

08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

ESTUDO DE VIBRAÇÕES MECÂNICAS DE DISPOSITIVOS MICRO-ELETROME CÂNICOS IMERSOS EM MEIO DIFUSIVO

Maurício Bhering Cardoso¹ – mauriciobhering@yahoo.com.br

Adélcio Caros de Oliveira² – adelcio@ufsj.edu.br

¹ Discente de Engenharia Mecatrônica.

² Departamento de Estatística, Física e Matemática.

Universidade Federal de São João del Rei, Campus Alto Paraopeba – Ouro Branco, MG, Brasil

Resumo. Estudamos a dinâmica de um dispositivo micro-eletromecânico como uma viga de Bernoulli Euler imerso em meio difuso sujeita a ruído branco. Foi criado um modelo computacional para simular tal movimento, e comparado a alteração desse, com a variação do amortecimento viscoso.

Palavras-chave: Micro-Eletromecânico, Vibrações, Vigas Esbeltas, Ruído Branco, Modelo Computacional.

1. INTRODUÇÃO

O estudo de vibrações de vigas é algo amplamente estudado e com diversas aplicações em engenharia e em outras áreas do conhecimento. Em trabalho recente, Oliveira e colaboradores (Soares et al., 2018) estudaram a dinâmica e o espectro de vibrações de uma viga uniforme via modelo Euler-Bernoulli, a viga tem sustentação viscoelásticas não-lineares e o estudo foi feito no espaço de parâmetros. O modelo apresentou nascimento e morte súbita de atratores caóticos (crises) e possui janelas periódicas no espaço de parâmetros. Além disso, o modelo apresenta estruturas periódicas conhecidas como "camarões", essas estruturas periódicas estão envolvidas por regiões caóticas. Em outro trabalho (Ribeiro et al., 2018), os autores estudaram a dinâmica e o espectro de vibrações da viga de Euler-Bernoulli com seção transversal variando linearmente na direção ao seu comprimento (modelo simplificado de asa). Através de um estudo no espaço de parâmetros, encontraram uma região onde o sistema se comporta como se fosse periódico. Essa região foi denominada de atrator quase estável.

Em outros trabalhos, Brito e colaboradores (Brito, 2016) mostraram que uma viga de Euler-Bernoulli sujeita à força browniana na verdade se comporta anormalmente. O modelo descrito em (Brito, 2016) representam o comportamento dinâmico de uma microtúbuo celular na fase estável e foram baseados na referência (Jiang, H. & Zhang, 2008). Portanto, embora

não seja o foco principal, também é um caso de aplicações em biologia, embora sabe-se que uma viga pode representar uma infinidade de objetos reais, macroscópicos ou não.

As vigas estão entre os sistemas vibracionais mais simples, assim, a correta análise de vibrações feitas em vigas sujeitas a forças aleatórias, além de interesse acadêmico, pode, entre outras coisas gerar conhecimento com viés tecnológico, uma vez que o melhor entendimento dos esforços nos quais as máquinas estão sujeitas pode gerar um avanço no estudo da prevenção de falha e no design de novos produtos.

Um dos motivos para tentar incluir efeitos difusivos em sistemas mecânicos são os dispositivos micro-eletromecânicos (MEMS) (Prime Faraday Technology ,2002 Maluf, N. and Williams, K. , 2004) , dado sua pequena massa estão sujeitos a efeitos difusivos. Uma boa definição de MEMS é "Os sistemas micro-eletromecânicos (MEMS) são uma tecnologia de processo usada para criar pequenos dispositivos ou sistemas integrados que combinam componentes mecânicos e elétricos. Eles são fabricados usando técnicas de processamento de lote de circuito integrado (IC) e podem variar em tamanho de alguns micrômetros a milímetros. Estes dispositivos (ou sistemas) têm a capacidade de detectar, controlar e atuar na micro escala e gerar efeitos na escala macro. Enquanto a eletrônica do dispositivo é fabricada usando a tecnologia IC 'chip de computador', os componentes micromecânicos são fabricados por manipulações sofisticadas de silício e outros substratos usando processos de micromecanização. Processos tais como micromecanismo em massa e superfície, bem como micromecanização de alta relação de aspecto (HARM) removem seletivamente partes do silício ou adicionam camadas estruturais adicionais para formar componentes mecânicos e eletromecânicos. Enquanto os circuitos integrados são projetados para explorar as propriedades elétricas do silício, o MEMS\ aproveita as propriedades mecânicas do silício ou as suas propriedades elétricas e mecânicas" traduzido da referência (Prime Faraday Technology ,2002) da página 1, seção 2.1 .

