



08 a 11 de Outubro de 2018  
Instituto Federal Fluminense  
Búzios - RJ

## PROBLEMAS DE FLUXO DE CUSTO MÍNIMO: UMA INTRODUÇÃO AOS ALGORITMOS DE BUSACKER E GOWEN E DE FORD E FULKERSON

**Lorraine Patiele Pereira Bispo**<sup>1</sup> - lorraine\_patieleuft.edu.br

**Jonatha Oliveira Reis Varjão**<sup>1</sup> - jonathavarjaomail.uft.edu.br

**George Lauro Ribeiro de Brito**<sup>1</sup> - gbritomail.uft.edu.br

<sup>1</sup>Universidade Federal do Tocantins - Câmpus de Palmas, TO, Brasil

**Resumo.** Esta pesquisa partiu do objetivo de analisar os Problemas de Fluxo de Custo Mínimo e os algoritmos de resolução para tais problemas, iniciou-se o estudo pelos algoritmos de Ford Jr & Fulkerson (1955) e de Busacker & Gowen (1960). Para tanto, além de uma aprofundada pesquisa bibliográfica foram utilizados testes com instancias fictícias, geradas para validação dos modelos propostos, e na rede Ipê, rede de Internet dedicada à comunidade brasileira de ensino superior e pesquisa. A partir da análise de dados foi possível perceber os pontos fortes e as limitações dos algoritmos estudados. Os resultados obtidos com testes na rede Ipê apontam que o algoritmo de Busacker e Gowen tem um desempenho melhor que o de Ford e Fulkerson em relação ao custo em um caminho de fluxo máximo.

**Palavras-chave:** Teoria dos Grafos, Fluxo máximo, Custo mínimo, Ford e Fulkerson, Busacker e Gowen.

### 1. INTRODUÇÃO

Os Problemas de Fluxo de Custo Mínimo (PFCM), consistem em enviar recursos por uma rede afim de atender uma demanda com o menor custo possível. Tal problema possui relevante importância entre os problemas de otimização em redes, pois ele abarca uma série de aplicações em diversas áreas. A computação, a telecomunicação, o transporte e a distribuição de energia são algumas destas áreas.

De forma geral os PFCM são modelados considerando um ou mais pontos, vértices ou nós, de origem do fluxo e ao menos um receptor para esse fluxo. Desta forma os PFCM são facilmente modelados em grafos onde podem ser aplicados algoritmos clássicos como o Algoritmo de Ford e Fulkerson ou o Algoritmo de Busacker e Gowen.

Além destes algoritmos, há outras formas de solucionar PFCM. O Algoritmo Simplex, o Algoritmo Simplex para Redes e o Algoritmo Out-of-Kilter são alguns dos outros métodos desenvolvidos com a finalidade de solucionar este tipo de problema. Porém como saber qual o mais adequado pra cada situação?

A resposta para tal pergunta é um tanto complexa pois deve ser considerados não apenas as características do método de solução, mas as peculiaridades das aplicações do problema. Em

busca de uma resposta minimamente adequada, iniciou-se um trabalho de pesquisa aprofundado que teve como ponto de partida os algoritmos de Ford e Fulkerson e de Busacker e Gowen.

Conhecer as vantagens e desvantagens de cada método de solução dos PFCM e suas variantes pode ser de relevância para solucionar alguma questão real que se enquadra nessa classe de problemas. Nesse contexto, a proposta dessa pesquisa científica é apresentar as peculiaridades dos dois algoritmos estudados e das aplicações onde cada um terá melhor desempenho.

A estrutura deste artigo esta organizada de modo a apresentar, primeiramente, alguns conceitos significativos para a compreensão dos assuntos abordados e definir o Problema de Fluxo de Custo Mínimo. Por fim, explicar a estrutura dos algoritmos, como eles desempenham o papel de construir uma solução para PFCM e apontar os resultados e conclusões obtidos no decorrer do estudo.

## 2. CONCEITOS

Para compreender adequadamente os PFCM e os Algoritmos de Ford e Fulkerson e de Busacker e Gowen é necessário revisar alguns conceitos. Pois como explica Ahuja et al. (1993) os Problemas de Fluxo de Rede (PFR) acoplam conteúdo intelectual profundo com uma notável gama de aplicabilidade que englobam milhares de aplicações em campos como a química, a física, redes de computadores, a maioria dos ramos de engenharia, fabricação, políticas públicas, sistemas sociais, agendamento, encaminhamento, telecomunicações e transporte.

