



08 a 11 de Outubro de 2018  
Instituto Federal Fluminense  
Búzios - RJ

## O ESTADO DA ARTE DA PROGRAMAÇÃO LINEAR NA AGROMATEMÁTICA

**Juliana Baroni**<sup>1</sup> – juliana.baroni@gee.inatel.br

**Fabiano Marcos de Lima**<sup>2</sup> – fabianomarcos1@hotmail.com

**Thiago Alves de Souza**<sup>3</sup> – tas\_ufrj@hotmail.com

**Angel Ramon Sanchez Delgado**<sup>4</sup> – asanchez@ufrj.br

<sup>1 2 3 4</sup> Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Instituto de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional – Seropédica, RJ, Brasil

**Resumo.** *Em meio às evoluções nas pesquisas em AGROMATEMÁTICA, aplicações da Programação Linear (PL) em problemas cotidianos do produtor rural, por exemplo, vem se tornando cada vez mais frequentes, geralmente buscando um aumento da produção, seguido de uma diminuição de gastos com insumos de produção, aumentando o lucro desse produtor e dando mais qualidade ao seu produto final. O grupo da AGROMATEMÁTICA que trabalha com modelagem matemática e computacional de ensaios agropecuários, florestais e de poluição ambiental, tem trabalhado em uma versão primal-dual do problema de planejamento da produção agrícola, e neste trabalho, a maneira de mostrar o estado atual o estado da arte no que respeita à PL em AGROMATEMÁTICA, apresentam-se informações de um ensaio numérico primal-dual realizado com dados correspondentes ao perímetro irrigado do Gortuba, localizado na região norte do Estado de Minas Gerais*

**Palavras chave:** *Otimização, Modelagem Matemática, Primal-Dual*

### 1. INTRODUÇÃO

O grupo de AGROMATEMÁTICA, registrado no diretório de grupos de pesquisas do CNPq, trabalha com modelagem matemática e computacional de ensaios agropecuários, florestais e de poluição ambiental, utilizando elementos da otimização (programação linear, inteira e não linear), estatística, equações diferenciais e inteligência computacional. A programação linear (PL), matematicamente falando, é um problema de otimização, que visa a maximização ou minimização de uma função linear, chamada de função objetivo, a qual é representada por uma equação ou inequação linear (Andrade, Furst & Parga, 2010), respeitando-se um sistema linear de igualdades ou desigualdades que recebem o nome de restrições do modelo. Essas restrições em geral, representam limitações dos recursos disponíveis (como capital, água, fertilizantes, terra, mão de obra ou fatores relativos à produção) ou, então, exigências e condições que devem obrigatoriamente ser cumpridas no

problema. Essas restrições do modelo determinam uma região denominada conjunto das soluções viáveis. A melhor das soluções viáveis é aquela que maximiza ou minimiza a função objetivo, encontrando-se assim a solução ótima para o problema (Macambira *et al.*, 2016).

Atualmente as diversas técnicas propostas na literatura de Programação Linear têm sido utilizadas em larga escala, tendo em vista que as inovações da última metade do século passado, tornaram esses algoritmos ainda mais eficientes, por conseguir suportar códigos de problemas de grandes dimensões, podendo-se dizer que é uma teoria de otimização relativamente completa, favorecendo a resolução de uma grande variedade de problemas nas diversas áreas do conhecimento, como por exemplo: análise de um sistema de produção e distribuição de determinado produto, otimização da alocação de água em sistemas de recursos hídricos, na seleção de pulverizadores agrícolas que melhor se adapte às necessidades da propriedade, minimização de custos e maximização de lucros de uma empresa, nas decisões de políticas micro e macro econômicas de um governo, além de ser utilizada como sub rotinas para o suporte de algumas tarefas específicas em algoritmos de programação não linear. O grande desafio na otimização agrícola contemporânea é como irrigar para maximizar o lucro, o que Delgado *et al.* (2010) nos confirma ao afirmar que a água e diversos nutrientes são fatores de suma importância para que se obtenha êxito na agricultura, e o manejo racional desses fatores é essencial para a produção agrícola.

O objetivo do presente trabalho foi utilizar a modelagem primal-dual de PL para selecionar as culturas e meses de plantio que proporcionem uma maximização da receita líquida do agricultor, como também a determinação dos preços dos insumos (água e terra irrigável), de modo a fornecer a oferta mínima para que se aceite um acréscimo deles. O cenário hidroagrícola corresponde ao perímetro irrigado do Gorutuba, localizado na região norte do Estado de Minas Gerais (Carvalho *et al.*, 2000).

