



08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

MÉTODO DE VOLUMES FINITOS APLICADOS A PROBLEMAS DE INFILTRAÇÃO DA ÁGUA NO SOLO

Fábio Freitas Ferreira¹ - fabiofreitasferreira@id.uff.br

Marcelo de Oliveira Temperini² - marcelotemperini@id.uff.br

Gustavo Bastos Lyra³ - gblyra@gmail.com

Wagner Rambaldi Telles⁴ - wr_telles@yahoo.com.br

¹Departamento de Ciências da Natureza, IHS, UFF, Rio das Ostras, RJ, Brasil

²Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Biosistemas, UFF, Niterói, RJ, Brasil

³Departamento de Ciências Ambientais, Instituto de Florestas, UFRRJ, Seropédica, RJ, Brasil

⁴Departamento de Ciências Exatas, Biológicas e da Terra, PEB, UFF, Santo Antônio de Pádua, RJ, Brasil

Resumo. Problemas envolvendo infiltração da água no solo desperta interesse acadêmico desde o século passado. Atualmente dados da FAO, Food and Agriculture Organization, revelam grande desperdício desse precioso bem, principalmente na irrigação de solos já saturados. A saturação de água no solo pode ser determinada usando a Equação de Richards, que necessita de parâmetros empíricos, analisados em laboratório, o que demanda alto custo financeiro e de tempo. Os parâmetros dependem da textura do solo e características intrínsecas com alta variabilidade de profundidade e espaço. Neste trabalho são mostrados os resultados obtidos da solução da equação de Richards, aplicando o método de volumes finitos.

Keywords: Água, irrigação, equação de Richards, método volumes finitos

1. INTRODUÇÃO

Problemas que abordam a infiltração da água no solo são estudados frequentemente, Rebouças (2001). Em particular, os processos envolvidos para medir a umidade no solo, são influenciados por diversos fatores tais como, calor, extração de água do solo pelas raízes das plantas, drenagem, entre outros. Esse fatores podem ser considerados empíricos quanto matemáticos. Para medir esta umidade pode ser usado um equipamento chamado extrator de Richards, que gera resultados demorados e custosos.

O modelo matemático usado para determinar a infiltração da água em solo saturados é a equação de Richards, Richards (1931), a qual é uma combinação da equação de Buckingham-Darcy e a equação da continuidade, descritas a seguir.

1.1 Modelo matemático

A equação de Buckingham-Darcy é dada por

$$q = -K(\psi) \frac{\partial}{\partial z} (\psi - z) , \quad (1)$$

em que, q é o fluxo de água no solo ($cm\ d^{-1}$), $K(\psi)$ a condutividade hidráulica ($cm\ d^{-1}$), ψ é o potencial de água no solo (cm) e z é a coordenada vertical (cm).

Já a equação da continuidade aplicada a água no solo, Kroes et al. (2008), é dada por

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial z} , \quad (2)$$

em que, θ é o conteúdo volumétrico de água no solo ($cm^3\ cm^{-3}$); t o tempo (d).

Combinando as equações (1) e (2), tem-se a equação de Richards,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \frac{\partial (\psi - z)}{\partial z} \right] , \quad (3)$$

em que z é a coordenada vertical (cm), orientada para baixo da superfície.

Nos problemas de infiltração da água no solo existe uma relação entre o potencial hidráulico, ψ , e a umidade volumétrica da água no solo, θ . Esta relação, chamada de curva de retenção de água no solo, é necessária para a solução da equação de Richards. Na literatura, podem ser citados alguns autores que propuseram tais equações empíricas, como Gardner (1958), Brooks & Corey (1964), Campbell (1974), Haverkamp et al. (1977), van Genuchten (1980), Russo (1988), Fredlund & Xing, (1994) e Omuto (2009). Neste artigo usaremos o modelo proposto por Haverkamp et al. (1977), dado por

$$\theta(\psi) = \theta_r + \frac{B(\theta_s - \theta_r)}{B + |\psi|^\lambda} , \quad (4)$$

em que θ_s é o teor de umidade volumétrico na saturação (cm^3/cm^3); θ_r é o teor de umidade volumétrico residual (cm^3/cm^3); e λ é um índice relacionado a distribuição dos poros do solo (m).