Os PFR fazem parte do cotidiano, uma vez que diversas redes são utilizadas diariamente com uma infinidade de propósitos. Neste contexto, aparecem as redes elétricas, as redes telefônicas, as redes ferroviárias, hidroviárias e rodoviárias, as redes de computadores (como a própria internet), as redes de distribuição (como os correios) e até mesmo as redes de suprimento. Não é exagero a afirmação de Ahuja et al. (1993) de que em todos os lugares que olhamos em nossas vidas diárias, as redes estão aparentes. Este fato é sinal de que este é um campo de vastos estudos e para melhor compreensão, é necessária a revisão de conceitos de grafos e de redes.

O conceito de grafo para Feofiloff et al. (2011) é de que um grafo é um par  $(V, A)$  em que  $V$  é um conjunto arbitrário e  $A$  é um subconjunto formado por pares de  $V$ . Neste contexto, os elementos de  $V$  são chamados vértices ou nós e os de  $A$  são chamados arestas ou arcos desse modo um grafo  $G$  é representado pela equação 1.

$$G = (V, A) \tag{1}$$

É viável afirmar que o número de vértices no grafo será denotado por  $|V|$  e de arestas por  $|A|$ . A partir da compreensão do conceito acima mencionado, fica claro que um grafo é a representação apropriada para redes. Logo, é fácil constatar que "uma rede é um grafo com um ou mais valores associados a cada arco e algumas vezes ao nós"(Campos, 2012, p. 03) assim uma rede  $R$  é dada por:

$$R = (V, A, \alpha) \tag{2}$$

De modo que  $V$  continua a representar um conjunto de vértices e  $A$  um conjunto de aresta, mas é introduzido um terceiro conjunto  $\alpha$  que define parâmetros associados aos elementos do conjunto  $A$  e/ou do conjunto  $V$ .

Em todos os tipos de rede o objetivo é mover alguma entidade (eletricidade, produto de consumo, pessoa ou veículo, uma mensagem) de um ponto de origem para um ponto de destino,

e fazer da forma mais eficiente possível, tanto para prestar um bom serviço aos usuários da rede como para utilizar as instalações de transmissão de forma eficaz afim de poupar recursos (Magnanti & Orlin, 1993). As empresas de entrega, por exemplo, buscam rotas otimizadas que atendam as demandas de entrega com o menor custo.

Os valores do conjunto  $\alpha$  podem determinar capacidade de fluxo (mínimo e máximo), custo (distância, tempo, valor monetário) e fluxo corrente. Esses valores são considerados para calcular, nesta rede, o caminho mínimo, o fluxo máximo, a árvore mínima (uma rede interna que considera apenas os arcos de menos custo para manter todos os nós da rede ainda conectados), a melhor rota e o custo mínimo. Estes problemas de otimização de redes podem ser solucionados por algoritmos como o Algoritmo de Ford e Fulkerson ou o Algoritmo de Busacker e Gowen que serão abordados mais a frente.

### 3. PROBLEMAS DE FLUXO DE CUSTO MÍNIMO

Segundo Campos (2012) os Problemas de Fluxo de Custo Mínimo (PFCM) possuem papel importante quando se aborda otimização em redes. Estes problemas são complexos e visam encontrar numa rede um conjunto de arestas que permitem que um fluxo percorra o caminho formado por eles, desde um ou mais nós de origem aos nós de destino de modo otimizado. Como bem nos assegura Derigs (1988), um Problema de Fluxo de Custo Mínimo é modelado matematicamente pela equação 3, se considerada uma rede em que  $n = |V|$  e  $m = |A|$  onde para cada arco  $ij \in A$  há um custo  $c_{ij}$  e uma capacidade limitante  $u_{ij} \geq 0$  associada.

$$\min \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (3)$$

Tendo em vista que para cada nó  $i \in V$  há um valor  $b_i$  que representa a quantidade de recursos fluindo pelo nó e  $x_{ij}$  é o fluxo que corre de um nó  $i$  a um nó  $j$ . Logo a equação acima (Eq. 3) é sujeita as seguintes restrições:

$$\sum_{j:ij \in A} x_{ij} - \sum_{j:ji \in A} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in V \quad (4)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \text{ou} \quad l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall ij \in A \quad (5)$$

Importante atentar que  $l_{ij}$  será um limite inferior associado a cada arco, em sua ausência o limite de capacidade mínima de fluxo é dado como zero.

