

08 a 11 de Outubro de 2018  
Instituto Federal Fluminense  
Búzios - RJ

## METODOLOGIA NUMÉRICA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE BIOTRANSFERÊNCIA DE CALOR POR MEIO DE FUNÇÕES DE BASE RADIAL

Luiz Otávio Barbosa<sup>1</sup> – [lotaviocomex@gmail.com](mailto:lotaviocomex@gmail.com)

Rafael Pinheiro Amantéa<sup>1</sup> – [rafaelamantea@yahoo.com.br](mailto:rafaelamantea@yahoo.com.br)

Robspierre de Carvalho<sup>1</sup> – [pierrecarvalho75@gmail.com](mailto:pierrecarvalho75@gmail.com)

<sup>1</sup> IETEC – Instituto de Educação Tecnológica, Mestrado em Engenharia e Gestão de Processos e Sistemas – Belo Horizonte, MG, Brasil

**Resumo.** *Um grande número de problemas de biotransferência de calor pode envolver condições de contorno específicas para simular situações de aquecimento, queimaduras e termoterapias. Apesar das soluções analíticas disponíveis, muitas formas clássicas e modificadas da famosa equação de Pennes requerem soluções numéricas rápidas e precisas. Este trabalho introduz o método da função de base radial (RBF) aplicado à solução da equação de biotransferência de calor com condições de contorno relacionadas à função de aquecimento constante e degrau. Além disso, um esquema adaptativo temporal foi utilizado com o método RBF. Os resultados numéricos obtidos apresentaram erros menores que 0,1%, quando comparados com soluções analíticas e permitem afirmar que a metodologia proposta é precisa. Especificamente para o caso de aquecimento por função degrau, dois parâmetros de forma RBF foram aplicados para manter os excelentes resultados. Os perfis espaciais mostraram que os nós localizados nos limites foram a fonte primária de erros numéricos e sugeriram um esquema adaptativo de refinamento de nós no espaço.*

**Palavras chave:** *Funções de base radial, Métodos Adaptativos, Biotransferência de calor*

### 1. INTRODUÇÃO

A Biotransferência de calor é um fenômeno complexo, o qual envolve diversos mecanismos convencionais de transferência de energia. Além disso, é sensível a uma série de parâmetros críticos inerentes problema em estudo, como taxa de metabolismo, perfusão sanguínea e geração de calor (Sarkar et al., 2015).

O modelo clássico para reger a transferência de calor em tecidos foi apresentado por Pennes(1948) e é composto basicamente de uma equação de conservação de energia com a presença de um termo fonte. Chen e Holmes (1980) modificaram o modelo proposto por Pennes, incorporando a troca de calor por convecção. Entretanto, o modelo requer o conhecimento de detalhes da anatomia vascular e do padrão de fluxo para resolvê-lo, além de

umentar consideravelmente a complexidade da solução. Desta forma o modelo de Pennes ainda é a alternativa padrão para a abordagem de problemas de Biotransferência de calor devido a sua simplicidade matemática e sua capacidade de prever o perfil de temperatura razoavelmente bem em diversas aplicações.

Embora a ausência de termos convectivos possa tornar a formulação do fenômeno mais simples, os problemas de Biotransferência de calor em suas diversas aplicações podem apresentar alta complexidade numérica devido a presença de termos fonte, condições de contorno não triviais (Bedin & Bazan, 2014; Kengne et al., 2014) e geometrias complexas (Hooshmand et al., 2015).

Soluções analíticas disponíveis para problemas específicos de Biotransferência de calor estão disponíveis na literatura (Askarizadeh & Ahmadikia, 2015; Deng & Liu, 2002), entretanto (Bojdi & Hemmat, 2017) afirmam ainda não existir uma forma analítica geral para a solução da equação de Pennes (1948). Desta forma, soluções numéricas acuradas tornam-se essenciais para a solução do modelo em questão independente das condições de contorno, geometria e termos fonte.