Como θ é uma função de ψ , tem-se $\partial\theta/\partial t = \partial\theta/\partial\psi \cdot \partial\psi/\partial t$. Fazendo-se $C(\psi) = \partial\theta/\partial\psi$, obtem-se

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \frac{\partial (\psi - z)}{\partial z} \right] , \quad (5)$$

em que a condutividade hidráulica é dada por

$$K(\psi) = K_s \cdot \frac{A}{A + |\psi|^\phi} , \quad (6)$$

e a capacidade hídrica é dada por

$$C(\psi) = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = - \frac{B(\theta_s - \theta_r)\lambda|\psi|^{\lambda-1}\psi^{-1}}{(B + |\psi|^\lambda)^2} . \quad (7)$$

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Para resolver numericamente a equação de Richards foi utilizado o método de volumes finitos, no tempo e no espaço, Guterres (2013), Queiróz (2017) e Telles (2009). Obteve-se uma formulação implícita no espaço para obter a solução em cada instante de tempo. Na seção 2.1 apresenta-se a discretização das equações, e nas seção 3.1 é apresentado os resultados obtidos.

2.1 Discretização

Considere a equação descrita em (5), a qual pode ser reescrita como

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\psi)}{\partial z}. \quad (8)$$

Integrando a equação (8), no volume de controle apresentado na malha computacional descrita na figura 1, tem-se

$$\int_t^{t+1} \int_s^n C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} dz dt = \int_t^{t+1} \int_s^n \left(K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz dt - \int_t^{t+1} \int_s^n \frac{\partial K(\psi)}{\partial z} dz dt \quad (9)$$

Resolve-se as integrais dadas em (9), e obtém-se as equações para os volumes internos, ou seja, $j = 1, \dots, nz - 1$,

$$-A_S \psi_S^{t+1} + A_P \psi_P^{t+1} - A_N \psi_N^{t+1} = S_P \quad (10)$$

em que

$$\begin{aligned} A_S &= \frac{K_s^{t+1}(\psi_s^{t+1})}{\Delta Z_P \delta Z_s}, \\ A_N &= \frac{K_n^{t+1}(\psi_n^{t+1})}{\Delta Z_P \delta Z_N}, \\ A_P &= A_S + A_N + \frac{C_p^{t+1}(\psi_p^{t+1})}{\Delta t} \\ S_P &= \frac{C_P^{t+1}(\psi_P^{t+1}) \psi_P^t}{\Delta t} + \frac{K_s^{t+1}(\psi_s^{t+1})}{\Delta z_P} - \frac{K_n^{t+1}(\psi_n^{t+1})}{\Delta z_P} \end{aligned}$$

As condições de contorno são calculadas de forma genérica, flexibilizando a aplicação do modelo, dadas por,

$$a \psi_f' + b \psi_f = c. \quad (11)$$

Na Tabela 1 são apresentados os valores dos parâmetros a , b e c , presentes na equação 11, os quais variam de acordo com a condição de contorno desejada. Enquanto na Figura 1 é mostrada a discretização do domínio espacial na coordenada cartesiana z .