Os PFCM se ramificam em uma série de especializações, entre elas estão os Problemas de Fluxo Máximo (PFM). Estes por sua vez são problemas que tem por propósito maximizar o fluxo que circula numa rede de um dado ponto a outro. Os PFM consistem na equação 6 ainda sujeita as restrições da 4 e 5:

$$\max \sum_{ij \in A} x_{ij} \quad (6)$$

A equação 4 indica que o fluxo de um nó recebe é o mesmo que este nó envia, não podendo haver ganho ou perda de recursos nos nós da rede. Enquanto a restrição dada na equação 5 é de que o fluxo nos arcos devem respeitar um limite máximo  $u_{ij}$  e um limite mínimo  $l_{ij}$  ou 0.

Para Ahuja et al. (1993) os PFCM auxiliam a tarefa de encontrar formas eficientes de uso para uma série de redes. Os PFCM são uma classe de problemas da programação linear amplamente estudada devido à extensa gama de aplicações práticas que apresentam (Ahuja et al., 1993). Eles podem ser trabalhados com uma série de algoritmos e métodos principalmente, porque esses problemas são bastante genéricos e se ramificam em distintas especializações. Entre as especializações dos PFCM estão os Problemas do Caminho mais Curto, os Problemas de Fluxo Máximo, os Problemas de Atribuição, os Problemas de Transporte, os Problemas de Circulação, os Problemas de Fluxo de Custo Convexo, os Problemas de Fluxo Generalizado e os Problemas de Fluxo de Múltiplas Mercadorias.

É interessante entender os PFCM através da ilustração de uma aplicação real que se enquadra no contexto. As redes físicas são as mais comuns e as mais fáceis de compreender, dentre elas a mais presente no cotidiano, atualmente, é a grande rede de computadores conhecida como internet. A figura 1 demonstra a rede Ipê que é uma infraestrutura de rede Internet dedicada à comunidade acadêmica brasileira, sua infraestrutura engloba 28 Pontos de Presença (PoPs) sendo um por estado, exceto em Pernambuco que apresenta dois.

Como observado na figura 1, cada trecho da rede apresenta uma capacidade distinta. Aliando a isso o fato de que as distâncias entre os PoPs dos diferentes estados podem ser uma espécie de custo, tem-se uma rede (Fig. 2) onde é possível aplicar tanto o algoritmo de Ford e Fulkerson, para ver a vazão de informação máxima entre dois pontos da rede, quanto o Algoritmo de Busacker e Gowen, para ver o custo de manutenção da rede por onde flui o máximo fluxo entre dois nós. Os algoritmos de resolução dos PFCM podem portanto auxiliar na gestão dessa e de diversas outras redes.

Na representação da rede Ipê (Fig. 2) cada arco possui dois valores associados. O primeiro valor representa a capacidade do arco dado em Gb/s e o segundo valor a distância aproximada entre os Pops representados pelos nós. Ao considerar que, hipoteticamente, o valor de manutenção da rede é de um real para cada Gb/s por km do enlace anualmente, permite calcular facilmente o custo de manutenção do caminho de fluxo máximo entre dois Pops da rede Ipê com os algoritmos de Ford e Fulkerson e de Busacker e Gowen.

#### 4. ALGORITMO DE FORD E FULKERSON

O algoritmo de Ford Jr & Fulkerson (1955) é um algoritmo que soluciona o problema de fluxo máximo que é uma especialização de PFCM. Este algoritmo implementa o teorema de que se  $x$  é um fluxo que corre de uma origem  $s$  para um destino  $t$ , respeitando a capacidade do caminho, e a capacidade ociosa do nó  $t$  é igual a somatória da capacidade dos arcos de acesso a  $t$  por caminhos que não conectam  $s$  e  $t$ . Portanto esse algoritmo implementa o fluxo máximo na rede de  $s$  para  $t$  (Feofiloff, 2004).