## 2. MATERIAL E MÉTODOS

De forma geral, é interessante para o produtor agrícola determinar um padrão de cultivo ótimo de suas culturas, de maneira que sua receita líquida seja maximada quando seja feita a racionalização dos insumos água e terra, formando um problema de PL que chamaremos de *primal*. Além disso, lhe interessa saber qual é a taxa de mudança na receita líquida, quando é feita uma variação nos volumes de água disponíveis e nas áreas irrigáveis por mês, ou seja, qual é o esquema ótimo da comercialização dos insumos. Chamaremos este problema de PL de *dual*. Não diferente dos problemas de otimização, a técnica de programação linear consiste em encontrar, sempre que possível, valores capazes de maximizar e minimizar as respostas de uma função definida dentro de uma região predefinida. Os Problemas de PL, podem ser intitulados como modelos matemáticos de decisão, sendo compostos por um critério de decisão, que nada mais é do que o resultado que esperamos (maximização ou minimização), que formam a função objetivo, também chamada de função critério do modelo, e as condições restritivas, que geram as equações de restrição para o problema, estas analisam situações que não podem ocorrer de forma alguma dentro do modelo, seja por qual for o motivo, inclusive para a não negatividade.

O objetivo é apresentar a modelagem *primal-dual* de PL para selecionar as culturas e meses de plantio que proporcionem a maximização da receita líquida do agricultor, como também a determinação dos preços dos insumos (água e terra irrigável), de modo a fornecer a oferta mínima para que se aceite um acréscimo deles.

Para um planejamento agrícola, com limitações de água e terra, busca-se selecionar as culturas e os meses de plantio em um determinado perímetro irrigado composto por um conjunto de lotes, que proporcionem a maximização da receita líquida e uma melhor

utilização dos recursos disponíveis. O problema é determinar um padrão de cultivo ótimo para as culturas de cada lote, de forma que a receita líquida seja máxima quando for realizada uma racionalização dos recursos. Esquemáticamente, o modelo de programação linear para representar o problema descrito, pode ser equacionado conforme Eq. (1) a (4).

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{12} (p_{ij}y_i - c_i) x_{ij} = \sum_{i=1}^m r_{ij}x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{i=1}^m v_{ij}x_{ij} \leq VT_j \quad j = 1, \dots, 12 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq AT_j \quad j = 1, \dots, 12 \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, 12 \quad (4)$$

onde,  $i$  – representa a cultura  $i = 1, \dots, m$ ,  $j$  – representa o mês  $j = 1, \dots, 12$ ,  $p_{ij}$  – preço da cultura  $i$  no mês  $j$  ( $R\$kg^{-1}$ ),  $y_i$  – produtividade média da cultura  $i$  ( $kg\ha^{-1}$ ),  $c_i$  – a média dos custos médios da cultura  $i$  ( $R\$\ha^{-1}$ ),  $x_{ij}$  – área cultivada com a cultura  $i$  no mês  $j$  ( $\ha$ ),  $v_{ij}$  – volume de água utilizado com a cultura  $i$  no mês  $j$  ( $m^3\ha^{-1}$ ),  $VT_j$  – volume total de água disponível, para o respectivo lote, no mês  $j$  ( $m^3$ ),  $AT_j$  – área total cultivada em determinado lote, no mês  $j$  ( $\ha$ ).

A Eq. (1) representa a função objetivo, àquela que deve ser maximizada e as Eq. (2), (3) e (4) correspondem às restrições de volume de água e área, respectivamente. Esse PL é chamado de problema *primal* (PL-*Primal*). É válido destacar que para o produtor agrícola, além da solução ótima do problema *primal* é importante conhecer também a taxa de mudança na receita líquida quando ocorre uma variação nos volumes de água disponíveis e nas áreas irrigáveis por mês, ou seja, qual é o esquema ótimo da comercialização dos insumos (água e terra). Esta informação interessa também ao modelo de PL que determina os preços destes insumos, de modo a fornecer a oferta mínima para que se aceite um acréscimo de água e/ou de terra. Neste caso, deseja-se o menor valor total de produção se é aumentado em uma unidade ( $m^3$ ) o volume total de água disponível e em um hectare a área irrigada no respectivo lote. Matematicamente, procura-se uma solução ótima do problema de PL conhecido como problema *dual* (PL – *Dual*) associado ao problema *primal*.