Neste trabalho propõe-se a criação de um modelo computacional para simular um dispositivo micro-eletromecânico como uma viga de Euler-Bernoulli, assim seremos capazes de obter a dinâmica de um dispositivo microeletromecânico imerso em meio difuso sujeita a ruído branco.

2. VIGA BERNOULLI EULLER

O modelo de viga estudado está imerso em meio difuso e sujeito a iterações aleatórias, assumindo como base teórica o estudo de vigas lineares elásticas esbeltas feito por Euler-Bernoulli (Balachandran & Magrab, 2011), é possível modelar as características de deflexão de uma viga sob um determinado carregamento em uma equação diferencial parcial linear de quarta ordem. Considerando que as forças de excitação não sejam nulas, pode-se definir modelos matemáticos para essas forças de maneira que seja válido o método de separação de variáveis para a equação diferencial que modela o movimento para seção, densidade e momento de inercia da viga constantes, é definida por:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \Psi + \rho A \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \Psi f(x, t) \quad (1)$$

sendo que, a viga não deformada é considerada como composta de infinitas partes extensas de comprimento L , definimos um sistema de coordenadas cartesiano de tal forma que a linha neutra da viga não deformada repouse sobre o eixo x entre os pontos $x=0$ e $x=L$, sendo

também E o módulo de Young do material, I o momento de inércia da seção transversal da viga em torno do eixo x que passa pelo centroide, ρ a densidade do material, A a área da seção transversal, $f(x,t)$ representa um carregamento externo por comprimento unitário e Ψ a deformação em relação a linha neutra. Utilizando-se a separação de variáveis $\Psi=Y(x)U(t)$, tem-se a seguinte relação:

$$\frac{1}{Y(x)} \frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4} + \frac{\alpha^2}{U(y)} \frac{\partial^2 U(y)}{\partial t^2} = f(x,t); \text{sendo: } \alpha^2 = \left(\frac{\rho A}{EI} \right) \quad (2)$$

Para os casos que $f(x,t)=g(x)$ utiliza-se a separação de variáveis, nesse caso fazemos $\lambda = \omega^2$. Assumindo-se um modelo de viga browniana sujeita à forças aleatórias (Gardiner, 1990) no tempo e uma força viscosa proporcional a derivada parcial de Ψ em relação ao tempo, pela lei de Stokes, sendo $f(x,t)$ de modo que a separação de variáveis ainda seja válida, tem-se a seguinte equação diferencial temporal:

$$\frac{d^2}{dt^2} U(t) + \frac{b}{\rho A} \frac{d}{dt} U(t) + \frac{\lambda}{\rho A} U(t) - \frac{1}{\rho A} U(t) Fa(t) = 0 \quad (3)$$

Podemos definir no limite de ruído browniano forte (Gitterman, 2005) a seguinte relação entre a função do tempo e a força aleatória:

$$\frac{1}{\rho A} U(t) Fa(t) = \zeta(t) \quad (4)$$

considerando,

$$\frac{\lambda}{\rho A} = \alpha \quad (5)$$

$$\frac{b}{\rho A} = \beta \quad (6)$$

Temos que, a equação diferencial estocástica obtida desenvolvendo-se a parte temporal é representada por:

$$\frac{d^2}{dt^2} U(t) + \beta \frac{d}{dt} U(t) + \alpha U(t) - \zeta(t) = 0 \quad (7)$$