Para o contorno na face $S(j = 0)$, tem-se,

$$a_s \psi_{f_s}' + b_s \psi_{f_s} = C_s \quad (12)$$

$$A_P \psi_P^{t+1} - A_N \psi_N^{t+1} = S_P \quad (13)$$

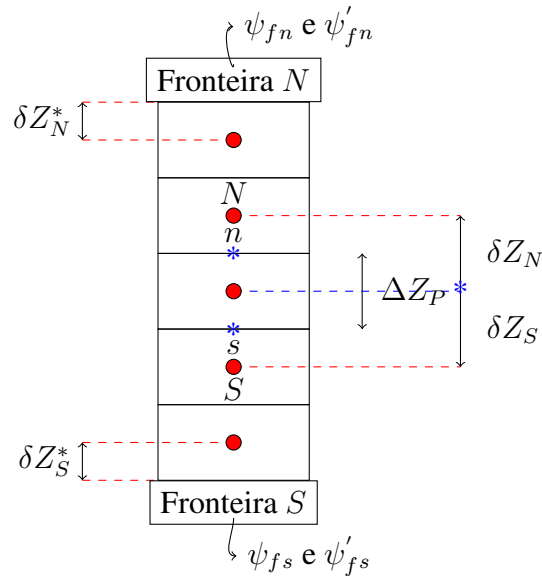


Figura 1- Malha computacional.

Tabela 1- Condições de contorno.

| Coefficientes | Dirichlet | Newmann | Robin |
|---------------|-----------|-----------|----------|
| a | 0 | 1 | $\neq 0$ |
| b | 1 | 0 | $\neq 0$ |
| c | constante | constante | $\neq 0$ |

em que

$$A_N = \frac{K_n^{t+1}(\psi_n^{t+1})}{\Delta Z_P \delta Z_N}$$

$$A_P = -\frac{K_{fs}(\psi_{fs})b_s}{\Delta Z_P(a_s - b_s \delta Z_S^*)} + A_N + \frac{C_P^{t+1}(\psi_P^{t+1})}{\Delta t}$$

$$S_P = \frac{C_P^{t+1}(\psi_P^{t+1})\psi_P^t}{\Delta t} + \frac{K_{fs}(\psi_{fs})}{\Delta Z_P} - \frac{K_n^{t+1}(\psi_n^{t+1})}{\Delta Z_P} - \frac{K_{fs}(\psi_{fs})C_s}{\Delta Z_P(a_s - b_s \delta Z_S^*)}$$

Para o contorno em $N(j = nz)$, tem-se

$$a_n \psi'_{fs} + b_n \psi_{fn} = C_n \quad (14)$$

$$-A_S \psi_S^{t+1} + A_P \psi_P^{t+1} = S_P \quad (15)$$

em que

$$A_S = \frac{K_s^{t+1}(\psi_s^{t+1})}{\Delta Z_P \delta Z_S}$$

$$A_P = A_S + \frac{K_{fn}(\psi_{fn})b_n}{\Delta Z_P(a_n \pm b_n \delta Z_N^*)} + \frac{C_P^{t+1}(\psi_P^{t+1})}{\Delta t}$$

$$S_P = \frac{C_P^{t+1}(\psi_P^{t+1})(\psi_P^t)}{\Delta t} + \frac{K_s^{t+1}(\psi_s^{t+1})}{\Delta Z_P} - \frac{K_{fn}(\psi_{fn})}{\Delta Z_P} + \frac{K_{fn}(\psi_{fn})C_n}{\Delta Z_P(a_n \pm b_n \delta Z_N^*)}$$

A Condutividade hidráulica avaliada nas faces N e S , é dada por

$$K_s(\psi_s) = \sqrt{K_P(\psi_P)K_S(\psi_S)} \quad (16)$$

$$K_n(\psi_n) = \sqrt{K_N(\psi_N)K_P(\psi_P)} \quad (17)$$

A esquações (10), (12), (13), (14) e (15), formam um sistema de equações lineares, $Ax = b$, cuja matriz do sistema A é tridiagonal, a qual é resolvida utilizando o algoritmo de Thomas ou TDMA (do inglês Tridiagonal Matrix Algorithm),

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & A_S & A_P & A_N & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \cdot$$

3. RESULTADOS

O código computacional para resolver o sistema obtido com a discretização da equação de Richards por volumes finitos foi desenvolvido no software SciLab. Para validar o código utilizou-se o problema abordado por Guterres (2013) e Haverkamp et al. (1977).