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^{12} VT_j u_j + \sum_{j=1}^{12} AT_j w_j \quad (5)$$

$$\text{Sujeito a } v_{ij}u_j + w_j \geq r_{ij} \quad (6)$$

$$u_j, w_j \geq 0 \quad (7)$$

É possível observar que as restrições das Eq. (6) e (7) indicam que, para cada cultura e mês do ano, o volume de água consumido pela cultura  $i$  no mês  $j$  multiplicado pelo o preço de uma unidade do volume total de água, mais o preço do arrendamento de um hectare de terra irrigada, deve ser maior ou igual à receita líquida marginal, representada pela Eq. (8)

$$r_{ij} = p_{ij}y_i - c_i \quad (8)$$

Senão, não se estaria fazendo o melhor uso possível dos recursos disponíveis. Note que o problema *dual* é completamente simétrico ao problema *primal*. Também é sabido que as propriedades do problema *primal* estão intimamente ligadas às do problema *dual* e que o valor objetivo ótimo é o mesmo.

O ensaio numérico a ser apresentado e que mostra a resolução simultânea dos problemas *primal* e *dual*, foi feita com os dados do perímetro irrigado do Gorutuba, localizado no município de Nova Porteirinha, norte do Estado de Minas Gerais, descritos em Carvalho

(2000). Da mesma forma que o referido autor, nove lotes foram selecionados por apresentarem características de solo e sistemas de irrigação distintos. A escolha das culturas baseou-se na maior variedade, dentre aqueles implantados e com a maior diversidade de características físico-hídricas dos solos. É considerado o plantio de quatro culturas anuais: abóbora, feijão, milho, quiabo; e de quatro culturas perenes: banana prata, banana nanica, limão e manga. O volume de água necessário para irrigação dessas culturas foi estimado considerando o fornecimento rotativo de água, em função da demanda evapotranspirométrica local, do tipo de solo e época de plantio para cada cultura. A Tabela 1 representa os preços, produtividade média e custos das culturas anuais e perenes. Na obtenção dos custos totais ( $R\$ ha^{-1}$ ) para cada cultura, além dos valores das tabelas, foi considerado o valor da tarifa de água cobrado no perímetro segundo informações do Distrito de irrigação de Gorutuba.

Tabela 1 - Preço dos produtos agrícolas ( $R\$kg^{-1}$ ), produtividade média ( $R\$kg^{-1}$ ) e custos médios de produção ( $R\$ha^{-1}$ ) para as culturas consideradas, no Perímetro Irrigado de Gorutuba

| Mês                                  | Abóbora | Feijão | Milho  | Quiabo  | Banana Prata | Banana Nanica | Limão  | Manga   |
|--------------------------------------|---------|--------|--------|---------|--------------|---------------|--------|---------|
| Preço dos Produtos ( $R\$ kg^{-1}$ ) |         |        |        |         |              |               |        |         |
| Jan                                  |         | 0,662  |        |         | 0,401        | 0,084         | 0,307  |         |
| Fev                                  |         | 0,500  | 0,180  | 0,400   | 0,484        | 0,085         | 0,188  |         |
| Mar                                  |         |        | 0,154  |         | 0,375        | 0,158         | 0,180  |         |
| Abr                                  |         | 0,750  | 0,148  |         | 0,404        | 0,126         | 0,180  |         |
| Mai                                  |         | 0,831  | 0,156  |         | 0,431        | 0,091         | 0,364  |         |
| Jun                                  |         | 0,830  |        |         | 0,601        | 0,090         |        |         |
| Jul                                  |         | 0,829  | 0,161  |         | 0,592        | 0,092         |        |         |
| Ago                                  |         | 0,756  | 0,164  | 0,455   | 0,413        | 0,219         | 0,402  | 1,00    |
| Set                                  |         |        |        |         | 0,315        | 0,182         | 0,751  |         |
| Out                                  |         | 0,818  |        |         | 0,214        | 0,269         | 0,751  |         |
| Nov                                  | 0,200   | 0,752  | 0,156  |         | 0,215        | 0,158         | 0,384  | 0,294   |
| Dez                                  |         |        |        |         | 0,198        | 0,092         | 0,429  | 0,219   |
| Produtividade ( $kg ha^{-1}$ )       |         |        |        |         |              |               |        |         |
|                                      | 18.000  | 1.800  | 5.500  | 15.000  | 26.000       | 44.000        | 22.000 | 18.000  |
| Custo de Produção ( $R\$ ha^{-1}$ )  |         |        |        |         |              |               |        |         |
|                                      | 2674,20 | 965,00 | 651,50 | 3611,50 | 1951,5       | 2676,5        | 996,40 | 1615,90 |

Em função destas ofertas, as datas de plantio para as culturas anuais foram adotadas, considerando a duração média do ciclo da cultura. Para as culturas perenes, foram considerados, ao invés do mês de plantio, os meses em que a cultura estivesse produzindo, sendo o produto vendido àquele preço apresentado na Tabela 1. Desta maneira, não se estava buscando qual a área a ser plantada e sim, qual a área que deveria estar produzindo em determinado mês com determinada cultura. Como não foi considerada a duração do ciclo da cultura, a produtividade média adotada para cada mês foi inversamente proporcional ao preço observado na região naquele mês, respeitando, desta forma, a lei da oferta e da procura. O volume de água disponível para cada mês e a área irrigável de cada lote do perímetro é mostrado na Tabela 2. Para se chegar às soluções dos problemas primal-dual foi utilizado o programa computacional GLPK - SIMPLEX.