3. MODELO COMPUTACIONAL

A equação diferencial estocástica de segunda ordem que descreve o movimento da viga em função do tempo pode ser escrita como duas equações diferenciais de primeira ordem. Definindo as seguintes relações, a fim de facilitar a modelagem, temos:

$$X_1(t) = U(t) \quad (8)$$

$$\text{Condição inicial: } X_1(0) = 1 \text{ e } \frac{d}{dt} X_1(0) = 0 \quad (9)$$

logo, tem-se que:

$$\frac{d}{dt} X_1(t) = X_2(t) \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} X_2(t) = -\alpha X_1(t) - \beta X_2(t) + \zeta(t) \quad (11)$$

Essas equações podem ser modeladas e solucionadas utilizando métodos numéricos computacionais, os parâmetros de entrada do algoritmo que modela tais equações são:

Tabela 1 - Parâmetros de entrada

```

Xzero1 = 1;
Xzero2 = 0;
alpha = 1;
NUMSIM = 500;
Tzero = 0;
T = 20;
h = 0.01;
for k = 1 : 4
    beta = 0.25*k;
end
    
```

onde, Xzero1 e Xzero2 são as condições iniciais de posição e velocidade respectivamente da viga, alpha representa o coeficiente de rigidez, beta é o coeficiente de amortecimento, NUMSIM representa o número de simulações que serão feitas, Tzero é o tempo inicial, T é o tempo final e h é o passo de integração.

De forma a melhorar os resultados da simulação o tempo é discretizado de acordo com o passo de integração. cálculos foi criado o vetor

Tabela 2 – Discretização do tempo

```

OWNTIME = T0:h:T;
if (OWNTIME (end)~=T)
    OWNTIME = T;
end
N = length (OWNTIME);
    
```

É necessário controlar a geração dos padrões gaussianos pseudo-aleatórios para obter resultados repetíveis, como demonstrado abaixo:

Tabela 3 – Geração de padrões Gaussianos pseudo-aleatórios

```
if (isempty (SEED))  
    randn('state',0);  
else  
    randn('state',SEED);  
end
```

O comando `randn` gera uma matriz com elementos aleatórios distribuídos que seguem a distribuição normal e têm média zero e variância igual a 1.

Visto o grande número de simulações e visando a obtenção de um resultado mais preciso utilizamos o método ‘*Antithetic variates*’, que é uma técnica de redução de variância. Considerando que a redução de erro no sinal simulado tem uma convergência de raiz quadrada, um número muito grande de caminhos de amostra é necessário para obter um resultado preciso. O método ‘*Antithetic variates*’ reduz a variação dos resultados da simulação (Kroese et al., 2011).

Tabela 4 – Método ‘*Antithetic variates*’

```
for j=2:N  
    x = XVARS(j-1, :);  
    Winc = zeros(1,NUMDEPVARs*NUMSIM);  
    if(mod(NUMDEPVARs*NUMSIM,2)==0)  
        Winc(1 : NUMDEPVARs * NUMSIM/2) =  
            sqrt(h)*randn(1,NUMDEPVARs * NUMSIM/2);  
        Winc(NUMDEPVARs * NUMSIM/2 + 1 : end) = -Winc(1 :  
            NUMDEPVARs * NUMSIM/2);  
    else  
        Winc(1 : round(NUMSIM*NUMDEPVARs/2)) =  
            sqrt(h)*randn(1,round(NUMSIM*NUMDEPVARs/2));  
        Winc(round(NUMSIM*NUMDEPVARs/2)+1:end) = -Winc(1 :  
            round(NUMSIM*NUMDEPVARs/2)-1);  
    end  
end
```

onde `NUMPVARs` é o número de variáveis dependentes, a dimensão da equação diferencial estocástica.

Para a solução numérica aproximada da equação diferencial estocástica, foi utilizado método numérico de Euler-Maruyama (Kloeden et al., 1997).