O método de Função de Base Radial (FBR) ganhou a atratividade de engenheiros e cientistas de diversas áreas pela sua simplicidade na implementação de soluções envolvendo geometrias complexas e problemas não lineares de diferentes dimensões. Entretanto, a aplicação do método FBR para problemas de Biotransferência de calor ainda se encontra em pleno desenvolvimento, restringindo-se a aplicações e avaliações do método FBR aos problemas clássicos (Cao et al. 2010; Jamil & Ng, 2013).

A qualidade na integração numérica do termo transiente presente nos modelos diferenciais pode afetar de maneira direta a solução global do modelo. Diversos esquemas de integração temporal (Runge-Kutta, Crank-Nicolson, Up-Wind) vêm sendo utilizados junto da discretização especial via funções de base radial. Para problemas puramente convectivos ou dominados pelos termos advectivos dos modelos, os esquemas padrão de integração temporal se mostraram obedientes aos critérios de estabilidade e convergência de metodologias numéricas clássicas (Amantéa *et al.* 2013).

Oscilações numéricas e elevado custo computacional presentes em modelos específicos de Biotransferência de calor podem ser contornadas por meio de estratégias temporais adaptativas (França & Haghghi, 1994). Como proposta de solução para problemas numéricos de Biotransferência de calor este trabalho tem por objetivo implementar e avaliar uma estratégia de integração adaptativa temporal proposta por Bixler (1989) acoplada ao método FBR.

Especificamente, o esquema de solução numérica será avaliado para problemas unidimensionais com condições de contorno que simulam situações como aquecimento constante na superfície e aquecimento por funções do tipo degrau. Para aferir a qualidade da solução numérica, soluções analíticas proposta por Deng e Liu (2002) serão utilizadas.

## 2. METODOLOGIA

### 2.1 O modelo físico para Biotransferência de calor

Neste trabalho a análise teórica sobre a transferência de calor em tecidos vivos levará como referência o modelo de Pennes. A solução do modelo se restringe à forma unidimensional da equação com parâmetros térmicos constantes que é descrita a seguir:

$$\nabla \cdot \kappa \nabla T + q_p + q_m - W c_b (T - T_a) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Em que  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) é a temperatura local do tecido,  $T_a$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) é a temperatura arterial,  $c_b$  ( $\text{J}/\text{kg}/^{\circ}\text{C}$ ) é o calor específico do sangue,  $c_p$  ( $\text{J}/\text{kg}/^{\circ}\text{C}$ ) é o calor específico do tecido,  $W$  ( $\text{kg}/\text{m}^3/\text{s}$ ) é a taxa de perfusão de tecido local,  $k$  ( $\text{w}/\text{m}/^{\circ}\text{C}$ ) é a condutividade térmica do tecido,  $\rho$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) é a densidade do tecido,  $q_p$  ( $\text{w}/\text{m}^3$ ) é a taxa de deposição de energia, e  $q_m$  ( $\text{w}/\text{m}^3$ ) é o metabolismo basal. O termo  $Wc_b(T-T_a)$ , explica os efeitos da perfusão sanguínea e pode ser a forma dominante de remoção de energia quando se considera processos de aquecimento.

## 2.2 O método de funções de base radial

Uma função de base radial é uma função  $\phi(r)$   $n$ -dimensional radialmente simétrica  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que depende apenas da distância Euclidiana ( $r = \|x - x_j\|$ ) entre um centro  $x_j$  e um ponto avaliado em  $x$ . Entre os tipos de funções de base radial de suporte global encontram-se:

*Thin Plate Splines* (TPS):

$$\phi(r) = r^4 \log(r) \quad (2)$$

Multiquádrica (MQ):

$$\phi(r) = \sqrt{\varepsilon^2 + r^2} \quad (3)$$

Cúbica:

$$\phi(r) = r^3 \quad (4)$$

Uma função de base radial pode ser utilizada para interpolar uma função  $f(x)$  em  $\mathbb{R}^n$  assumindo que;

$$f(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|x - x_j\|_2), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Os coeficientes  $\lambda$  são encontrados por meio da solução do sistema linear na forma  $\lambda = \Phi^{-1}f(x)$ .

