \quad (10)$$

onde $\phi_{\alpha}(x, z) = X_{\alpha}(x)Z_{\alpha}(z)$. Reescrevendo a Eq. (7) utilizando as considerações acima temos:

$$C_{k\lambda\alpha}(t, x, y, z) = \psi_{\kappa}(t, y) \varphi_{\lambda}(t, x) \phi_{\alpha}(x, z) \quad (11)$$

Uma vez que o domínio é infinito em x e y os autovalores são contínuos, e assim a solução para a concentração C é dada por:

$$C(t, x, y, z) = \int_0^{\infty} A(\kappa) \psi_{\kappa}(t, y) d\kappa \int_0^{\infty} B(\lambda) \varphi_{\lambda}(t, x) d\lambda \Omega(x, z) \quad (12)$$

e uma vez que κ (m) e λ (1/s) são contínuos no intervalo $[0, \infty)$, a concentração final é então expressa como

$$C(t, x, y, z) = \psi(t, y) \varphi(t, x) \Omega(x, z) \quad (13)$$

onde

$$\psi(t, y) = \int_0^{\infty} A(\kappa) \psi_{\kappa}(t, y) d\kappa, \quad \varphi(t, x) = \int_0^{\infty} B(\lambda) \varphi_{\lambda}(t, x) d\lambda, \quad \Omega(x, z) = \int_0^{\infty} C(\alpha) \phi_{\alpha}(x, z) d\alpha \quad (14)$$

Para determinar as funções $\psi(t, y)$ e $\varphi(t, x)$ da Eq. (14) usamos as condições inicial e de fonte do problema original. O desenvolvimento para determinar $\psi(t, y)$, $\varphi(t, x)$ é apresentado em (Gonçalves et al., 2018), e as expressões são dadas por:

$$\psi(t, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-K_y \kappa^2 t} \cos(\kappa y) d\kappa = \frac{2}{\sqrt{4\pi K_y t}} e^{-\frac{y^2}{4K_y t}} \quad (15)$$

$$\varphi(t, x) = \int_0^{\infty} L^{-1}\{Q(t), t \rightarrow \lambda\} e^{-\lambda\left(t-\frac{x}{u}\right)} d\lambda = Q\left(t-\frac{x}{u}\right) \quad (16)$$

A obtenção da solução $\Omega(x, z)$ é obtida utilizando o método GILTT e basicamente compreende os seguintes passos: expansão da concentração em uma série de autofunções obtidas de um problema de Sturm-Liouville, substituição na equação de advecção-difusão e tomada de momentos, o que resulta em uma equação diferencial ordinária matricial que é então resolvida analiticamente por transformada de Laplace. Para detalhes veja os trabalhos de Moreira et al. (2006, 2009) e Buske et al. (2012a, 2012b, 2016).

Finalmente, a solução será o produto das Eq. (15), Eq (16) e $\Omega(x, z)$, ou seja,

$$C(t, x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{4\pi K_y t}} e^{-\frac{y^2}{4K_y t}} Q\left(t-\frac{x}{u}\right) \Omega(x, z) . \quad (17)$$

É importante lembrar que a solução usando uma fonte distribuição delta de Dirac é uma solução de Green. Isto significa que conhecendo a solução de Green, podemos encontrar soluções com formas distintas de fontes dependentes do tempo utilizando o princípio da superposição para problemas com operadores lineares. Para uma fonte delta da forma $\delta(t - \tau)$, a solução de Green é escrita como

$$C(t, x, y, z) = \frac{2Mu}{\sqrt{16\pi^2 K_x K_y t^2}} e^{-\frac{y^2}{4K_y t}} e^{-\frac{(u(t-\tau)-x)^2}{4K_x t}} \Omega(x, z) \quad (18)$$

