

08 a 11 de Outubro de 2018  
Instituto Federal Fluminense  
Búzios - RJ

## COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS E O MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS EM UM PROBLEMA DE DIFUSÃO BIDIMENSIONAL

**Bruno Henrique Marques Margotto**<sup>1</sup> – brunohmmargotto@gmail.com  
**Carlos Eduardo Polatschek Kopperschmidt**<sup>1</sup> – cadupolkop@gmail.com  
**Wellington Betencurte da Silva**<sup>2</sup> – wellingtonufes@gmail.com  
**Júlio Dutra**<sup>2</sup> – julioSDutra@yahoo.com.br  
**Luiz Alberto da Silva Abreu**<sup>3</sup> – luiz.abreu@iprj.uerj.br

<sup>1</sup> Universidade Federal do Espírito Santo – Vitória, ES, Brazil

<sup>2</sup> Programa de Pós-graduação em Engenharia Química, UFES – Alegre, ES, Brasil

<sup>3</sup> Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico – Nova Friburgo, RJ, Brazil

**Resumo.** Neste artigo é resolvido um problema de difusão de calor bidimensional em uma geometria quadrangular com duas superfícies adiabáticas e duas apresentando fluxo de calor por convecção, de modo a apresentar transferência de calor linear no domínio de estudo, a partir dos métodos numéricos Volumes Finitos e Soluções Fundamentais, sendo o segundo utilizando pontos-fonte dentro do domínio, se assemelhando ao Método dos Nós de Contorno. Os dois métodos foram eficazes na determinação do perfil de temperatura no domínio. O Método das Soluções Fundamentais apresentou melhores resultados em relação à precisão e a velocidade em todos os casos estudados.

**Palavras-chave:** Métodos Numéricos, Volumes Finitos, Soluções Fundamentais, Nós de Contorno, Difusão

### 1. INTRODUÇÃO

A compreensão da física envolvida na transferência de calor e na dinâmica dos fluidos possui um papel fundamental para processos industriais, eventos naturais e diversos outros (Patankar, 1980). Para isso os métodos numéricos são amplamente utilizados para prever fenômenos que possuam geometrias e/ou equacionamentos mais complexos, sendo estes métodos muito estudados para se obter respostas cada vez mais precisas e rápidas. Visto isso, o

objetivo deste artigo é a comparação da acurácia e tempo de resposta entre o Método dos Volumes Finitos e o Método das Soluções Fundamentais em um problema direto bem definido.

## 2. MÉTODOS NUMÉRICOS

Os métodos numéricos aplicados neste artigo são apresentados nesta seção.

### 2.1 Método dos Volumes Finitos

O Método dos Volumes Finitos é um método numérico que consiste em integrar as equações diferenciais governantes no espaço e no tempo para um domínio tal a ser estudado de forma conservativa, como definido por Patankar (1980).

A discretização do domínio a ser estudado é necessária, visto que as equações governantes são de forma diferencial. Para isso, o domínio deve ser dividido em subdomínios, chamados de volumes de controle, descritos como na Figura 1, onde a integração das equações diferenciais será feita para cada um volume de controle. Para isso, a discretização será feita com malha estruturada simples, com elementos quadrangulares de dimensões estipuladas pelo número de elementos desejados nas direções x e y.

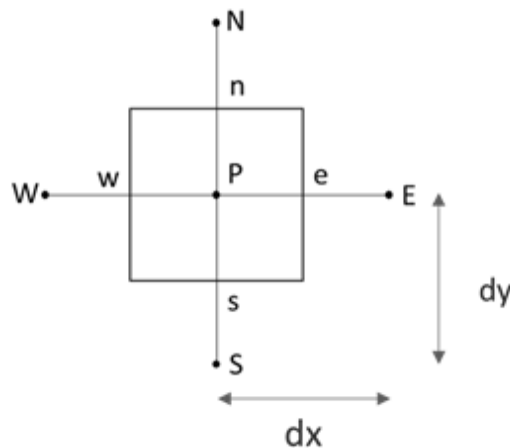


Figura 1 - Volume de controle quadrangular bidimensional

Para um dado volume de controle, a propriedade analisada é dada no ponto P, e os pontos N, S, E e W são os pontos de vizinhança ao norte, sul, leste e oeste, ou, para o caso 2D, ponto superior, inferior, à direita e à esquerda, respectivamente. A célula, assim também chamado volume de controle, possui uma interface que possui uma interação tal com as faces representadas por n, s, e e w, seguindo a convenção estabelecida para N, S, E e W, respectivamente.

