

08 a 11 de Outubro de 2018  
Instituto Federal Fluminense  
Búzios - RJ

## ANÁLISE INVERSA DA DINÂMICA POPULACIONAL DIFUSIVA COM ABATE IMPULSIVO VIA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA, MODELO DE ERRO DE APROXIMAÇÃO E INFERÊNCIA BAYESIANA

**Maiquison dos Santos Friguis**<sup>1</sup> – maiquison.friguis@iff.edu.br

**Diego Campos Knupp**<sup>2</sup> – diegoknupp@gmail.com

**Luiz da Silva Abreu**<sup>2</sup> - luiz.abreu@iprj.uerj.br

**Antônio J. da Silva Neto**<sup>2</sup> – ajsneto@iprj.uerj.br

<sup>1</sup>Instituto Federal Fluminense, *Campus* Cabo Frio – Cabo Frio, RJ, Brazil

<sup>2</sup> Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico – Nova Friburgo, RJ, Brazil

**Resumo.** Este trabalho aborda a análise dos problemas direto e inverso considerando adifusão de uma população com taxas de natalidade e mortalidade logísticas e com abate implusivo. A formulação e solução do problema direto levou em consideração o formalismo da técnica de transformada integral generalizada. Para redução do tempo computacional na solução do problema direto foi proposta uma solução de baixa ordem utilizando o modelo reduzido. O problema inverso foi formulado utilizando uma abordagem Bayesiana junto ao modelo de erro de aproximação.

**Palavras-chaves:** Dinâmica Populacional, Transformada Integral, Inferência Bayesiana, Modelo de Erro de Aproximação

### 1. INTRODUÇÃO

O controle populacional é uma questão muito relevante, principalmente quando relacionado a espécies que podem atuar como vetores de doenças. Assim, a compreensão e modelagem precisa da dinâmica populacional é essencial para a implementação de políticas públicas de controle da disseminação dessas doenças. Sempre que se fala em modelagem populacional os trabalhos de Malthus (1798) e Verhulst (1838) são tidos como os pioneiros, porém atualmente existem muitos outros trabalhos que apresentam diferentes formulações para a análise da dinâmica populacional, considerando diferentes fenômenos, tais como: (i) dispersão (Skellam, 1951), (ii) competição entre espécies (Okubo, 1980), (iii) presença de substâncias tóxicas, locais de descarte e outros fatores que podem afetar as taxas de nascimento, mortalidade e migração (Feng e Lu, 1999; Simons e Gourley, 2006; Su et al., 2009). A maioria destes trabalhos traz

novas formulações, análises de estabilidade e soluções, analíticas ou numéricas, para os modelos derivados. A fim de alcançar a integração desta teoria com a prática, é de suma importância caracterizar a população (espécie) de interesse dentro de um determinado modelo, ou seja, calibrar os parâmetros do modelo de tal forma que o comportamento da população em estudo seja precisamente modelado. Isto pode ser conseguido por meio de uma análise inversa do problema (Knupp et al., 2015). A análise do problema inverso, muitas vezes requer uma metodologia precisa e boa eficiência computacional na solução do problema direto (Neto e Silva Neto, 2012). Neste sentido, a técnica de transformada integral generalizada (GITT) é uma das mais adequadas para este tipo de problema. A GITT pode ser vista como a expansão da teoria clássica, que permite ir além dos sete problemas colocados na formulação clássica (Özsisik e Mikhailov, 1994 ; Özsisik et al 2002). A principal vantagem deste método sobre os métodos puramente numéricos reside no controle da precisão global, altamente requerida em soluções de benchmark. Porém esta técnica ainda apresenta dificuldades quando se destina a tratar de problemas com geometrias complexas, tal fato é hoje em dia uma das principais áreas de pesquisa na GITT (Alifanov 1994; Cotta, 1990; Cotta, 1993; Cotta e Mikhailov 1997; Cotta, 1998; Knupp, 2010; Naveira Cotta, 2009). Na formulação e solução do problema inverso por meio da abordagem Bayesiana, o objetivo é usar o máximo de informação disponível para reduzir as incertezas. À medida que novas informações são obtidas, são combinadas com informações já existentes para formar uma base para procedimentos estatísticos. O mecanismo formal usado para combinar uma nova informação com a informação disponível é o teorema de Bayes (Kaipio e Somersalo, 2004). Este trabalho tem como objetivo a análise e solução do problema direto por GITT, viabilizando uma solução reduzida de baixo custo computacional para ser utilizada no método Bayesiano de Monte Carlo via Cadeias de Markov, um método de amostragem aleatória que necessita de um grande número de simulações.