Tabela 2 - Volumes mensais de água ( $VT_i$ ) em 1000  $m^3$  e área irrigável ( $AT_i$ ) em  $ha$  para os lotes estudados.

| Lotes | A                             | B     | C     | D     | E     | F    | G     | H    | I     |
|-------|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|------|-------|------|-------|
| Mês   | Volumes Mensais (1000 $m^3$ ) |       |       |       |       |      |       |      |       |
| Jan   | 53,10                         | 11,09 | 12,35 | 5,15  | 5,29  | 6,35 | 13,36 | 6,55 | 12,35 |
| Fev   | 85,82                         | 17,42 | 8,86  | 17,93 | 8,91  | 9,34 | 17,82 | 7,88 | 17,82 |
| Mar   | 59,80                         | 11,09 | 5,74  | 11,38 | 05,81 | 5,74 | 12,17 | 3,92 | 11,48 |
| Abr   | 60,26                         | 14,26 | 7,06  | 7,16  | 7,06  | 7,06 | 14,11 | 6,88 | 14,44 |
| Mai   | 88,02                         | 17,42 | 8,78  | 8,78  | 17,68 | 8,78 | 17,93 | 8,68 | 15,92 |
| Jun   | 75,29                         | 15,84 | 15,84 | 7,92  | 8,10  | 7,92 | 9,70  | 8,10 | 13,08 |
| Jul   | 71,14                         | 15,84 | 15,84 | 7,92  | 8,35  | 8,35 | 15,60 | 7,85 | 14,19 |
| Ago   | 81,00                         | 16,63 | 7,92  | 7,87  | 8,30  | 8,30 | 14,61 | 9,11 | 14,95 |
| Set   | 76,32                         | 16,42 | 7,35  | 7,49  | 7,49  | 7,49 | 14,98 | 8,93 | 13,33 |
| Out   | 52,81                         | 12,10 | 10,62 | 5,18  | 2,66  | 5,31 | 10,26 | 6,55 | 8,32  |
| Nov   | 19,08                         | 4,32  | 3,96  | 1,98  | 1,80  | 1,99 | 3,96  | 2,59 | 2,31  |
| Dez   | 18,00                         | 6,05  | 4,54  | 2,27  | 1,95  | 2,95 | 5,29  | 2,23 | 2,89  |
|       | Área ( $ha$ )                 |       |       |       |       |      |       |      |       |
|       | 38,00                         | 11,00 | 8,46  | 3,51  | 5,94  | 2,95 | 8,16  | 5,90 | 7,97  |

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Na Tabela 3 são apresentadas as áreas a serem cultivadas para cada cultura, entre as várias épocas de plantio, para todos os lotes estudados, que maximizariam o retorno líquido do agricultor ou a resolução do PL-*Primal*. Em função dos dados apresentados na Tabela 1, trabalhou-se com uma época de plantio para a abóbora, nove para o feijão, sete para o milho e duas para quiabo, além das culturas perenes.

Pode-se observar que a banana prata apresenta-se em todos os lotes, como uma boa opção de plantio, dado o fato desta cultura apresentar o mais alto coeficiente de retorno entre as culturas perenes. Além disso, exceto os lotes D e G apresentaram a opção de cultivo de milho e quiabo. Com relação ao feijão, sua área de plantio variou entre janeiro e agosto. Para o quiabo, que apresenta bom coeficiente de retorno, foram selecionados os meses de abril e outubro como meses de plantio. Para o milho só o mês de dezembro (salvo nos lotes D e G).