Tabela 5 - Método de Euler-Maruyama

```
for j=2:N  
    [f,g] = feval(t, x, [], [1 -1 1 1 1],NUMDEPVARs,NUMSIM);  
    XVARS(j, :) = x + f * h + g .* Winc ;  
    t = OWNTIME(j);  
end  
xhat = XVARS;
```

onde \hat{x} é a matriz da solução aproximada em função do tempo.
A média dos resultados de $U(t)$, $U(t)^2$, $U'(t)$ e $U'(t)^2$ é definida por:

Tabela 6 – Resultado médio

```
for n=1:2
    for nP=1:2
        NUMDEPVARs = nP;
        xhat2 = xhat.^n ;
        meanxhat = mean(xhat2(:,nP:NUMDEPVARs:end),2);
    end
```

Com o modelo proposto chegamos nos seguintes resultados com variação do coeficiente de amortecimento:

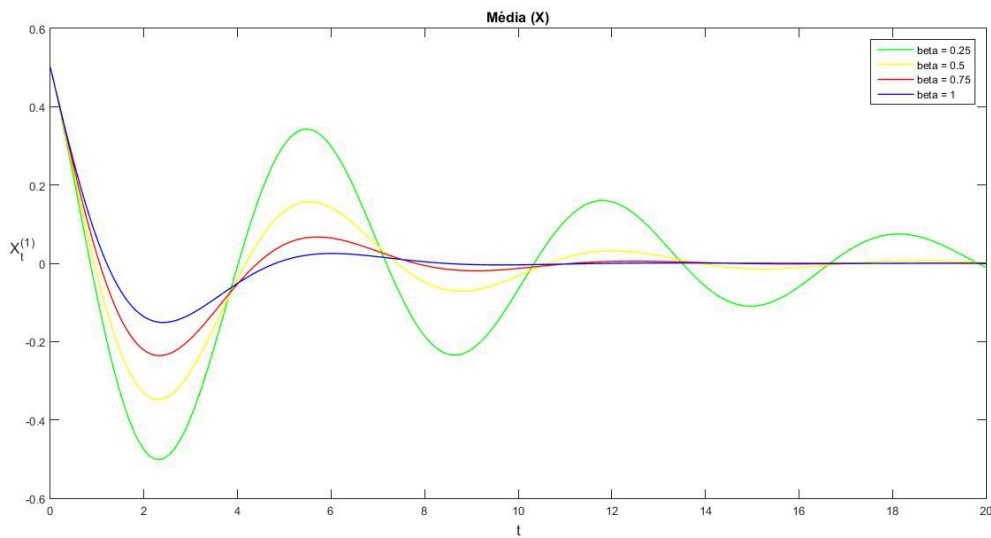


Figura 1 – Comparação entre a média das posições com a alteração do coeficiente de amortecimento.