Se considerarmos um problema com uma fonte arbitrária $Q(t)$ emitindo em um intervalo (t_0, t) , a solução para o problema é dada pela integração em τ no intervalo $[t_0, t]$. Num caso particular, a solução para a pluma pode ser construída usando a função de Heaviside como fonte:

$$C(t, x, y, z) = \frac{2uQe^{-\frac{y^2}{4K_y t}}}{\sqrt{16\pi^2 K_x K_y t^2}} \int_0^t e^{-\frac{(u(t-\tau)-x)^2}{4K_x t}} d\tau \Omega(x, z) \quad (19)$$

onde $M = Qd\tau$ é a massa liberada no intervalo t e t_0 é igual a zero. Assim

$$C(t, x, y, z) = \frac{Q e^{-\frac{y^2}{4K_y t}}}{\sqrt{4\pi K_y t}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{ut-x}{4K_x t}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-x}{4K_x t}\right) \right] \Omega(x, z) \quad (20)$$

na qual erf é a função erro. Essa solução mostra a evolução temporal da concentração média de poluentes de uma pluma cuja fonte começa a ser liberada no tempo $t = 0$.

3. PARAMETRIZAÇÃO DA TURBULÊNCIA

Com o objetivo de comparar os resultados obtidos com os da literatura, a parametrização da turbulência escolhida foi a mesma adotada pelos autores Moreira et al. (2006, 2009) e Buske et al. (2012a, 2012b, 2016).

O coeficiente de difusão vertical pode ser formulado em termos dos parâmetros de escala convectivos como (Degrazia et al., 1997):

$$\frac{K_z}{w_* h} = 0.22 \left(\frac{z}{h}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{1/3} \left[1 - \exp\left(-\frac{4z}{h}\right) - 0.0003 \exp\left(\frac{8z}{h}\right) \right] \quad (21)$$

Para os coeficientes de difusão lateral, a formulação dada em Seinfeld and Pandis (1998) foi usada:

$$K_\alpha = 0.1 w_* h \quad (22)$$

onde α representa as direções x e y , respectivamente.

O perfil de vento pode ser descrito como uma lei da potência e expresso como (Panofsky and Dutton, 1988):

$$u_z = u_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \quad (23)$$

onde u_z e u_1 são as velocidades médias do vento horizontal nas alturas z e z_1 , e n é um expoente que é relacionado com a intensidade da turbulência (Irwin, 1979). Para o caso instável aqui estudado, $n=0.1$ foi adotado.

4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

A performance do novo modelo foi avaliada considerando as parametrizações da turbulência propostas na seção 3, o conjunto de dados do experimento difusivo de Copenhagen (Gryning and Lyck, 1984) e a integração lateral da Eq. (26) uma vez que os dados experimentais possuem concentrações integradas para o poluente.

No experimento de Copenhagen, o traçador SF_6 foi liberado sem empuxo de uma torre 115 m de altura e coletado ao nível do solo em unidades de amostragem localizadas em três

arcos perpendiculares ao vento médio, posicionadas de 2-6 km do ponto de liberação. As liberações de SF₆ começaram uma hora antes do início da amostragem e o tempo médio das medidas foi de uma hora, com imprecisão de 10%. O local era principalmente residencial com um comprimento de rugosidade de 0.6 m.

Para analisar o problema dependente do tempo, neste trabalho foram utilizados dados com uma resolução temporal maior como sugerido por Tirabassi e Rizza (1997). Em particular, foram utilizadas medidas médias de 20 min das concentrações e valores médios de 10 min para os dados meteorológicos. Nas Tabelas 1, 2 e 3 são apresentadas a velocidade de fricção u_* , o comprimento de Monin-Obukhov L e a altura da camada limite h , respectivamente, usados nas simulações. Para calcular w_* , a relação $w_*/u_* = (-h/kL)^{1/3}$ foi usada, na qual k é a constante de von-Kármán. Como na literatura não constam os dados de 10 em 10 min de u_* e L para o experimento 6, este foi desconsiderado.

Tabela 1 - Velocidade de fricção u_* (m/s) para diferentes passos de tempo nos experimentos de Copenhagen. Todos os passos correspondem a 10 min.