A equação de difusão de calor sem geração em regime estacionário para um material isentrópico é expressa por (1).

$$\nabla(k\nabla T) = 0 \quad (1)$$

Para isso, integra-se a equação XX e esta ficará representada pelos Método dos Volumes Finitos de acordo com (2).

$$\Delta y k \frac{(T_E - T_P)}{\Delta x} + \Delta y k \frac{(T_P - T_W)}{\Delta x} + \Delta x k \frac{(T_N - T_P)}{\Delta y} + \Delta x k \frac{(T_P - T_S)}{\Delta y} = 0 \quad (2)$$

Assim, de acordo com Versteeg & Malalasekera (1995), podemos rearranjar os termos e obter o equacionamento como se segue em (3).

$$a_P T_P = a_N T_N + a_S T_S + a_e T_e + a_w T_w + S_U \quad (3)$$

Onde os coeficientes são definidos como descrito na Tabela 1.

**Tabela 1** - Coeficientes para os volumes de controle no interior do domínio

$a_N, a_S$	$a_E, a_W$	$a_P$
$\frac{\Delta x k y}{\Delta y}$	$\frac{\Delta y k x}{\Delta x}$	$a_N + a_S + a_E + a_W - S_P$

Os valores de  $S_U$  e  $S_P$ , neste caso, variam de acordo com as condições de contorno. Para as condições de contorno, imprescindíveis para a solução numérica, foram propostas para as faces à esquerda e à direita influência de fluxo de calor por convecção, e faces superior e inferior como superfícies adiabáticas, gerando assim os contornos descritos na Tabela 2.

**Tabela 2** - Coeficientes para os volumes de controle no contorno

Esquerda	Direita	Superior	Inferior
$a_E = 0$	$a_W = 0$	$S_U = h_{ref,N} T_{ref,N} dx$	$S_U = h_{ref,S} T_{ref,S} dx$
$S_U = q_l$	$S_U = q_r$	$S_P = h_{ref,S} dx$	$S_P = h_{ref,S} dx$

Com isso, aplica-se a todos os volumes de controle e faz-se o uso do método iterativo para obtenção do campo de temperatura no interior do domínio, neste caso Gauss-Seidel.

## 2.1 Método das Soluções Fundamentais

O método das Soluções Fundamentais foi inicialmente descrito por Kupradze e Aledsidze (1964), vindo a se tornar um método efetivo na resolução de problemas diretos e inversos governados por equações diferenciais parciais, sendo a sua solução baseada na combinação linear de soluções fundamentais, como explicitado por Sun e He (2017). Loeffler e Falchetto (2015) afirmam que a modelagem do Método das Soluções Fundamentais consiste na inserção de uma série de pontos de colocação sobre o contorno onde o problema será analisado, o que exige uma computação rigorosa das condições de contorno do problema mesmo sem ele exigir uma discretização explícita.

A solução do Método das Soluções Fundamentais é aproximada através de uma função como apresentada na Eq. (4), onde  $\beta_j$  são os coeficientes desconhecidos a serem determinados,  $G$  é a solução fundamental da equação diferencial elíptica em questão e  $N$  é o número de pontos fonte-fonte considerados.

$$u(x) = \sum_{j=1}^N \beta_j G(x, y_j) \quad (4)$$

De modo análogo ao desenvolvimento de Colaço *et al.* (2006), tem-se para solução da equação de Helmholtz em 2D a solução fundamental descrita na Eq. (5), onde  $H_0^{(1)}$  é a função de Hãkel, definida pelas funções de Bessel de primeiro e segundo tipo.

$$G(x, y_j) = (i/4)H_0^{(1)}(\kappa\|x - y\|) \quad (5)$$

Adotando apenas a função de Bessel de primeiro tipo em (5) é possível considerar pontos dentro do domínio, resultando em uma metodologia semelhante ao Método dos Nós de Contorno, resultando, portanto, nas Eq. (6) e Eq. (7), para cada ponto de colocação utilizado, sendo as funções da temperatura e do fluxo de calor medidos, respectivamente, sendo  $\|r_j\| = \|x - y_j\|$ , no vetor normal e  $K$  a condutibilidade térmica do material de estudo.

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \beta_{i,j} J_0(\kappa_i \|r_j\|) = T_0 \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left(\frac{n.r}{\|r_j\|}\right) \kappa_i \beta_{i,j} J_1(\kappa_i \|r_j\|) = \frac{q_{med}(x,y)}{K} \quad (7)$$

Nota-se que, conhecidos pontos no contorno em relação ao fluxo de calor e à temperatura é possível reduzir as Eq. (6) e Eq. (7) em um sistema linear descrito na forma matricial descrita na Eq. (8), onde existem  $M \times N$  incógnitas  $\beta_{i,j}$  e  $2P$  equações, para  $P$  sendo o número de pontos de colocação, descrito em  $b$  como o termo da direita das Eq. (6) e (7).

$$A\beta = b \quad (8)$$

Determinados os coeficientes  $\beta_{i,j}$  após aplicação do método dos mínimos quadrados devido ao caráter não quadrado do sistema, é possível obter as temperaturas e fluxos a partir da Eq. (9) e (10), respectivamente.

$$T(x) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \beta_{i,j} J_0(\kappa_i \|r_j\|) \quad (9)$$

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial n} = - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left(\frac{n.r}{\|r_j\|}\right) \kappa_i \beta_{i,j} J_1(\kappa_i \|r_j\|) \quad (10)$$

### 3. RESULTADOS

O domínio em estudo é baseado no problema descrito por Valle (2007), que possui geometria simples de material isentrópico sem geração de calor de largura  $L$  e altura  $H$ .