## 2.3 Discretização da equação de energia por meio de funções de base radial

Partindo da Eq. (5) as derivadas parciais podem ser facilmente obtidas a partir das seguintes equações (6) e (7);

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

e

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Considere a Eq. (1) como uma função temperatura  $T(x,t)$ . A discretização por Crank-Nicolson consiste de uma abordagem por diferenças finitas para aproximar as derivadas de  $T(x,t)$  seguindo a seguinte equação.

$$\frac{T^{t+\Delta t} - T^t}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} [T(x, t) + T(x, t + \Delta t)] \quad (8)$$

Considerando constante os termos  $q_p$  e  $q_m$  a Eq. (1) e expandindo a Eq. (8) temos,

$$T^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \left[ \alpha \frac{\partial^2 T^{t+\Delta t}}{\partial x^2} - w_{c_b} T^{t+\Delta t} \right] + C = T^t + \frac{\Delta t}{2} \left[ \alpha \frac{\partial^2 T^t}{\partial x^2} - w_{c_b} T^t \right] + C \quad (9)$$

Em que  $\alpha = k/\rho c_p$  e C representa o somatório dos termos constantes do modelo  $C = w_{c_b} T_a + q_m + q_r$ . A partir da Eq. (9) serão definidos dois novos operadores  $H^+$  e  $H^-$  considerando  $T(x, t) \approx \phi(x, t)$  e  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ .

$$H^+ = \phi^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \left[ \alpha \frac{\partial^2 \phi^{t+\Delta t}}{\partial x^2} - w_{c_b} \phi^{t+\Delta t} \right] + C \quad (10)$$

$$H^- = \phi^t + \frac{\Delta t}{2} \left[ \alpha \frac{\partial^2 \phi^t}{\partial x^2} - w_{c_b} \phi^t \right] + C \quad (11)$$

Por fim, os operadores  $H^+$  e  $H^-$  serão utilizados para a aproximação da função  $T(x,t)$  por meio de uma função de base radial.

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{t+\Delta t} H_+ = \sum_{j=1}^N \lambda_j^t H_- \quad (12)$$

A Eq. (12) gera um sistema de equações lineares que após ser resolvido por decomposição LU permite calcular as incógnitas,  $\lambda^{t+\Delta t}$ , a partir dos valores conhecidos de  $\lambda^t$  no passo anterior e assim transformados em  $T(x,t)$  por meio da Eq. (5).

### 2.3 Método adaptativo para a integração temporal de Bixler

O método adaptativo para a integração temporal de Bixler (1989) inicia-se depois de três soluções preparatórias, mantendo o passo de tempo ( $\Delta t$ ) inicial. No quarto avanço inicia-se a adaptatividade temporal.

O algoritmo a seguir mostra os principais passos para a aplicação do método adaptativo temporal proposto por Bixler (1989).

**Passo 1:**

Discretizar a EDP seguindo a metodologia descrita no item 2.2.

**Passo 2:**

Neste trabalho, os 3 avanços iniciais são preparados pelo método de Crank Nicholson ( $\theta = 0,5$ ) para obter as soluções não adaptativas.

**Passo 3:**

Obter os valores preditos utilizando o preditor de Adams-Bashforth, por meio das soluções nos tempos anteriores.

$$Y_{n+1}^P = Y_n + \frac{\Delta t_n}{2} \left[ \left( 2 + \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1}} \right) Y_n' - \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1}} Y_{n-1}' \right] \quad (13)$$