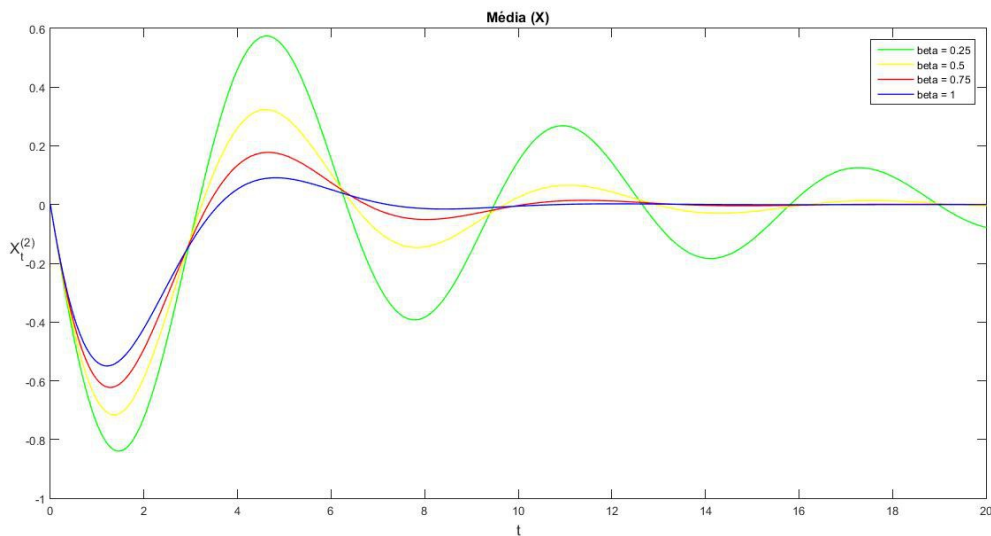


Figura 2 – Comparação entre a média das velocidades com a altera o do coeficiente de amortecimento.

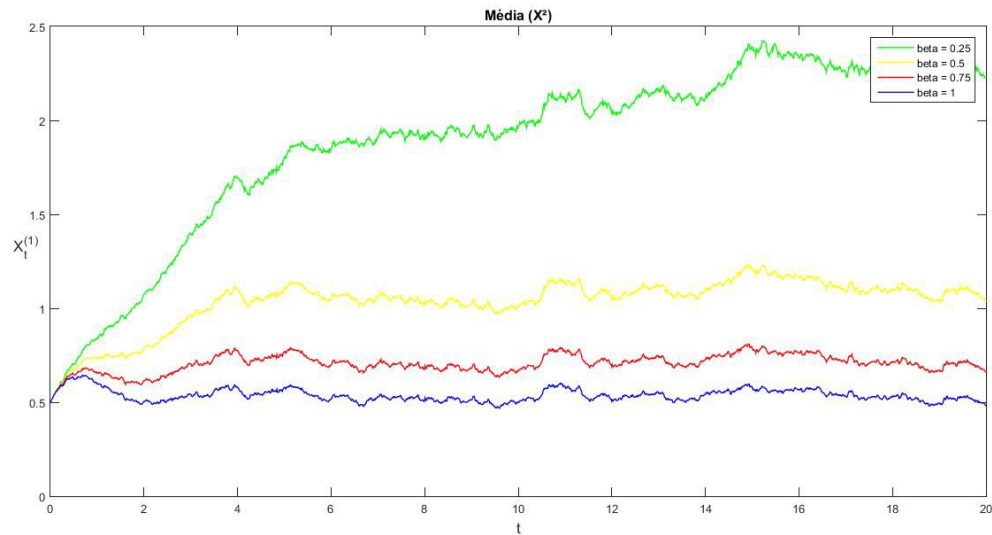


Figura 3 – Compara o entre a média das posi es ao quadrado com a altera o do coeficiente de amortecimento.

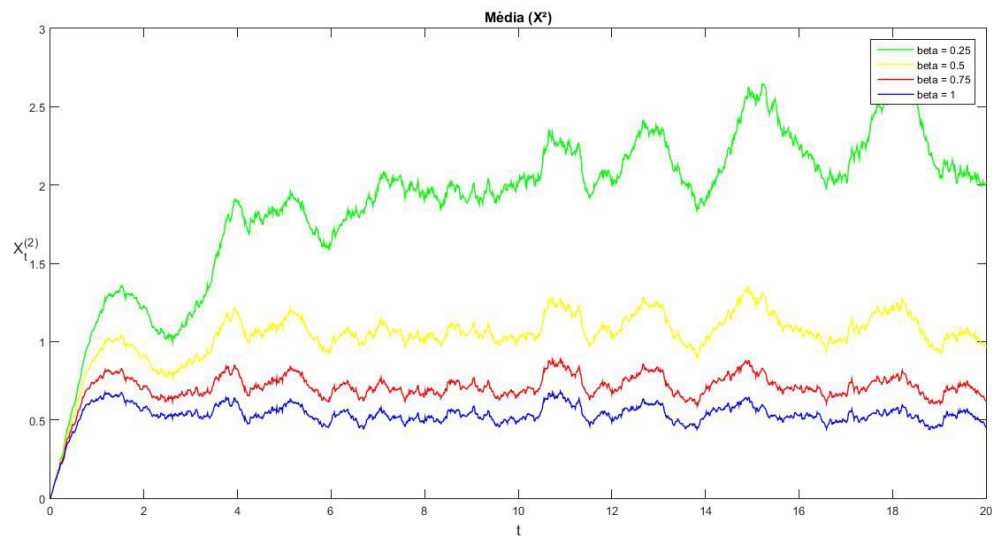


Figura 4 – Compara o entre a média das velocidades ao quadrado com a altera o do coeficiente de amortecimento.