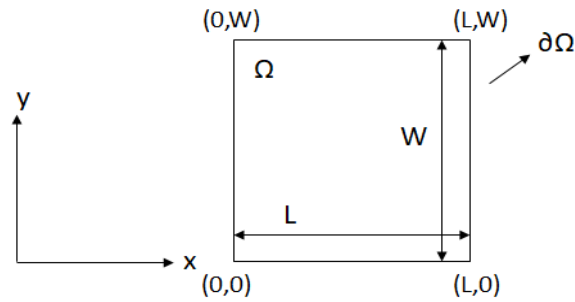


Figura 2 - Esquema para geometria estudada

As equações governantes no domínio e as condições de contorno são apresentadas como segue nas Eq. (11), (12), (13), e (14).

$$\nabla^2 T = 0 \text{ no domínio } \Omega \quad (11)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} = h_{ref,l} (T - T_{ref,l}) \text{ em } x = 0 \quad (12)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = h_{ref,r} (T - T_{ref,r}) \text{ em } x = L \text{ no domínio } \Omega \quad (13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ em } y = 0 \text{ e em } y = W \quad (14)$$

Portanto, tem-se nas faces em  $x = 0$  e  $L$  contorno regido por convecção e nas faces em  $y = 0$  e  $W$  contorno adiabático.

Inicialmente utilizou-se o Ansys® Steady-State Thermal de modo a gerar os dados que servirão de base para o desenvolvimento do artigo. Optou-se pelo uso da plataforma como forma de validação dos casos de estudo devido a sua simplicidade, sendo os resultados desta modelagem explicitados na Figura 3.

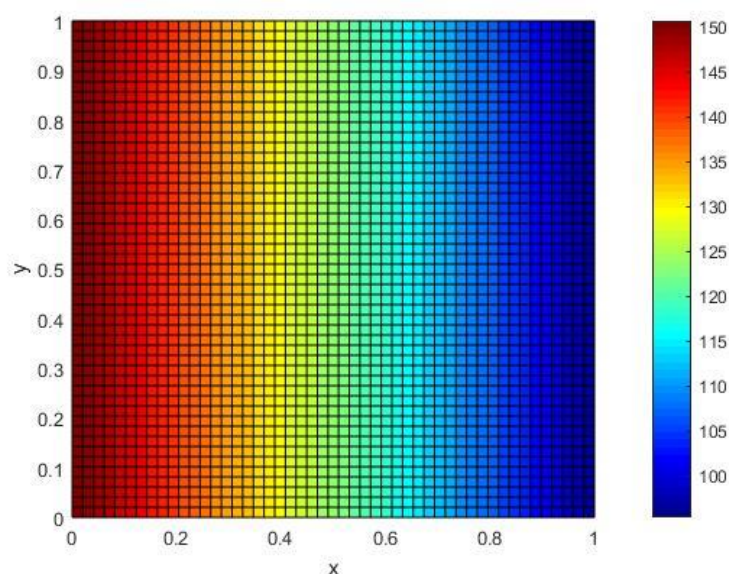


Figura 3 - Representação dos dados utilizados como modelo base nos experimentos numéricos

Os programas desenvolvidos para a solução do modelo via Método dos Volumes Finitos e Método das Soluções Fundamentais foram desenvolvidos na plataforma Matlab®, sendo o computador utilizado um Notebook de processador Core I5 com 8gb de memória RAM. Para as simulações, foram utilizadas malhas de 50x50, 25x25 e 10x10, respectivamente, sendo apresentados os erros e os tempos em cada caso, dispostos na Tabela (3).

**Tabela 3** – Resultado dos experimentos numéricos

Malha	erro MVF (%)	tempo MVF (s)	erro MSF (%)	tempo MSF (s)
10 x 10	0,7908%	0.37 s	0,00042%	0.190133
25 x 25	0,6919%	13.38 s	0,37645%	2.730678
50 x 50	0,3256%	193.89 s	0,00066%	53.423998

Nos experimentos utilizando o Método das Soluções Fundamentais foi necessário encontrar em cada caso o melhor valor para o número de números de onda na obtenção da solução do sistema, sendo a ideia de Colaço *et al.* (2006) de determinar a frequência que apresente o menor erro na solução do sistema da Eq. (8), sendo neste artigo comparado o erro máximo relativo para cada valor de. O valor de 5 para o número de ondas se mostrou o melhor caso. Na resolução do sistema linear dado pela Eq. (8) foi utilizado o GMRES com tolerância de  $1e-9$ , dados os resultados positivos obtidos por Valle (2007), tanto devido à velocidade do método quanto a sua boa precisão.