Em que  $Y$  é a variável dependente, o sobrescrito  $P$  se refere ao valor predito, o subscrito  $n$  é o passo presente,  $t$  é a variável independente (tempo),  $\Delta t$  é o valor do passo temporal e as derivadas,  $\dot{Y}_n$  e  $\dot{Y}_{n-1}$  no tempo presente e anterior  $n-1$  são aproximadas respectivamente por

$$\dot{Y}_{n-1} = \frac{\Delta t_{n-2}}{\Delta t_{n-1} + \Delta t_{n-2}} \left( \frac{Y_n - Y_{n-1}}{\Delta t_{n-1}} \right) + \frac{\Delta t_{n-1}}{\Delta t_{n-1} + \Delta t_{n-2}} \left( \frac{Y_{n-1} - Y_{n-2}}{\Delta t_{n-2}} \right) \quad (14)$$

e pela regra do trapézio

$$\dot{Y}_n = \frac{2}{\Delta t_{n-1}} (Y_n - Y_{n-1}) - \dot{Y}_{n-1} \quad (15)$$

**Passo 4:**

Utilizar como corretor a regra dos gêmeos de uma perna só:

$$\frac{Y_{n-1} - Y_n}{\Delta t_n} = f \left( \frac{Y_{n+1} - Y_n}{2}, \frac{t_{n+1} - t_n}{2} \right) \quad (16)$$

**Passo 5:**

Prever o tamanho do avanço no espaço de tempo pela equação abaixo.

$$\Delta t_{n+1} = \Delta t_n \left( \frac{\varepsilon}{|d_{n+1}|} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (17)$$

Em que  $\varepsilon$  é o erro de truncamento temporal local e  $d_{n+1}$  é proporcional à diferença entre as soluções preditas e numéricas;

$$d_{n+1} = \frac{0,25}{2,25 + \frac{3 \Delta t_{n-1}}{\Delta t_n}} (Y_{n+1} - Y_{n+1}^P) \quad (18)$$

**Passo 6:**

Repetir o procedimento, a partir do passo 3, até o tempo final da simulação.

### 3. RESULTADOS

Para a simulação dos cenários a seguir foram utilizados os seguintes valores para as propriedades físicas e termos fonte presentes no modelo matemático:  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = c_b = 4200 \text{ J / kg }^\circ\text{C}$ ,  $T_a = T_c = 37 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $k = 0,5 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ ,  $w_b = 0,0005 \text{ ml/s/ml}$ ,  $q_m = 33800 \text{ W/m}^3$ . A temperatura interior do tecido geralmente tende a um valor constante a uma curta distância como 2 – 3 cm. Portanto, a espessura  $L = 3 \text{ cm}$  foi utilizada neste estudo. Neste trabalho o termo  $q_p$  foi zerado por não considerarmos nenhum aquecimento espacial em nenhum dos cenários estudados.

Todos os experimentos numéricos foram feitos utilizando como referência as soluções analíticas para os casos propostos e as normas de erro apresentadas a seguir;

$$E^2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |Exato_i - Numérico_i|^2} \quad (19)$$

$$E^\infty = \max_{0 \leq x \leq N} |Exato_i - Numérico_i| \quad (20)$$

Em que  $N$  é o número de pontos utilizados para a discretização espacial. O domínio espacial foi refinado até que se alcançasse um erro inferior a 0,1% para o erro avaliado pelo erro médio quadrático Eq.(19). Utilizou-se em todos os experimentos a função de base radial multiquádrica e para cada cenário foi escolhido o seu respectivo fator de forma ( $\varepsilon$ ) por força bruta.

### 3.1 Condições de contorno

Durante os práticos processos térmicos, a condição de contorno de na superfície da pele é muitas vezes dependente do tempo, que pode ser generalizada como:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = f(t), \quad x = 0 \quad (21)$$

em que  $f(t)$  é uma função fluxo de calor que é dependente do tempo. A temperatura no centro do corpo foi considerada como uma constante ( $T_c$ ), ao considerar que o corpo biológico tende a manter sua temperatura estável, ou seja,

$$T = T_c, \quad x = L \quad (22)$$

### 3.2 Cenário 1 – Aquecimento constante na superfície

O primeiro cenário a ser analisado simula o aquecimento constante na superfície da pele. Foram utilizados 301 pontos nodais em todos os três experimentos. Em termos práticos este tipo de condição de contorno procura reproduzir processos de danos por queimaduras ou termoterapias superficiais. As condições de contorno representadas pelas Eq.(21) e (22) serão incorporadas no modelo. Para caracterizar o aquecimento constante na superfície o termo  $f(t)$  na Eq.(21) será substituído pelo termo  $P_o$  ( $W/m^2$ ). Serão utilizados três valores distintos de potência aplicadas na superfície do tecido. O perfil espacial de temperatura e temporal na superfície do tecido estão ilustrados pelas fig.1 e fig.2.