3.1 Caso teste

Neste caso considerou-se uma profundidade de 100 cm, $Lz = 100$ cm, tempos de 360 s, 720 s 2880 s, e condições do tipo Dirichlet. As condições são descritas a seguir.

$$\begin{cases} \psi(Z, 0) &= -61,50 \text{ cm}, 0 < z < Lz \\ \psi(0, t) &= -20,73 \text{ cm}, t > 0 \\ \psi(L_z, t) &= -61,50 \text{ cm}, t > 0 \end{cases} \quad (18)$$

Considere-se os valores dos parâmetros do problema, $K_s = 9,44 \times 10^{-3}$; $A = 1,19 \times 10^6$; $\phi = 4,74$; $B = 1,611 \times 10^6$; $\lambda = 3,96$; $\theta_r = 0,075$ e $\theta_s = 0,287$.

Para verificar a precisão da solução, calcula-se a norma $N_2 = \sqrt{\sum (\theta - \theta_{exp})^2 / N_z}$, em que N_z é o número de pontos da malha.

Na figura 2, observa-se as soluções, para $\Delta t = 1s$, da umidade volumétrica do solo e o potencial hídrico, obtidas e a solução de Guterres (2013). Foi obtido $N_2 = 1,17 \times 10^{-3}$, para a umidade volumétrica do solo, veja a figura 3, e $N_2 = 6,18 \times 10^{-1}$ para o potencial hídrico.

Na figura 4, observa-se a solução, para a umidade volumétrica do solo e o potencial hídrico, obtida, com $\Delta t = 10s$, simulando 6, 12 e 48 minutos de simulação, e compara com a solução de Guterres (2013). Observa-se que a para a umidade volumétrico do solo obtemos a norma $R2 = 3,2 \times 10^{-3}$, e para o potencial hídrico temos $R2 = 6,6 \times 10^{-1}$, veja figura 5.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho obteve-se a discretização da equação de Richards através do método de volumes finitos. Utilizou-se o software SciLab para implementação do algoritmo resultante. Os

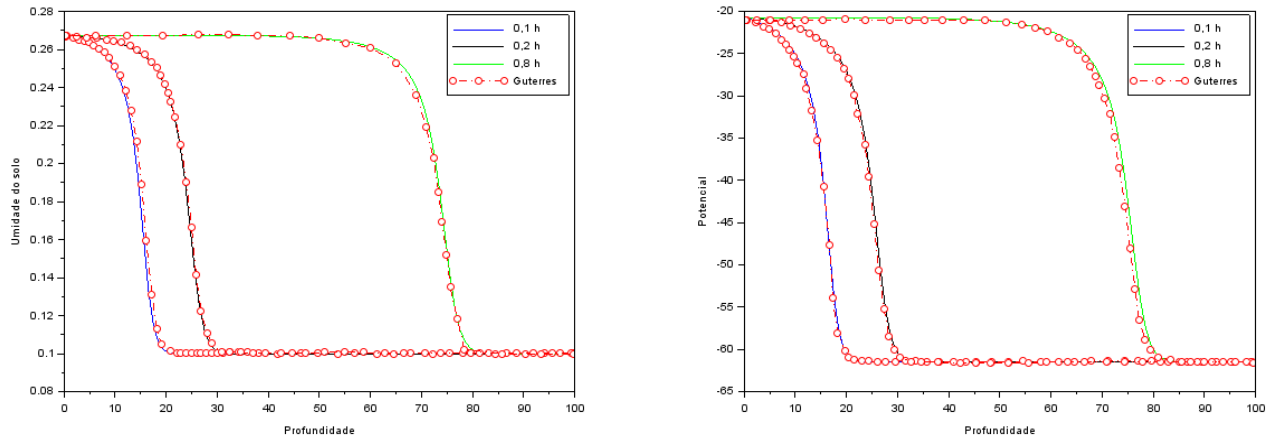


Figura 2- Solução para 6, 12 e 48 minutos, com $\Delta t = 1s$.