Para Goldberg & Goldberg (2012) o algoritmo de Ford e Fulkerson facilita determinar o fluxo máximo de uma rede através da estratégia de busca iterativa de caminhos de aumento de fluxo partindo de um fluxo nulo ou mínimo. Este algoritmo realiza uma série de iterações onde encontra um caminho de aumento de fluxo e faz circular por tal caminho um fluxo que esgota o arco de menor capacidade do caminho e atualiza as capacidades dos arcos tal que  $c_{ij}^* = c_{ij} - x_{ij}$ . Quando não é mais possível encontrar um caminho de aumento de fluxo entre  $s$  e  $t$  o fluxo máximo foi alcançado.

Como bem nos assegura Campos (2012) e Hetland (2014), o algoritmo de Ford e Fulkerson é um algoritmo que faz uso de rotulação para definir rotas de aumento de fluxo. Esse processo ocorre do seguinte modo:

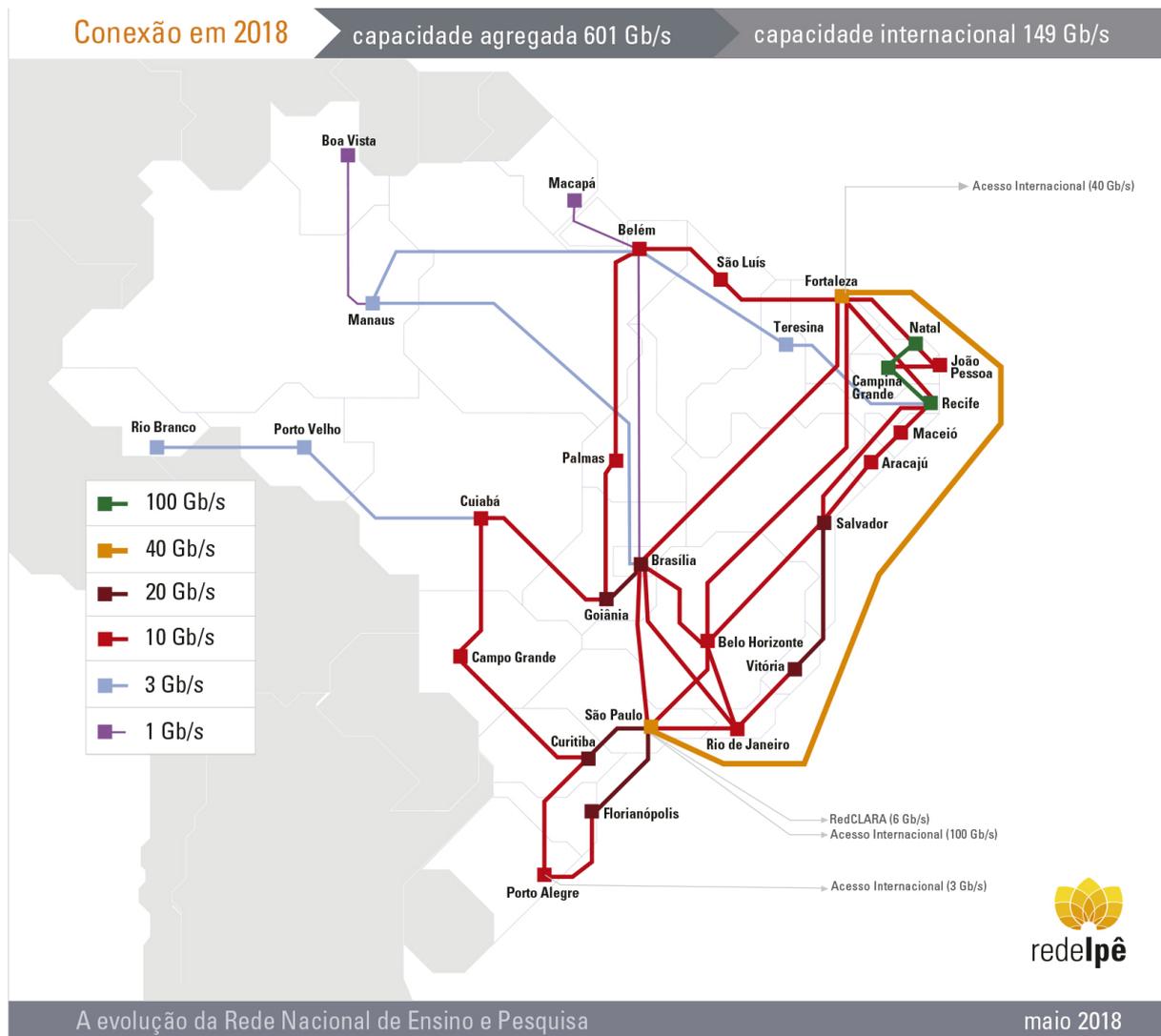


Figura 1- Mapa da rede Ipê  
Fonte: Rede Nacional de Ensino e Pesquisa (2018)