Os perfis ilustrados pelas fig.1 e fig2. mostram maiores temperaturas alcançadas para maiores valores de  $P_o$  aplicados na superfície. Obviamente os resultados são análogos às camadas internas do tecido. As temperaturas na superfície variaram de 43°C a aproximadamente 65°C. Tais valores são de extremo interesse, já que influenciam diretamente na avaliação de faixas de operação para avaliação de tratamentos levando em consideração dores e danos por queimaduras.

A fig.3 a seguir ilustra o desempenho do método de avanço temporal adaptativo. As curvas ilustram o considerável aumento do esforço computacional quando se aumentam os valores aplicados na superfície do tecido. Entretanto, o método adaptativo utilizado manteve para todos os experimentos apresentados um erro de truncamento local de  $10^{-6}$ .

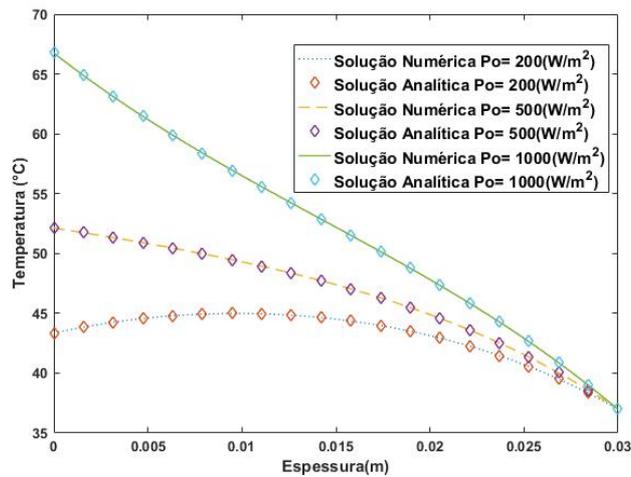


Figura 1 Perfil espacial de temperatura do tecido após 5000s de aquecimento.

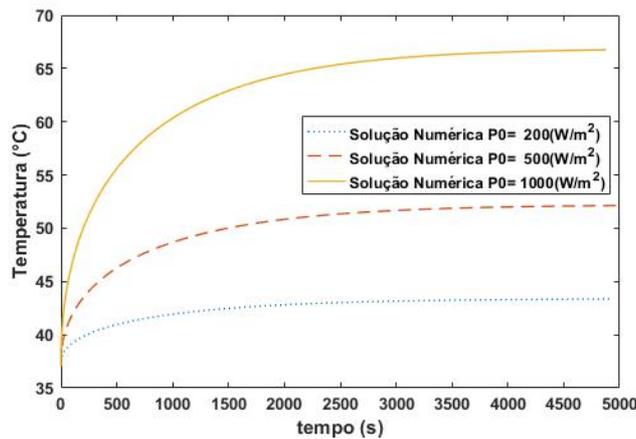


Figura 2 Perfil temporal de temperatura na superfície do tecido após 5000s de aquecimento.