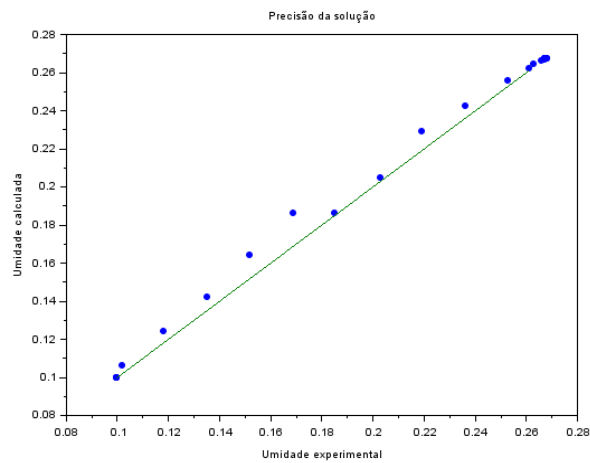


Figura 3- Precisão da solução, com $\Delta t = 1s$.

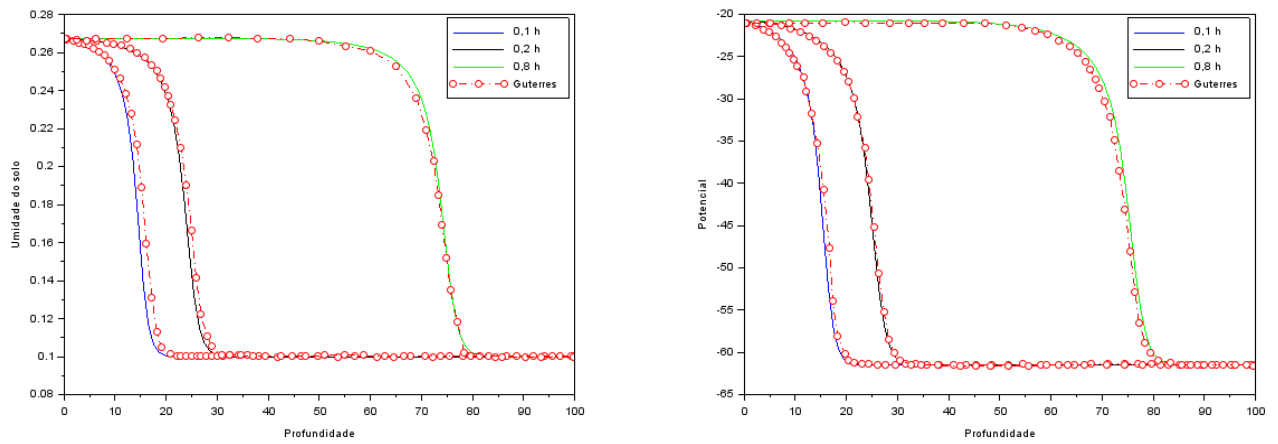


Figura 4- Solução para 6, 12 e 48 minutos, com $\Delta t = 10s$.

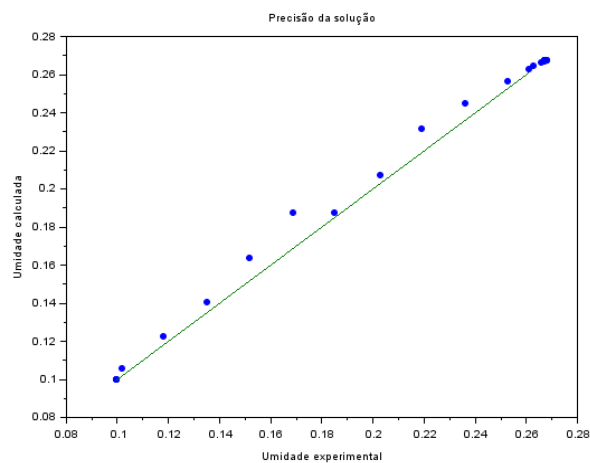


Figura 5- Precisão da solução, com $\Delta t = 10s$.

resultados obtidos foram satisfatórios conforme apresentados na seção 3.1. Este artigo faz parte de um projeto de dissertação de mestrado, onde serão determinados os parâmetros da curva de retenção da água no solo através de modelagem inversa utilizando-se o método de Luus Jaakola, Telles (2014).