- 1 Se existe um caminho de aumento de fluxo partindo do nó origem para uma nó qualquer  $j$  então ele será rotulado, ou seja, quando um arco utilizável incide em  $j$  ele será rotulado.
- 2 Sendo  $i$  um nó rotulado, uma arco  $ij$  será utilizável se  $x_{ij} < u_{ij}$ , arco direto, ou se  $x_{ji} > u_{ij}$ , arco reverso.
- 3 Quando o nó de destino do fluxo for rotulado um caminho de aumento foi alcançado.

Como já apurado, o algoritmo de Ford e Fulkerson é aplicado a uma especificação de PFCM que são os PFM representados pela equação 6. Evidentemente terá desempenho satisfatório quando utilizado para solucionar aplicações onde o interesse é aumentar a vazão de fluxo na rede entre dois nós. Não é recomendado o uso desse algoritmo em redes de grande dimensão pois ele apresenta ordem de complexidade  $O(n^4CU)$ , onde  $n = |V|$ ,  $C = \text{arco de maior custo} \in A$  e  $U = \max x_{ij}u_{ij}$  (Kovács, 2015).

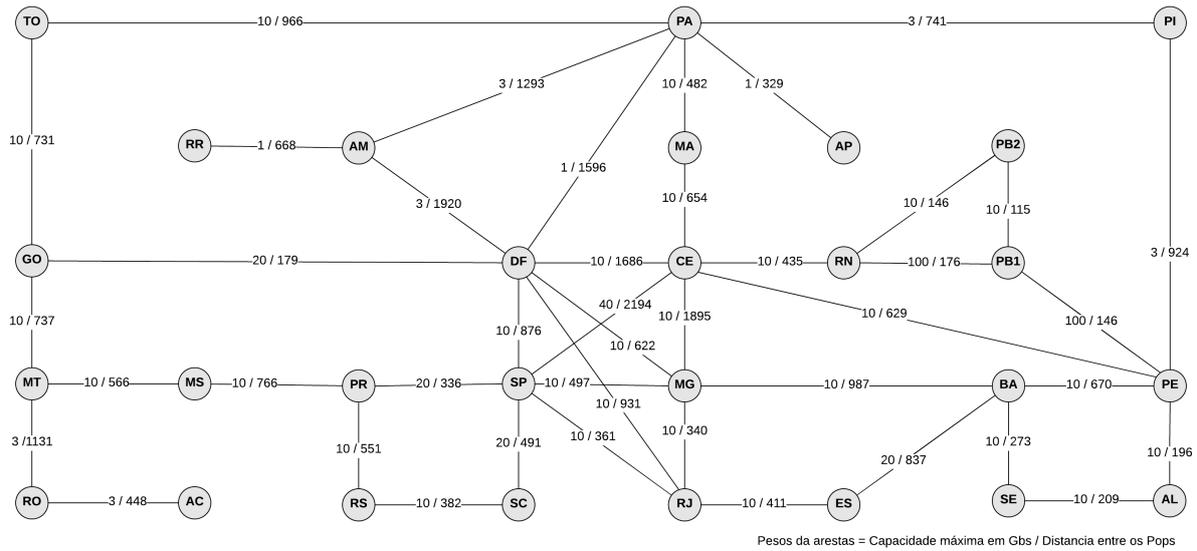


Figura 2- Grafo de representação da rede Ipê

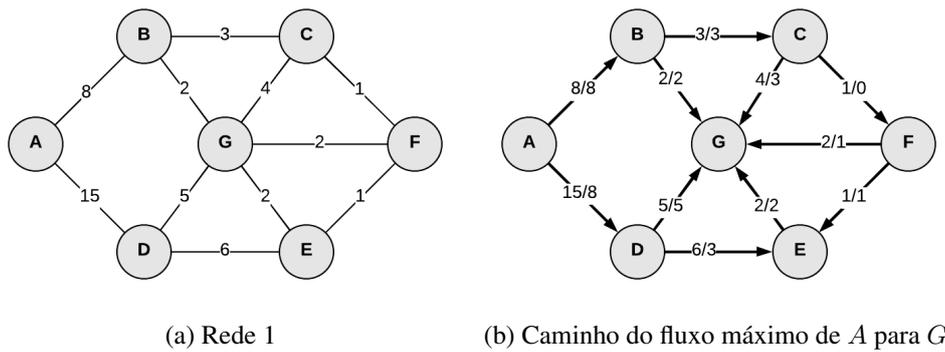


Figura 3- Exemplo de aplicação do Algoritmo de Ford e Fulkerson

Tabela 1- Iterações do Algoritmo Ford e Fulkerson para fluxo máximo entre os nós A e H da Rede 1

Iteração	Caminho incremental	$\Delta$ Fluxo	Fluxo Atual
0	$i \xrightarrow{x_{ij}} j$	—	0
1	$A \xrightarrow{8} B \xrightarrow{3} C \xrightarrow{3} G$	3	$0+3=3$
2	$A \xrightarrow{8} B \xrightarrow{3} A \xrightarrow{15} D \xrightarrow{5} G$	5	$3+5=8$
3	$A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{3} A \xrightarrow{12} D \xrightarrow{2} G$	2	$8+2=10$
4	$A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{3} A \xrightarrow{10} D \xrightarrow{6} E \xrightarrow{2} G$	2	$10+2=12$
5	$A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{3} A \xrightarrow{8} D \xrightarrow{4} E \xrightarrow{1} F \xrightarrow{1} G$	1	$12+1=13$
6	—	0	$13+0=13$

Na tabela 1 é possível ver o comportamento do algoritmo a partir da rede dada na Figura 3(a), em que há um valor de capacidade máxima associada a cada arco, tendo A como origem e

G como destino. O fluxo máximo neste caso é 13 e o resultado é vislumbrado na figura 5(b) onde aparece os valores de capacidade máxima dos arcos e o fluxo fluído por ele, respectivamente.

Ao aplicar este algoritmo na rede Ipê (Fig. 2) foi retornado como resultado o caminho em destaque na figura 4 por onde flui um fluxo máximo de 70 Gb/s com custo de manutenção de R\$ 194.430,00 por ano do estado do Ceará para o estado de São Paulo .