Experimento Passo de tempo	1	2	3	4	5	7	8	9
1	.36	.68	.46	.56	.58	.48	.65	.72
2	.37	.67	.45	.51	.52	.48	.79	.73
3	.40	.81	.47	.37	.51	.57	.67	.60
4	.43	.68	.39	.44	.58	.62	.67	.59
5	.35	.75	.39	.48	.59	.53	.68	.65
6	.34	.74	.40	.48	.52	.65	.65	.71
7	.42	.76	.40	.39	.52	.63	.68	.73
8	.43	.82	.41	.40	.45	.65	.67	.73
9	.40	.76	.31	.39	.44	.66	.73	.73
10	.37	.73	.34	.39	.44	.62	.73	.66
11	.35	.69	.39	.39	.44	.52	.75	.67
12	.36	.66	.40	.39	.43	.62	.69	.74

Na Fig. 1 é mostrado o diagrama de espalhamento dos dados observados experimentalmente (C_o) comparados com os preditos (C_p) pelo novo modelo, para o caso de concentrações integradas do poluente ao nível do solo. As linhas pontilhadas indicam que os dados estão entre um fator de dois. A figura mostra que uma concordância razoável é encontrada entre os dados experimentais e os obtidos pela nova metodologia.

As Tab. 4 e 5 apresentam a concentração ao nível do solo, integrada lateralmente, para os três períodos de 20 minutos da segunda hora de medidas do poluente no experimento de Copenhagen. O presente modelo é comparado com os resultados apresentados em Buske et al. (2016), obtidos pelo método GILTT. O método GILTT resolve o problema aplicando a técnica da transformada de Laplace na variável temporal, e a equação estacionária resultante é resolvida analiticamente por transformada integral. A concentração final é obtida por uma inversão numérica no tempo. Os índices estatísticos clássicos (Hanna, 1989) na Tabela 5 mostram que os modelos simulam satisfatoriamente as concentrações observadas no experimento, uma vez que os valores dos índices $nmse$ (erro quadrático médio normalizado), fb (fração de inclinação) e fs (desvio fractional padrão) são relativamente próximos a zero e os valores dos índices cor (coeficiente de correlação) e $fa2$ (fator de dois) relativamente próximos a 1. A Tabela 5 também permite afirmar que o novo modelo e os resultados obtidos previamente pela GILTT são muito similares.

Tabela 2 – Comprimento de Monin-Obukhov L (m) para diferentes passos de tempo nos experimentos de Copenhagen. Todos os passos correspondem a 10 min.

Experimento Passo de tempo	1	2	3	4	5	7	8	9
1	-26	-178	-152	-75	-492	-71	-71	-793
2	-23	-227	-194	-42	-215	-80	-85	-471
3	-83	-311	-106	-23	-368	-64	-47	-202
4	-42	-160	-101	-32	-735	-111	-49	-366
5	-36	-203	-129	-71	-366	-177	-45	-633
6	-42	-286	-70	-80	-273	-67	-63	-13588
7	-47	-155	-83	-83	-273	-87	-41	-593
8	-38	-228	-60	-101	-262	-71	-47	-471
9	-83	-184	-106	-129	-395	-56	-70	-389
10	-21	-389	-42	-129	-395	-111	-64	-375
11	-32	-133	-101	-129	-395	-215	-52	-262
12	-29	-375	-70	-129	-759	-123	-39	-252

Tabela 3 – Altura da camada limite para os diferentes experimentos de Copenhagen.