REFERÊNCIAS

- Brooks, R. H, Corey, A. T. (1964), “Hydraulic properties of porous media”, *Hydrology Papers*, Colorado State University, March.
- Campbell, G. S. (1974), “A simple method for determining unsaturated conductivity from moisture retention data”, *Soil Science*, vol 117, 6, 311-314.
- Fredlund, D. G., Xing, A. (1994), “Equations for the soil-water characteristic curve”, *Canadian Geotechnical Journal*, vol 31, 4, 521-532.
- Gardner, W. R. (1958), “Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table”, *Soil science*, vol 85, 4, 228-232.
- Guterres, M. X. (2013), “Avaliação dos algoritmos de Picard-Krylov e Newton-Krylov na solução da equação de Richards”, Tese de Doutorado, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo.
- Haverkamp, R., Vauclin, M., Touma, J., Wierenga, P. J., Vachaud, G. (1977), “A comparison of numerical simulation models for one-dimensional infiltration”, *Soil Science Society of America Journal*, vol 41, 2, 285-294.
- Kroes, J. G., van Dam, J. C., Groenendijk, P., Hendriks, R. F. A., Jacobs, C. M. J. (2008), “SWAP version 3.2. Theory description and user manual”, *Alterra Report1649(02)*, Wageningen, Alterra, ISSN 1566-7197.
- Omuto, C. T. (2009), “Biexponential model for water retention characteristics”, *Geoderma*, vol 149, 3, 235–242.
- Queiróz, B. F. (2017), “Estudo de soluções numéricas da equação de Richards através do método de elementos finitos e diferenças finitas para simulação de fluxo unidimensional em solo não-saturado”, Dissertação de Mestrado, ICE/PGMMC/UFRRJ, Seropédica.
- Rebouças, A. da C. (2001), “Água e desenvolvimento rural”, *Estudos Avançados*, vol 15, 43, São Paulo.
- Richards, L. A. (1931), “Capillary conduction of liquids through porous mediums”, *Journal of Applied Physics*, 1, 318, DOI: 10.1063/1.1745010.
- Russo, D. (1988), “Determining soil hydraulic properties by parameter estimation: On the selection of a model for the hydraulic properties”, *Water Resources Research*, vol 24, 3, 453–459.
- Sadeghi, M., et al. (2011), “Scaling to generalize a single solution of Richards equation for soil water redistribution”, *Sci. Agric.*, vol 68, 5, 582-591.
- Telles, W. B. (2009), “Simulação do transporte horizontal bidimensional de substância conservativa”, Dissertação de Mestrado, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo.
- Telles, W. B. (2014), “Previsão do comportamento hidráulico de um rio com base na estimativa de coeficientes que controlam seu escoamento. Estudo de caso: Rio Bengalas, Nova Friburgo-RJ”, Tese de Doutorado, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo.
- van Genuchten, M. T., “A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils”, *Soil Science Society of America Journal*, 44 (5), 892-898.

APÊNDICE

FINITE VOLUME METHOD APPLIED TO SOIL WATER INFILTRATION PROBLEMS

Abstract. *Problems involving water infiltration in the soil have been arousing academic interest since the last century. Currently UN data reveal a great waste of this precious good, especially in the irrigation of already saturated soils. Soil water saturation can be measured using the Richards Equation, which requires empirical parameters, analyzed in the laboratory, demanding a high financial and time cost. The parameters depend on soil texture and intrinsic characteristics with high depth and space variability. We will show the results obtained from the solution of the Richards equation, applying the finite volume method.*

Keywords: *Water, irrigation, Richards equation, finite volume method*