Tabela 3 - Áreas possíveis de serem irrigadas  $x_{ij}$  ( $ha$ ), resultantes do PL-*Primal*, para todos os lotes estudados, sem se restringir à área cultivada das culturas anuais.

| Culturas*  | A      | B     | C     | D | E     | F     | G | H     | I     |
|------------|--------|-------|-------|---|-------|-------|---|-------|-------|
| Abóbora(6) | 0      | 0     | 0,127 | 0 | 0     | 0     | 0 | 0     | 0     |
| Feijão(1)  | 17,181 | 0     | 2,53  | 0 | 0     | 0     | 0 | 0     | 1,227 |
| Feijão(2)  | 0      | 0     | 0     | 0 | 0     | 0     | 0 | 0     | 0     |
| Feijão(3)  | 0      | 0     | 0     | 0 | 0     | 0     | 0 | 0     | 0     |
| Feijão(4)  | 0      | 0     | 0     | 0 | 0     | 0     | 0 | 0     | 0     |
| Feijão(5)  | 0      | 0     | 0     | 0 | 0     | 0     | 0 | 0     | 0     |
| Feijão(7)  | 0      | 0     | 0     | 0 | 0     | 0     | 0 | 0     | 0     |
| Feijão(8)  | 13,871 | 0,594 | 1,62  | 0 | 0,785 | 0,098 | 0 | 0,282 | 1,499 |
| Feijão(10) | 0      | 0     | 0     | 0 | 0     | 0     | 0 | 0     | 0     |

|                |       |       |       |      |       |       |      |       |       |
|----------------|-------|-------|-------|------|-------|-------|------|-------|-------|
| Feijão(11)     | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     |
| Milho(1)       | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     |
| Milho(3)       | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     |
| Milho(4)       | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     |
| Milho(7)       | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     |
| Milho(10)      | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     |
| Milho(11)      | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     |
| Milho(12)      | 13,87 | 0,594 | 1,75  | 0    | 0,785 | 0,098 | 0    | 0,282 | 1,499 |
| Quiabo (4)     | 19,89 | 2,672 | 4,89  | 0    | 1,321 | 0,511 | 0    | 2,676 | 1,499 |
| Quiabo(10)     | 6,019 | 2,078 | 3,268 | 0    | 0,536 | 0,420 | 0    | 2,394 | 0     |
| Banana P       | 18,10 | 8,32  | 3,434 | 3,51 | 4,618 | 2,431 | 8,16 | 3,223 | 6,470 |
| Banana N       | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     |
| Manga          | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     |
| Limão          | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     |
| Área Irrigável | 38,00 | 11,00 | 8,46  | 3,51 | 5,94  | 2,95  | 8,16 | 5,90  | 7,97  |

\* Os números entre parêntesis após os nomes das culturas representam os meses de plantio das culturas anuais.

Na Tabela 4 são apresentados os resultados correspondentes às variações de preços dos insumos água e terra, resultante da solução ótima do PL-Dual para cada lote, e que representam o custo de produção pelo aumento ou acréscimo de uma unidade dos insumos água e terra, respectivamente.

Tabela 4 - Variação de preços dos insumos água  $u_j$  ( $R\$m^3$ ) e terra  $w_j$  ( $R\$/ha^{-1}$ ) resultantes do PL-Dual se aumentado em uma unidade o volume total de água disponível e em um hectare a área irrigada no respectivo lote, sem restrições de área irrigada para culturas anuais.

| Preços   | A       | B       | C      | D       | E       | F       | G       | H       | I       |
|----------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $u_1$    | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $u_2$    | 0,1256  | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $u_3$    | 0       | 1,778   | 0,715  | 0       | 1,913   | 1,016   | 0       | 1,901   | 0,254   |
| $u_4$    | 1,394   | 0       | 0,826  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $u_5$    | 0       | 0       | 2,333  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $u_6$    | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $u_7$    | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $u_8$    | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $u_9$    | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $u_{10}$ | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $u_{11}$ | 1,253   | 2,266   | 2,117  | 0       | 2,256   | 1,221   | 0       | 2,678   | 7,514   |
| $u_{12}$ | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $w_1$    | 0       | 0       | 0      | 1220,94 | 0       | 0       | 1218,17 | 0       | 0       |
| $w_2$    | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $w_3$    | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $w_4$    | 0       | 0       | 0      | 461,73  | 0       | 0       | 459,91  | 0       | 458,42  |
| $w_5$    | 0       | 2563,94 | 0      | 1,73    | 0       | 449,87  | 1,26    | 461,52  | 0       |
| $w_6$    | 0       | 96,21   | 97,11  | 0       | 2660,68 | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $w_7$    | 1838,37 | 421,02  | 420,85 | 2620,42 | 421,90  | 2614,26 | 2619,74 | 2620,93 | 2620,01 |
| $w_8$    | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |

|                 |        |        |        |         |        |        |        |        |        |
|-----------------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|
| w <sub>9</sub>  | 0      | 0      | 0      | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| w <sub>10</sub> | 301,82 | 313,02 | 312,85 | 2151,14 | 313,90 | 301,18 | 2150,5 | 313,99 | 314,12 |
| w <sub>11</sub> | 0      | 0      | 0      | 24,66   | 0      | 0      | 25,45  | 0      | 0      |
| w <sub>12</sub> | 65,35  | 81,71  | 82,16  | 85,11   | 94,44  | 64,47  | 81,66  | 83,25  | 82,97  |