Expt.	1	2	3	4	5	7	8	9
h (m)	1980	1920	1120	390	820	1850	810	2090

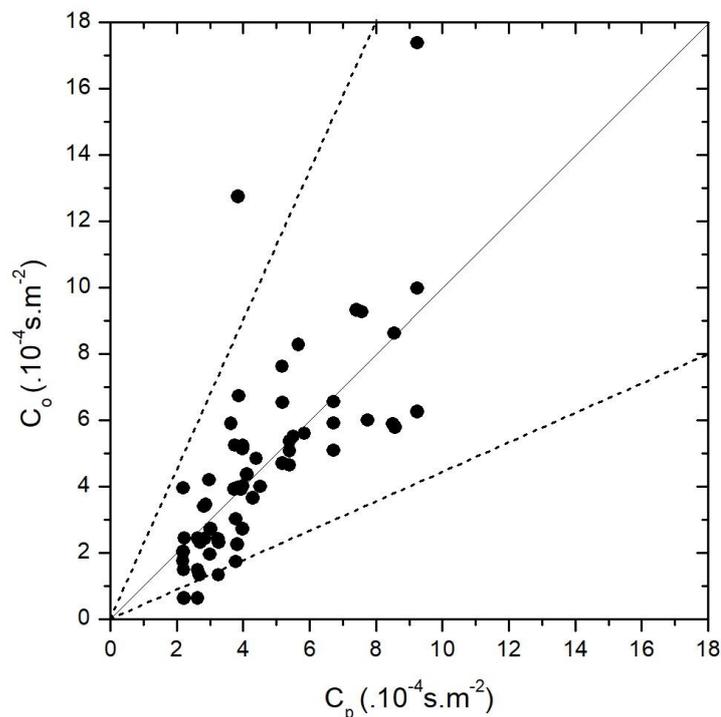


Figura 1 – Diagrama de espalhamento dos dados observados (C_o) das concentrações integradas do poluente ao nível do solo, comparados com os preditos (C_p) pelo novo modelo, usando dados do experiment de Copenhagen.

Tabela 4 – Concentrações integradas lateralmente ao nível do solo, para os três períodos de 20 minutos da segunda hora de medidas do poluente do experiment de Copenhagen. C_o representa a concentração observada experimentalmente, C_{p1} a concentração predita pelo presente modelo e C_{p2} a concentração obtida pelo método GILTT (Buske et al., 2016). As concentrações são normalizadas pela taxa de emissão.

Expt	Distance	Periodo I			Periodo II			Periodo III		
		C_o	C_{p1} - present	C_{p2} - GILTT	C_o	C_{p1} - present	C_{p2} - GILTT	C_o	C_{p1} - present	C_{p2} - GILTT
1	1900	5.60	5.84	7.73	8.27	5.66	7.66	5.51	5.50	7.59
	3700	1.74	3.77	4.29	2.25	3.82	4.37	3.02	3.78	4.38
2	2100	4.36	4.10	5.12	3.97	3.97	5.04	6.73	3.87	5.00
	4200	2.72	3.02	3.44	1.96	3.00	3.41	4.20	2.97	3.37
3	1900	6.00	7.74	9.05	9.26	7.57	8.96	9.32	7.41	8.87
	3700	4.70	5.19	5.59	6.53	5.18	5.64	7.62	5.17	5.64
	5400	3.93	3.93	4.07	5.24	3.98	4.17	4.01	3.98	4.21
4	4000	6.26	9.24	9.44	9.97	9.24	9.48	17.37	9.24	9.48
5	2100	5.78	8.57	9.48	8.62	8.54	9.38	5.89	8.50	9.27
	4200	5.09	6.72	7.35	6.55	6.72	7.39	5.91	6.72	7.37
	6100	5.07	5.39	5.64	5.37	5.39	5.78	4.65	5.39	5.82
7	2000	2.72	3.98	5.16	12.74	3.85	5.09	5.25	3.74	5.03
	4100	2.31	2.71	3.08	1.34	2.68	3.06	2.42	2.64	3.03
	5300	2.45	2.23	2.46	0.64	2.22	2.46	1.49	2.20	2.45
8	1900	4.00	4.51	5.16	4.84	4.39	5.12	3.65	4.29	5.07
	3600	2.31	3.27	3.47	1.34	3.25	3.45	2.42	3.24	3.43
	5300	2.45	2.63	2.72	0.64	2.63	2.72	1.49	2.62	2.71
9	2100	3.98	3.86	4.90	3.93	3.73	4.83	5.90	3.63	4.77
	4200	3.46	2.88	3.29	2.44	2.84	3.26	3.40	2.81	3.22
	6000	3.96	2.19	2.46	2.04	2.19	2.46	1.76	2.18	2.44

Table 5 – Comparação estatística entre modelos, considerando períodos de 20 min para a concentração de poluentes.

modelo	<i>nmse</i>	<i>cor</i>	<i>fa2</i>	<i>fb</i>	<i>fs</i>
Presente	0.20	0.73	0.92	0.03	0.38
GILTT	0.17	0.75	0.90	-0.10	0.28

A grande vantagem aqui é a não necessidade de realizar a inversão numérica no tempo, realizada nos trabalhos anteriores, o que nos permite obter o resultado final mais rapidamente (aproximadamente uma ordem de magnitude).