4. CONCLUSÃO

Com os resultados obtidos podemos concluir que, considerando o dispositivo micro-eletromecânico como uma viga de Bernoulli Euler imersa em meio difuso.   possível modelar a dinamica de seu movimento quando essa estrutura está sujeita a ruído

branco. Com a alteração do coeficiente de amortecimento podemos notar a influencia que este causa na dinâmica do movimento, tanto na posição quanto na velocidade.

Agradecimentos

A. C. Oliveira agradece a Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo o apoio financeiro através do termo APQ-01366-16.

REFERÊNCIAS

- Balachandran, B. e Magrab, E.B., *Vibrações Mecânicas*, Cengage Learning (2011).
- Brito, R. Y, Fabrino, D.L., Oliveira, A. C., *Estudo de Vibrações Mecânicas em Microtúbulos Celulares*, in Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics (2016), p. 10020
- Gardiner C.W., *Handbook of Stochastic Methods*, Springer-Verlag, (1990).
- Gitterman M., *Classical harmonic oscillator with multiplicative noise*, Physica A. Vol 352, 309-334 (2005).
- Kloeden, Platen and Schurz "Numerical solution of SDE through computer experiments", Springer-Verlag 2nd edition 1997.
- Kroese, D. P.; Taimre, T.; Botev, Z. I. (2011). *Handbook of Monte Carlo methods*. John Wiley & Sons.(Chapter 9.3).
- Jiang, H. and Zhang, J., *Mechanics of Microtubule Buckling Supported by Cytoplasm*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 75, 061019 (2008).
- Lee, K. B. (2011). *Principles of microelectromechanical systems*. John Wiley & Sons.
- Maluf, N. and Williams, K. (2004) , *An Introduction to Microelectromechanical Systems Engineering*, --2nd ed. --(Artech House microelectromechanical library)
- Petersen, K.E. *Silicon as a Mechanical Material*, Proceedings of the IEEE, May 1982, Vol. 70, No. 5, p. 420-457.
- Prime Faraday Technology (2002), *An Introduction to MEMS*, Wolfson School of Mechanical and Manufacturing Engineering, Loughborough University, Loughborough.
- Ribeiros, L. R, G. V. Soares ; Almeida, A. C. L. ; Oliveira, A. C.. *Dynamics of a non-uniform Euler-Bernoulli beam: sensitivity study in the parameter space*. Journal of Applied Nonlinear Dynamics, v. 7, p. 205-221, 2018.
- Seon M. Han, Haym Benaroya and Timothy Wei (1999), *Dynamics of Transversely Vibrating Beams using four Engineering Theories*, Academic Press.
- Soares, G. V., Ladeira, D. G., Oliveira, A. C. , *Dynamics of an Euler-Bernoulli Beam on Nonlinear Viscoelastic Foundations: a Parameter Space Analysis*, Manuscript submitted for publication, (2018)
- Timoshenko, S.P. and Gere, J.E., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed, McGraw-Hill, New York, (1998).

STUDY OF MECHANICAL VIBRATIONS OF MICROELECTROMECHANICAL DEVICES IMMERSSED IN DIFFUSIVE MEDIA

Abstract. *We study the dynamics of a microelectromechanical device such as a Bernoulli Euler beam immersed in diffuse medium subject to white noise. A computational model was created to simulate such motion, and compared the change of this movement with the variation of the viscous damping.*

Keywords: *Microelectromechanical, Vibrations, Slender Beams, White Noise, Computational Model.*