Note que em todos os lotes sempre se tem custos ao incrementar em uma unidade de área de plantio, nos meses de julho, outubro e dezembro, sendo nos lotes D e G os mais altos. Mas, é no lote E para o mês de junho onde se pode observar o maior custo pelo incremento de uma unidade de área de plantio (R\$ 2.660,68). Também, em todos os lotes, não existe variação de receita pelo incremento de uma unidade de área de plantio nos meses de agosto e setembro. Observe que para o lote B não é recomendável um incremento da área de plantio no mês de maio (R\$2.563,94). Em relação ao insumo de água, como é de se esperar, tem-se custos baixos pelo incremento de uma unidade de volume. Salvo nos lotes D e G, sempre existem custos pelo incremento nos meses de março e novembro.

Em função da alta produtividade e da rentabilidade esperadas, principalmente para a cultura do quiabo, os resultados já apresentados (Tabela 3), sugerem ocupação excessiva de área com esta cultura, não refletindo a situação real de plantio e de demanda do produto, no perímetro do Gorutuba (Carvalho et al., 2000).

Na Tabela 5 são apresentadas as áreas a serem cultivadas para cada cultura, entre as várias épocas de plantio, para todos os lotes, quando se restringiu a área das culturas anuais, a fim de refletir as condições reais de plantio do perímetro. Com a restrição de 1,65; 1,82; 2,83 e 0,20% na área cultivada imposta às culturas da abóbora, feijão, milho e quiabo, respectivamente, observa-se maior ocupação da área com as culturas de banana prata e limão.

Com relação às culturas anuais, o plantio do feijão e do milho pode ser recomendado nos meses de abril e julho e, para o quiabo e a abóbora, áreas de plantios praticamente desconsideravam (salvo o lote A) foram obtidas em razão da pequena percentagem de ocupação, citada anteriormente. As Tabelas 3 e 5 mostram que enquanto a cultura da abóbora não é recomendável para ser plantada em nenhum lote, salvo o lote C (com 0,12771 ha) no mês de junho e considerando que não se tem restrição de área de cultivo, o seu cultivo é recomendável em todos os lotes durante o mês de junho, salvo nos lotes D e G, quando existem restrições de área de plantio.

Na Tabela 6 são apresentados os resultados duais correspondentes à variação da taxa da receita líquida quando se incrementa em uma unidade o volume de água disponível e em um hectare a área irrigada no respectivo lote com restrições de área irrigada para as culturas anuais.

É importante observar, que em comparação com a Tabela 4, todos os custos de produção por unidade aumentada concentram-se nos já citados lotes D e G. Por exemplo, não existe variação de renda ao incrementar uma unidade de insumo nos lotes A, B, C, E, H e I. O maior custo de produção pelo aumento de uma unidade do insumo terra é alcançado no lote D no mês de dezembro (R\$ 2.852,65). Também não foi observada a variação de receita líquida no mês de janeiro, nos lotes D e G. Os meses de março e novembro continuam sendo os meses, para todos os lotes (salvo o lote G), onde se tem custos ligeiramente aumentados pelo incremento de unidade de volume de água.

Finalmente, na Tabela 7 são apresentadas as rendas líquidas obtidas na otimização com e sem restrições de área por cultura anual. A maior diferença observada foi de 33,65% no lote C. Observando-se a Tabela 5, verifica-se que dos 8,5 ha deste lote apenas 5,856 ha foram ocupados ao longo de todo o ano, indicando a menor ocupação entre os lotes estudados. Nos lotes A, B e E, a redução da renda chegou a 15,2% e, para os demais, esta redução atingiu 10,2%, em média. Podemos observar, ainda, que as receitas líquidas para os lotes D e G não

diferiram em razão da ocupação total desses lotes com banana prata na otimização, sem e com restrições de área irrigada.