#### 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foram comparados parâmetros da solução de um problema direto através do Método dos Volumes Finitos e o Método das Soluções Fundamentais semelhante ao Método dos Nós de Contorno. Dados os parâmetros do sistema foram determinadas as temperaturas no domínio do problema. O Método das Soluções Fundamentais se mostrou uma opção poderosa na aproximação das temperaturas tendo a exigência de utilizar pontos de colocação e de ser conhecida a solução fundamental da equação diferencial parcial utilizada na solução.

Além de ser mais rápido na solução direta do problema tanto para malhas mais grosseiras quanto mais refinadas em comparação ao Método dos Volumes Finitos para o caso estudado, o Método das Soluções Fundamentais apresentou acurácia consideravelmente maior em relação aos três casos estudados. Apesar de tais vantagens, o Método dos Volume Finitos apresenta relativamente simplicidade de implementação quando comparado ao Método das Soluções Fundamentais.

#### 5. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e com o apoio do Edital FAPES/CAPES nº 01/2018.

## REFERENCIAS

- Aznar, M., Pessoa, F.L.P. and Silva Telles, A. (1994), “*Vapor-Liquid Equilibria of Mixed Solvent-Salt Systems using a MHV2 Model with the Wilson Equation*”, *X Congresso Brasileiro de Engenharia Química, São Paulo, vol 1*, 38-43.
- Colaço, M. J.; Orlande H. R. B.; Roberty N. C.; Alves C. J. S.; Leitão, V.; “*On the use of MFS in linear inverse diffusion problems*”, ENCIT. 2006.
- de Freitas, G.C.S.; Peixoto, F.C.; Vianna Jr, A.S. (2008), Simulation of a thermal battery using Phoenix. *Journal of Power Sources*, 179, 424-429.
- Duarte, C.S.A. (1999), *Equilíbrio Líquido-Líquido em Sistemas contendo Polímero e Eletrólito: Água/ Polietileno-glicol/Fosfato*, Laboratório de Equilíbrio de Fases, FEQ/UNICAMP, Campinas.
- Fredenslund A. e Sorensen, J.M. (1993), “Group Contribution Estimation Methods”, in *Models for Thermodynamic and Phase Equilibria Calculations*, S.I. Sandler (ed.), Marcel Dekker, Inc., New York.
- Loeffler, C. F., & Falchetto, V. P. (2015), “*Comparação entre os Métodos dos Elementos de Contorno e das Soluções Fundamentais em Problemas de Laplace*”. Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015. Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória.
- Patankar, S. V. (1980), “*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*”, 1° ed., CRC Press, Florida.
- Silva, L.F. (2005), “*Predição de Pontos Críticos de Misturas Termodinâmicas*”, Tese de Doutorado, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo.
- Sun, Y.; He, S. (2017); “*A meshless method based on the method of fundamental solution for three-dimensional inverse heat conduction problems*”, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 108 (2017) 945–960.
- Valle, M. F. (2007), “*Estimativa Do Coeficiente De Transferência De Calor Em Uma Placa Via Método Das Soluções Fundamentais*”, Tese de Mestrado, IME, Rio de Janeiro.
- Van Krevelen, D.W. (1990), “*Properties of Polymers. Their Correlation with Chemical Structure, Their Numerical Estimation and Prediction from Additive Group Contribution*”, 3° ed., Elsevier, Amsterdam.
- Versteeg, H. K.; Malalasekera, W. (1995), “*An introduction to computational fluid dynamics: The Finite Volume Method*”, 1° ed., Longman Scientific & Technical, Harlow.

## COMPARISON BETWEEN FINITE VOLUME METHOD AND FUNDAMENTAL SOLUTIONS METHOD IN A TWO-DIMENSIONAL DIFFUSION PROBLEM

**Abstract.** *The purpose of this article is to solve a two-dimensional diffusion equation of heat problem for a quadrangular geometry with two adiabatic surfaces and two convection heat flux. The main goal is to present linear heat transfer on the studied domain, using Finite Volume Method and Method of Fundamental Solution, similar to Boundary Knot Method. Both methods were effective to determine domain temperature profile. The Method of Fundamental solution presented better results regarding accuracy and calculation time on studied cases.*

**Keywords:** *Numerical method, Finite Volumes, Fundamental Solution, Boundary Knot, Difusion*