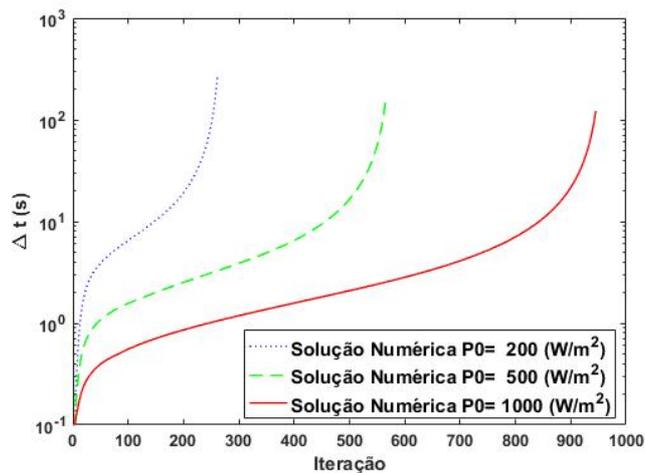


Figura 3 Variação da ordem do passo de tempo para os diferentes cenários

O excelente desempenho da metodologia numérica aplicada é corroborado pelos erros apresentados na tabela 1. A metodologia numérica para o cenário 1 apresentou alta precisão e estabilidade numérica para todos os experimentos, chegando em alguns cenários a aumentar em 100 vezes o passo de tempo.

Tabela 1 – Valores de erros e parâmetros de forma para cenário 1.

$P_o$ (W/m <sup>2</sup> )	$E^2$	$E^\infty$	$\mathcal{E}$
200	0,023%	0,056%	7668
500	0,026%	0,076%	8569
1000	0,053%	0,117%	11268

### 3.3 Cenário 1 – Aquecimento por uma função degrau

O segundo e cenário a ser analisado simula o aquecimento na superfície da pele feito por meio de uma função degrau. Para este cenário, Foram utilizados 501 pontos nodais. Em termos práticos este tipo de condição de contorno procura reproduzir cirurgias a laser por pulso unico, e lesões no tecido devido a eventos instantâneos (incêndios, derramamentos de fluidos aquecidos). Para caracterizar o aquecimento por uma função degrau na superfície o termo  $f(t)$  na Eq.(21) será substituído pela eq(23).

$$f(t) = \begin{cases} 1000 \text{ W/m}^2, & t < 1200s \\ 0, & t \geq 1200s \end{cases} \quad (23)$$

O perfil espacial de temperatura e temporal na superfície do tecido estão ilustrados a seguir.

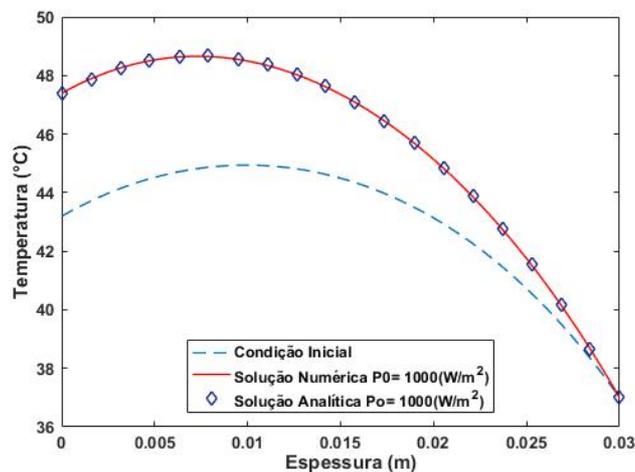


Figura 4 Perfil espacial de temperatura do tecido após 5000s de aquecimento.

Obviamente, o aumento de temperatura mais alta aparece no momento quando o aquecimento da superfície foi interrompido. Claramente a inserção de uma função degrau na condição de contorno na superfície, aumenta consideravelmente a não linearidade do problema. Percebe-se pela fig.5 que o contorno apresentou maiores erros devido a descontinuidade da função aplicada e ao alto valor aplicado durante ao aquecimento. Entretanto, o método continuou apresentando resultados precisos e estáveis com erros  $E^2 = 0,028\%$  e  $E^\infty = 0,052\%$ .