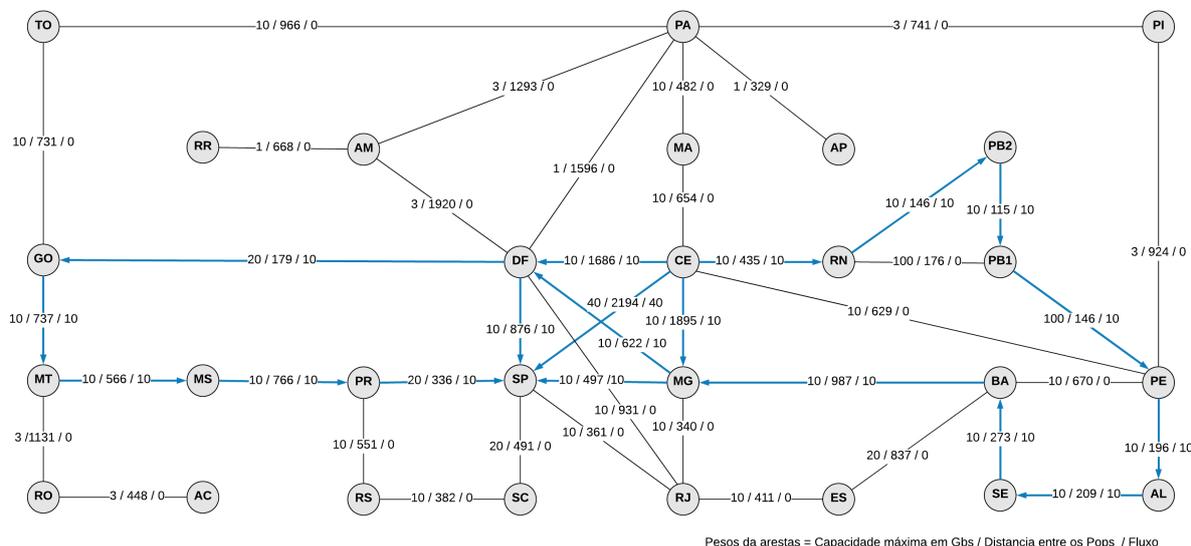


Figura 4- Caminho do fluxo máximo de Ceará para São Paulo na rede Ipê

## 5. ALGORITMO DE BUSACKER E GOWEN

O Algoritmo de Busacker & Gowen (1960) é uma criação dos autores de mesmo nome que tinham como designação realizar um estudo de planejamento estratégico assistido por computador para o Exército dos Estados Unidos da América. Um dos módulos desse estudo era sobre transporte onde surgiu o algoritmo que leva o nome dos dois autores. Como bem nos assegura Campos (2012), o Algoritmo de Busacker e Gowen é um procedimento iterativo que busca a cada iteração alocar o maior fluxo possível no caminho mínimo encontrado que liga os nós de origem e destino até o fluxo almejado ou o fluxo máximo esteja correndo na rede.

Para Witenberg (1999) o Algoritmo de Busacker e Gowen facilita solucionar problemas de tamanho reduzido uma vez que o funcionamento do algoritmo limita o tamanho das redes que podem ser resolvidas. Apesar de ser um algoritmo de fácil entendimento, ele tem a desvantagem de a cada iteração precisar reconstruir o grafo residual duplicando as arestas.

O algoritmo gera um grafo residual que serve de apoio na construção do caminho de custo mínimo. Acontecem uma série de iterações em que primeiramente o algoritmo busca por um caminho mínimo entre dois nós (origem e destino), não