Tabela 5 - Áreas possíveis de serem irrigadas  $x_{ij}$  (ha), resultantes do PL-Primal, para: todos os lotes estudados, com restrições de área cultivada nas culturas anuais.

| Culturas*      | A      | B      | C     | D    | E     | F      | G    | H     | I      |
|----------------|--------|--------|-------|------|-------|--------|------|-------|--------|
| Abóbora(6)     | 0,627  | 0,1815 | 0,139 | 0    | 0,026 | 0,048  | 0    | 0,09  | 0,131  |
| Feijão(1)      | 0      | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Feijão(2)      | 0      | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Feijão(3)      | 0      | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Feijão(4)      | 0      | 0,200  | 0,153 | 0    | 0,108 | 0,053  | 0    | 0,107 | 0,145  |
| Feijão(5)      | 0      | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Feijão(7)      | 0,6916 | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Feijão(8)      | 0      | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Feijão(10)     | 0      | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Feijão(11)     | 0      | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Milho(1)       | 0      | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Milho(3)       | 0      | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Milho(4)       | 0      | 0,311  | 0,239 | 0    | 0,168 | 0,083  | 0    | 0,166 | 0,225  |
| Milho(7)       | 1,075  | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Milho(10)      | 0      | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Milho(11)      | 0      | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Milho(12)      | 0      | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Quiabo(4)      | 0      | 0,022  | 0,016 | 0    | 0,011 | 0,0059 | 0    | 0,011 | 0,0015 |
| Quiabo(1)      | 0,076  | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Banana P.      | 22,138 | 6,198  | 1,165 | 3,51 | 4,06  | 1,99   | 8,16 | 0,593 | 6,47   |
| Banana N.      | 0      | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Manga          | 0      | 0      | 0     | 0    | 0     | 0      | 0    | 0     | 0      |
| Limão          | 4,537  | 3,062  | 4,144 | 0    | 0,747 | 0,585  | 0    | 3,70  | 0      |
| Área Irrigável | 38,00  | 11,00  | 8,46  | 3,51 | 5,94  | 2,95   | 8,16 | 5,90  | 7,97   |

\* Os números entre parênteses após os nomes das culturas representam os meses de plantio das culturas anuais.

Tabela 6 - Variação de preços dos insumos água  $u_j$  ( $R\$m^3$ ) e terra  $w_j$  ( $R\$/ha^{-1}$ ) resultantes do PL-Dual se aumentado em uma unidade o volume total de água disponível e em um hectare a área irrigada no respectivo lote, com restrição de área irrigada para culturas anuais.

| Preços | A     | B    | C    | D | E    | F    | G | H    | I |
|--------|-------|------|------|---|------|------|---|------|---|
| $u_1$  | 0     | 0    | 0    | 0 | 0    | 0    | 0 | 0    | 0 |
| $u_2$  | 0     | 0    | 0    | 0 | 0    | 0    | 0 | 0    | 0 |
| $u_3$  | 0     | 4,50 | 4,61 | 0 | 4,87 | 2,62 | 0 | 4,93 | 0 |
| $u_4$  | 2,614 | 0    | 0    | 0 | 0    | 0    | 0 | 0    | 0 |
| $u_5$  | 0     | 0    | 0    | 0 | 0    | 0    | 0 | 0    | 0 |
| $u_6$  | 0     | 0    | 0    | 0 | 0    | 0    | 0 | 0    | 0 |
| $u_7$  | 0     | 0    | 0    | 0 | 0    | 0    | 0 | 0    | 0 |



|          |       |      |      |         |       |      |         |      |      |
|----------|-------|------|------|---------|-------|------|---------|------|------|
| $u_8$    | 0     | 0    | 0    | 0       | 0     | 0    | 0       | 0    | 0    |
| $u_9$    | 0     | 0    | 0    | 0       | 0     | 0    | 0       | 0    | 0    |
| $u_{10}$ | 0     | 0    | 0    | 0       | 0,835 | 0    | 0       | 0    | 0    |
| $u_{11}$ | 0,597 | 1,76 | 1,03 | 0       | 0,147 | 0,57 | 0       | 1,96 | 1,83 |
| $u_{12}$ | 0     | 0    | 0    | 0       | 0     | 0    | 0       | 0    | 0    |
| $w_1$    | 0     | 0    | 0    | 0       | 0     | 0    | 0       | 0    | 0    |
| $w_2$    | 0     | 0    | 0    | 0       | 0     | 0    | 0       | 0    | 0    |
| $w_3$    | 0     | 0    | 0    | 314,4   | 0     | 0    | 312,30  | 0    | 0    |
| $w_4$    | 0     | 0    | 0    | 147,33  | 0     | 0    | 147,61  | 0    | 0    |
| $w_5$    | 0     | 0    | 0    | 1,73    | 0     | 0    | 1,26    | 0    | 0    |
| $w_6$    | 0     | 0    | 0    | 312,98  | 0     | 0    | 311,73  | 0    | 0    |
| $w_7$    | 0     | 0    | 0    | 2621,84 | 0     | 0    | 2620,31 | 0    | 0    |
| $w_8$    | 0     | 0    | 0    | 0       | 0     | 0    | 0       | 0    | 0    |
| $w_9$    | 0     | 0    | 0    | 0       | 0     | 0    | 0       | 0    | 0    |
| $w_{10}$ | 0     | 0    | 0    | 314,8   | 0     | 0    | 312,94  | 0    | 0    |
| $w_{11}$ | 0     | 0    | 0    | 0       | 0     | 0    | 0       | 0    | 0    |
| $w_{12}$ | 0     | 0    | 0    | 2852,65 | 0     | 0    | 2850,54 | 0    | 0    |