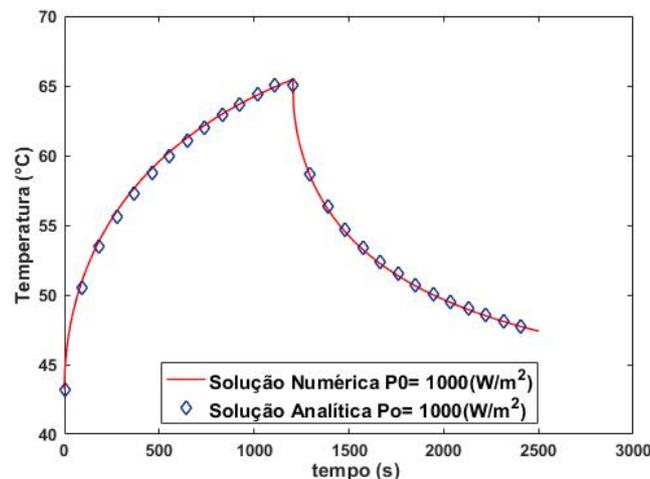


Figura 5 Perfil temporal de temperatura na superfície do tecido após 2500s de aquecimento.

A fig.6 a seguir ilustra o cálculo do passo de tempo durante a simulação. A descontinuidade gerada pela condição de contorno provoca uma redução considerável no passo de tempo. Entretanto o avanço é logo retomado quando a estabilidade é reestabelecida.

Para manter o bom rendimento do método, o fator de forma da função multiquádrica precisou ser alterado durante a simulação seguindo o comportamento da função degrau no contorno. Sendo assim, para tempos de simulação inferiores a 1200s o valor aplicado foi  $\mathcal{E}=11762$  e para tempos superiores  $\mathcal{E}=7300$ .

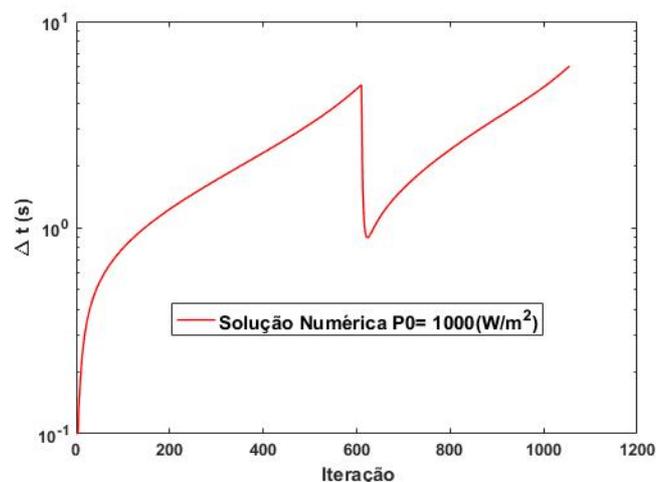


Figura 6 Avanço do passo de tempo para problema com função degrau no contorno.

#### 4. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma metodologia numérica para a solução de problemas de biotransferência de calor. Foram testados dois tipos de condição de contorno que representam diferentes aplicações para bioengenharia. O método de funções de base radial apresentou erros inferiores a 0,1% em todos os experimentos. Acoplado ao método de funções de base radial um esquema adaptativo temporal apresentou altíssimo desempenho apresentando reduções consideráveis no tempo computacional, viabilizando a metodologia proposta para futuras aplicações em problemas similares em duas ou mais dimensões.

Constatou-se a necessidade de refinamento de pontos nos contornos, sugerindo aplicações futuras acoplando metodologias adaptativas espaciais e temporais ao método de funções de base

radial. Especificamente para o problema com condição de contorno com função do tipo degrau, uma metodologia para a solução via função de base radial com uso de parâmetros de forma variável foi testada e validada. O bom resultado alcançado sugere a metodologia utilizada como ferramenta de solução para problemas dominados pela convecção com condições de contorno similares. Entretanto tal constatação sugere o desenvolvimento de novas metodologias para este tipo de condição de contorno, devido à complexidade de se encontrar de maneira ótima os valores para os parâmetros de forma das funções de base radial.