encontrando tal caminho o algoritmo para pois não há solução ou não há caminho de aumento de fluxo (a variância de fluxo é nula ou negativa), caso contrario será alocado o fluxo máximo que o caminho suporta. O passo seguinte é verificar se o fluxo solicitado no destinatário corresponde ao solicitado ou ao fluxo máximo, correspondendo o algoritmo para a execução se tal condição não for atingida, a rede residual é modificada em função do fluxo alocado em cada caminho encontrado e inicia uma nova execução.

O Algoritmo de Busaker e Gowen é aplicado para solucionar algumas das diversas aplicações dos PFCM, mas foi originalmente proposto para solucionar aplicações relacionadas a logística do exército americano e por isso tem um bom desempenho com aplicações de transporte.

Pode-se observar, um exemplo prático a partir da rede apresentada na figura 5(a) onde os arcos tem dois valores associados que são a capacidade de fluxo e o custo por unidade de fluxo, respectivamente. Considerando a necessidade de enviar o maior fluxo possível do nó *A* ao nó *H* o ciclo de execução ocorrerá conforme apresentado na tabela 2.

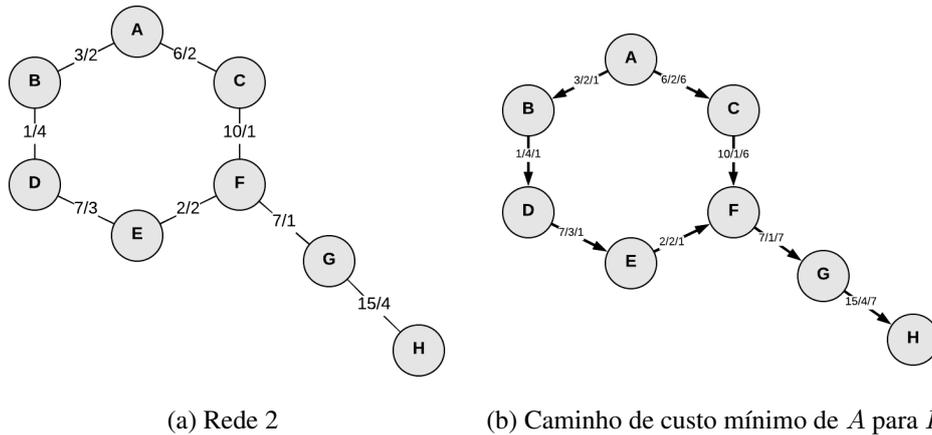


Figura 5- Exemplo de aplicação do Algoritmo de Busaker e Gowen

Tabela 2- Iterações do Algoritmo Busaker e Gowen para fluxo máximo entre os nós *A* e *H* da Rede 2