5. CONCLUSÕES

Se inicia a análise final do método proposto, reforçando que a solução apresentada é analítica, no sentido de que nenhuma aproximação é feita ao longo da derivação exceto pelo erro de truncamento. A concentração pode ser obtida a qualquer tempo devido ao caráter analítico da solução e como consequência, esta metodologia demanda um pequeno esforço computacional. A consistência é mostrada por comparação com dados experimentais

integrados lateralmente e os bons resultados encontrados, do ponto de vista estatístico, precisam ser enfatizados. Além disso, o caráter analítico e a simplicidade da solução, reforçam que o método proposto é um método robusto e promissor para simular a dispersão de poluentes na atmosfera. O foco dos trabalhos futuros será em estender a investigação para simular concentrações tridimensionais, bem como investigar outros cenários de interesse da área.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES e ao CNPq pelo financiamento parcial do desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Buske, D., Vilhena, M.T., Bodmann, B. and Tirabassi, T. (2012a), Analytical Model for Air Pollution in the Atmospheric Boundary Layer. *Air Pollution - Book 1*, InTechOpen, 39-58.
- Buske, D., Vilhena, M.T., Tirabassi, T. and Bodmann, B. (2012b), Air pollution steady-state advection-diffusion equation: the general three-dimensional solution. *Journal of Environmental Protection*, 3., 1124–1134.
- Buske, D., Vilhena, M.T. and Moreira, D.M. (2016), *Solução GILTT Bidimensional em Geometria Cartesiana: Simulação da Dispersão de Poluentes na Atmosfera*. Saarbrücken: Novas Edições Acadêmicas.
- Degrazia, G.A., Campos Velho, H.F. and Carvalho, J.C. (1997), Nonlocal exchange coefficients for the convective boundary layer derived from spectral properties. *Contributions to Atmospheric Physics*, 70(1), 57-64.
- Gonçalves, G.A., Buske, D., Quadros, R.S. and Weymar, G.J. (2018), A new approach to solve the time-dependent three-dimensional advection-diffusion equation applied to model air pollution dispersion in the planetary boundary layer, *International Journal of Development Research*, 8 (5), 20535-20543.
- Gryning, S.E. and Lyck, E. (1984), Atmospheric dispersion from elevated source in an urban area: comparison between tracer experiments and model calculations. *Journal of climate Applied Meteorology*, 23, 651-654.
- Hanna, S.R. (1989), Confidence limit for air quality models as estimated by bootstrap and jackknife resampling methods. *Atmospheric Environment*, 23, 1385-1395.
- Irwin, J.S. (1979), A theoretical variation of the wind profile power-law exponent as a function of surface roughness and stability. *Atmospheric Environment*, 13, 191-194.
- Moreira, D.M., Vilhena, M.T., Buske, D. and Tirabassi, T. (2006), The GILTT solution of the advection-diffusion equation for an inhomogeneous and nonstationary PBL. *Atmospheric Environment*, 40, 3186–3194.
- Moreira, D.M., Vilhena, M. T., Buske, D. and Tirabassi, T. (2009), The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere. *Atmospheric Research*, 92, 1–17.
- Panofsky, H.A. and Dutton, J.A. (1988), *Atmospheric Turbulence*. John Wiley & Sons, New York.
- Seinfeld, J.H. and Pandis, S.N. (1998), *Atmospheric chemistry and physics of air pollution*. John Wiley & Sons, New York.
- Tirabassi, T. and Rizza, U. (1997), Boundary layer parameterization for a non-Gaussian puff model. *Journal of Applied Meteorology*, 36, 1031-1037.

A NEW APPROACH TO SOLVE THE TIME-DEPENDENT ADVECTION-DIFFUSION EQUATION APPLIED TO MODEL ATMOSPHERIC AIR POLLUTION DISPERSION

Abstract. *In this work an analytical solution for the time-dependent advection-diffusion equation to simulate the pollutant dispersion in atmosphere is presented. In this new approach the advection-diffusion equation is solved using a combination of the separation of variables and GILTT methods. The great advantage is that, by this way, the numerical*

inversion done in the previous works in literature using the GILTT method is avoid. Numerical simulations and statistical comparison with experimental data available in the literature are presented showing the good performance of the model.

Keywords: *Atmospheric dispersion, Analytical solution, Time-dependent advection-diffusion equation, Air pollution modeling.*