## **REFERÊNCIAS**

- Amantéa, Rafael P.; Fortes, M; Martins, J.H; Ferreira, W.R. (2013), Numerical Simulation Techniques for Optimizing Thermodynamic Efficiencies of Cereal and Grain Dryers, *Drying Technology An International Journal* 6, 672-680.
- Askarizadeh, Hossein, e Hossein Ahmadikia. (2015), Analytical study on the transient heating of a two-dimensional skin tissue using parabolic and hyperbolic bioheat transfer equations, *Applied Mathematical Modelling* 39(13), 3704–20.
- Bedin, Luciano, e Fermín S Viloche Bazán. (2014). On the 2D bioheat equation with convective boundary conditions and its numerical realization via a highly accurate approach. *Applied Mathematics and Computation* 236, 422–36.
- Bixler, NE. (1989), An improved time integrator for finite element analysis, *Communications in Applied Numerical Methods* , 69–78.
- Bojdi, Z. Kalateh, e A. Askari Hemmat. (2017), Wavelet collocation methods for solving the Pennes bioheat transfer equation, *Optik* 130, 345–55.
- Cao, Leilei, Qing Hua Qin, e Ning Zhao. (2010), An RBF-MFS model for analysing thermal behaviour of skin tissues, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 53, 1298–1307.
- Chen, Michael M., e Kenneth R. Holmes. (1980), Microvascular Contributions in Tissue Heat Transfer, *Annals of the New York Academy of Sciences* 335, 137–50.
- Deng, Zhong-Shan, e Jing Liu. (2002), Analytical Study on Bioheat Transfer Problems with Spatial or Transient Heating on Skin Surface or Inside Biological Bodies, *Journal of Biomechanical Engineering* 124, 638.
- Franca, Adriana S., e Kamyar Haghighi. (1994), Adaptive Finite Element Analysis of Transient Thermal Problems”, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals* 26, 273–92.
- Hooshmand, P., A. Moradi, e B. Khezry. (2015), Bioheat transfer analysis of biological tissues induced by laser irradiation, *International Journal of Thermal Sciences* 90, 214–23.
- Jamil, Muhammad, e E. Ng. (2013), Evaluation of meshless radial basis collocation method (RBCM) for heterogeneous conduction and simulation of temperature inside the biological tissues, *International Journal of Thermal Sciences* 68, 42–52.
- Kansa, E. J. (1990), Multiquadrics-A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics-II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, *Computers and Mathematics with Applications* 19, 147–61.
- Kengne, Emmanuel, Idir Mellal, Mariem Ben Hamouda, e Ahmed Lakhssassi. (2014), A Mathematical Model to Solve Bio-Heat Transfer Problems through a Bio-Heat Transfer Equation with Quadratic Temperature-Dependent Blood Perfusion under a Constant Spatial Heating on Skin Surface, 721–30.
- Pennes, Harry H. (1948), Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm, *Applied Physiology* 1(2), 1:93–122.
- Sarkar, Daipayan, A. Haji-Sheikh, e Ankur Jain. (2015), Temperature distribution in multi-layer skin tissue in presence of a tumor, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 91, 602–10.

## A NUMERICAL METHODOLOGY FOR SOLVING BIOHEAT TRANSFER PROBLEMS BY RADIAL BASIS FUNCTION

**Abstract:** *A large number of bioheat transfer problems involve specific boundary conditions for simulating skin heating process, thermotherapies, and skin burning. Despite available analytical solutions, many classical and modified forms of the famous Pennes's Bioheat equation require fast and accurate numerical solutions. This work introduces the radial basis function (RBF) method as applied to the solution of Bioheat equation with boundary conditions related to constant and step heating function. Furthermore, a time step adaptive scheme was utilized with the RBF method. The numerical results reached errors lower than 0.1%, when compared against analytical solutions, allow affirming that the proposed methodology is very accurate. Specifically for the step heating case, two RBF shape parameters were applied for maintaining the excellent results. The spatial profiles showed that the nodes located at boundaries were the primary source of numerical errors and suggested a spatial adaptive node refinement scheme.*

**Keywords:** *Radial Basis Function, Adaptive Methods, Bioheat transfer*