Tabela 7 - Rendas líquidas, em R\$ 1.000,00, e diferenças percentuais resultantes da otimização sem e com restrições de áreas irrigáveis para as culturas anuais, para cada lote estudado.

| Lotes | Receitas Líquidas (R\$ 1.000,00) |                        | Diferença (%) |
|-------|----------------------------------|------------------------|---------------|
|       | Sem restrições de área           | Com restrições de área |               |
| A     | 202513,64                        | 169936,79              | 16,09         |
| B     | 67753,62                         | 57963,69               | 14,45         |
| C     | 46545,39                         | 30883,26               | 33,65         |
| D     | 23045,71                         | 23045,71               | 0             |
| E     | 35911,18                         | 3029,93                | 13,87         |
| F     | 18381,16                         | 16281,42               | 11,42         |
| G     | 53502,59                         | 53502,59               | 0             |
| H     | 34920,65                         | 24614,83               | 29,51         |
| I     | 47979,76                         | 42648,61               | 11,11         |

#### 4. CONCLUSÕES

Grande parte dos estudos com modelos de PL em áreas correlacionadas às de trabalho do grupo AGROMATEMÁTICA, vieram com o intuito de minimizar custos e maximizar a produção e os lucros para produtores. A geração de esquemas ótimos *primal-dual* para produção e comercialização da renda agrícola com limitações de água e terra representa uma visão ampla no planejamento agrícola com limitações de insumos. A distribuição irregular dos recursos hídricos e a escassez de capital justificam a utilização dessas técnicas de programação linear que permitem aumentar os lucros nas áreas irrigadas. Acredita-se que com a evolução das técnicas aplicadas a computação e bons resultados obtidos por aplicações delas, ela venha a ser vastamente utilizada para diversas aplicações, devido às necessidades que o mercado de agronegócios vem apresentando, em questão de demanda para produtos que têm como base de sua produção produtos agrícolas, preservação do meio ambiente, e

principalmente a necessidade de crescimento dos produtores, em questões de fornecimento que geram o lucro final.

### **Agradecimentos**

*Agradecemos ao apoio da Capes, do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, e do Instituto de Ciências Exatas da UFRRJ pelo incentivo no desenvolvimento da pesquisa.*

### **REFERÊNCIAS**

- Andrade, E., Furst, P., Parga, P. *Elementos de Programação Linear*, 4.ed., Seropédica/RJ: EDUR, 2010.
- Carvalho, D. F., Soares Alves A., Ribeiro Soares Alvares C.A., Sedyama C. G., Pruski Falco F. Otimização do uso da água no perímetro irrigado do Gorutuba, utilizando-se a técnica da programação linear. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, v.4, n.2, p.203-209, 2000.
- Delgado, A.R.S., Duarte, W.S., Lima, V.N., Carvalho, D.F. Modelagem matemática para otimização da produção e renda de melão e melancia em função de lâminas de água e doses de Nitrogênio. *Irriga, Botucatu*, v.15, n.1, p.1-9, 2010.
- Macambira, A.F.U.S., Maculan, N., Cabral, L.A.F., Pinto, L.L. *Programação Linear*, Editora da UFPB, 169p, 2016.

### **THE STATE OF THE ART OF LINEAR PROGRAMMING IN AGROMATEMÁTICA**

**Abstract.** *In the midst of the evolutions in AGROMATEMÁTICA research, applications of Linear Programming (LP) in daily problems of the rural producer, for example, are becoming more and more frequent, usually seeking an increase in production, followed by a reduction of expenditures with inputs of production, increasing the profit of this producer and giving more quality to its final product. The AGROMATEMÁTICA group that works with mathematical and computational modeling of agricultural, forestry and environmental pollution trials has been working in a primal-dual version of the problem of agricultural production planning, and in this work, the way to show the current state the state of the art in relation to LP in AGROMATEMÁTICA, we present information of a primal-dual numerical test performed with data corresponding to the irrigated perimeter of Gorutuba, located in the northern region of the State of Minas Gerais*

**Keywords:** *Optimization, Mathematical Modeling, Primal-Dual*