Iteração	Caminho incremental	Custo do Caminho	$\Delta$ do Fluxo	Fluxo
0	$i \xrightarrow{x_{ij}, c_{ij}} j$	—	—	0
1	$A \xrightarrow{6,2} C \xrightarrow{6,1} F \xrightarrow{6,1} G \xrightarrow{6,4} H$	48	6	0+6=6
2	$A \xrightarrow{3,2} B \xrightarrow{1,4} D \xrightarrow{1,3} E \xrightarrow{1,2} F \xrightarrow{1,1} G$	16	1	1+6=7
3	—	—	0	0+7=7

O resultado obtido ao fim das execuções descritas na tabela 2 é o caminho em destaque na figura 5(b), onde cada aresta recebe três valores que representam respectivamente a capacidade, o custo e o fluxo. O resultado demonstra o percurso de um fluxo igual a 7 com custo no valor de 64.

Um grafo residual é construído para a Rede 1 exatamente como a original com custo e capacidades iguais, ou seja,  $c^*_{ij} = c_{ij}$  e  $u^*_{ij} = u_{ij}$  mas com fluxo  $x_{ij} = 0$  atribuído a todos os arcos. A cada iteração esse grafo residual é reconstruído (Campos, 2012) considerando as seguintes regras:

- 1 Se existe um fluxo  $x_{ij} \neq 0$  alocado num arco de *i* para *j*, constrói-se um arco fictício de *j* para *i* onde  $u^*_{ji} = x_{ij}$ .
- 2 Associa-se ao arco fictício um custo  $c^*_{ji} = -c_{ij}$ , pois o uso desse arco fictício incorre em um retorno de fluxo pelo arco real.



## REFERÊNCIAS

- Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., & Orlin, J. B. (1993). *Network flows: Theory, algorithms, and applications* (1st ed.). Prentice Hall.
- Busacker, R. G., & Gowen, P. J. (1960). *A procedure for determining a family of minimum-cost network flow patterns* (Tech. Rep.). RESEARCH ANALYSIS CORP MCLEAN VA.
- Campos, V. B. G. (2012). Algoritmos para resolução de problemas em redes. *IME*, disponível em <http://aquarius.ime.ub.br/~webde2/prof/vania/apostilas/Apostila-Redes.pdf>, acessado em 27 de Julho de 2018.
- Derigs, U. (1988). *Programming in networks and graphs*. Springer.
- Feofiloff, P. (2004). Fluxo em redes. *Departamento de Ciência da Computação e Instituto de Matemática e Estatística, São Paulo*.
- Feofiloff, P., Kohayakawa, Y., & Wakabayashi, Y. (2011). Uma introdução sucinta à teoria dos grafos.
- Ford Jr, L. R., & Fulkerson, D. R. (1955). *A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the hitchcock problem* (Tech. Rep.). RAND CORP SANTA MONICA CA.
- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.
- Hetland, M. L. (2014). *Python algorithms: mastering basic algorithms in the python language*. Apress.
- Kovács, P. (2015). Minimum-cost flow algorithms: an experimental evaluation. *Optimization Methods and Software*, 30(1), 94–127.
- Magnanti, T. L., & Orlin, J. B. (1993). *Network flows*. PHI Englewood Cliffs NJ.
- Witenberg, J. P. (1999). *Métodos y modelos de investigación de operaciones* (Vol. 1). Editorial Limusa.

## PROBLEMS OF MAXIMUM FLOW AND MINIMUM COST: AN INTRODUCTION TO BUSACKER AND GOWEN AND FORD AND FULKERSON ALGORITHMS

**Abstract.** *This research started with the objective of analyzing the Minimum Cost Flow Problems and the resolution algorithms for such problems, the study was started by the algorithms of Ford Jr & Fulkerson (1955) and Busacker & Gowen (1960) algorithms. In order to do so, in addition to an in-depth bibliographic research, we used tests with fictitious instances, generated to validate the proposed models, and in the Ipê network, an Internet network dedicated to the Brazilian higher education and research community. From the data analysis it was possible to perceive the strengths and limitations of the algorithms studied. The results obtained with tests in the Ipê network point out that the algorithm of Busaker and Gowen has a better performance than Ford and Fulkerson in relation to the cost in a maximum flow path.*

**Keywords:** *Theory of Graphs, Maximum Flow, Minimum Cost, Ford and Fulkerson, Busacker and Gowen.*