## 2. FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA DIRETO

Considere uma população difusiva definida em  $[0, L]$  com densidade dada por  $u$ , modelada segundo a lei de Fick com coeficiente de dispersão constante  $D$ , atraso no tempo de reprodução  $\tau$ , taxa de morte prematura  $\mu$  e taxas de natalidade e mortalidade natural  $b(u)$  e  $d(u)$ , respectivamente, considere ainda armadilhas impulsivas com intensidade  $B_j$  posicionadas em pontos discretos do domínio  $x_j$ . A equação que modela esse problema é dada por (White, 2009):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-\mu\tau} b(u) - d(u) - \sum_{j=1}^{N_{cs}} B_j u(x_j, t) \delta(x - x_j), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (1)$$

em que  $N_{cs}$  representa o número total de armadilhas e  $\delta$  é o delta de Dirac.

A condição inicial é dada por:

$$u(x, t) = u_0(x, t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (2)$$

As condições de contorno de Neumann são:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (3)$$

As taxas de natalidade e mortalidade são, respectivamente (White, 2009):

$$b(u) = \frac{u(x,t-\tau)}{K+Cu(x,t-\tau)}, \quad (4)$$

$$d(u) = \frac{Pu(x,t)^2}{K+Cu(x,t-\tau)}, \quad (5)$$

em que  $P, K$  e  $C$  são parâmetros do modelo de crescimento logístico.

O problema definido acima é altamente não linear e não possui solução analítica, mesmo quando considerado o formalismo das transformações integrais clássicas (Özisik e Mikhailov, 1984). Uma alternativa à solução exclusivamente numérica é a utilização da técnica de transformada integral generalizada (GIT) (Cotta, 1990). O formalismo dessa técnica inicia-se definindo o par de transformação.

$$\text{Transform:} \quad \bar{u}_i(t) = \int_0^L u(x,t) \tilde{\psi}_i(x) dx. \quad (6)$$

$$\text{Inverse:} \quad u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(x) \bar{u}_i(t),$$

em que  $\tilde{\psi}_i(x)$  são as autofunções normalizadas

$$\tilde{\psi}_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\sqrt{N_i}}, \quad (7)$$

com as integrais de normalização  $N_i$ , dadas por:

$$N_i = \int_0^L \psi_i^2(x) dx. \quad (8)$$

A técnica de separação de variáveis aplicada à versão homogênea linear do problema leva ao seguinte problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} D \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} + \lambda^2 \psi_i(x) = 0 \\ \frac{d\psi_i(0)}{dx} = \frac{d\psi_i(L)}{dx} = 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Aplicando o operador  $\int_0^L \tilde{\psi}_i(x) (\cdot) dx$  e o par Transformada-Inversa obtém-se o seguinte sistema infinito e acoplado de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d\bar{u}_i(t)}{dt} + \lambda_i^2 \bar{u}_i(t) = \bar{g}_i(t, \mathbf{u}), \quad (10)$$

com

$$\mathbf{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N), \quad (11)$$

e

$$\bar{g}_i(t, \mathbf{u}) = \bar{g}_{i,1}(t, \mathbf{u}) + \bar{g}_{i,2}(t, \mathbf{u}) + \bar{g}_{i,3}(t, \mathbf{u}), \quad (12)$$

com

$$\bar{g}_{i,1} = \int_0^L \frac{\tilde{\psi}_i(x) e^{-\mu\tau} \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t-\tau) \tilde{\psi}_i(x)}{K+C \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t-\tau) \tilde{\psi}_i(x)} dx, \quad (13)$$

$$\bar{g}_{i,2} = \int_0^L \frac{\tilde{\psi}_i(x) P \left( \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t) \tilde{\psi}_i(x) \right)^2}{K+C \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t-\tau) \tilde{\psi}_i(x)} dx, \quad (14)$$

$$\bar{g}_{i,3} = \sum_{k=1}^{N_{cs}} B_k \tilde{\psi}_i(x_k) \left( \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t) \tilde{\psi}_j(x_k) \right). \quad (15)$$

com a condição inicial transformada por:

$$\bar{u}_i(t) = \int_0^L \tilde{\psi}_i(x) u_0(x, t) dx, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

Buscando reduzir o tempo computacional gasto na solução do problema direto foi empregado o uso de um modelo reduzido para calcular  $\bar{g}_i$  fazendo a seguinte alteração.

$$\bar{g}_{i,1} = \int_0^L \frac{\tilde{\psi}_i(x) e^{-\mu\tau} \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t-\tau) \tilde{\psi}_i(x)}{K+C \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t-\tau) \tilde{\psi}_i(x)} dx \approx \int_0^L \frac{\tilde{\psi}_i(x) e^{-\mu\tau} \sum_{j=1}^{N_R} \bar{u}_j(t-\tau) \tilde{\psi}_i(x)}{K+C \sum_{j=1}^{N_R} \bar{u}_j(t-\tau) \tilde{\psi}_i(x)} dx, \quad (17)$$

e

$$\bar{g}_{i,2} = \int_0^L \frac{\tilde{\psi}_i(x) P \left( \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t) \tilde{\psi}_i(x) \right)^2}{K+C \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t-\tau) \tilde{\psi}_i(x)} dx \approx \int_0^L \frac{\tilde{\psi}_i(x) P \left( \sum_{j=1}^{N_R} \bar{u}_j(t) \tilde{\psi}_i(x) \right)^2}{K+C \sum_{j=1}^{N_R} \bar{u}_j(t-\tau) \tilde{\psi}_i(x)} dx. \quad (18)$$

### 3. FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

No tratamento Bayesiano do erro de aproximação, todos os parâmetros desconhecidos são modelados como uma variável aleatória. Incertezas de medição e modelagem e o grau de incerteza são avaliados separadamente, ou seja, as propriedades estatísticas de ambos os erros podem ser acopladas ao problema inverso. Dessa forma pode-se utilizar um modelo reduzido para resolver o problema inverso desde que as incertezas referentes ao modelo completo sejam levadas em consideração. O problema inverso aqui estudado tem como objetivo estimar os parâmetros de um modelo de dispersão populacional difusivo com taxas de natalidade e mortalidade logísticas e abate impulsivo em certos pontos do domínio espacial em uma dimensão.

Na abordagem Bayesiana, tenta-se utilizar o máximo de informações disponíveis com o objetivo de reduzir as incertezas presentes na inferência. Nesse tipo de abordagem leva-se em consideração os seguintes princípios (Kaipio & Somersalo, 2004):

- Todas as variáveis incluídas no modelo são modeladas como variáveis aleatórias.
- A aleatoriedade descreve o grau de informação sobre as suas realizações.
- O grau de informação relativa a estes valores é codificado em termo de distribuições de probabilidades.
- A solução do problema inverso é a distribuição de probabilidade posterior.

Na solução do problema inverso considerando apenas o erro convencional, onde geralmente considera-se medidas modeladas com erros aditivos gaussianos, tem-se.

$$\mathbf{Y} = U_C(\mathbf{P}) + e, \quad (19)$$

em que  $U_C(\mathbf{P})$  é considerada a solução do problema direto, tida com solução que melhor representa a natureza do problema e  $e$  é modelado por uma distribuição normal centrada em zero com desvio padrão  $\sigma_e$ .

Por outro lado, no modelo de erro de aproximação o erro de modelagem é tratado como um ruído adicional ao modelo de erro convencional. A modelagem do erro de aproximação pode ser vista como (Nissinen et al., 2007).

$$\mathbf{Y} = U_R(\mathbf{P}) + [U_C(\mathbf{P}) - U_R(\mathbf{P})] + e, \quad (20)$$

em que  $U_R(\mathbf{P})$  é a solução do problema considerando o modelo aproximado. Definindo

$$\epsilon(\mathbf{P}) = U_C(\mathbf{P}) - U_R(\mathbf{P}), \quad (21)$$

a modelagem do erro de aproximação pode ser escrita como.

$$\mathbf{Y} = U_R(\mathbf{P}) + \eta(\mathbf{P}), \quad (22)$$

definindo  $\eta(\mathbf{P}) = \epsilon(\mathbf{P}) + e$ .

Considerando conhecida alguma informação a priori sobre  $\mathbf{P}$ , esta pode ser modelada por uma densidade de probabilidade  $\pi(\mathbf{P})$ . Assim, a distribuição de probabilidade a posteriori é dada pelo Teorema de Bayes.

$$\pi(\mathbf{P}/\mathbf{Y}) = \frac{\pi(\mathbf{P})\pi(\mathbf{Y}/\mathbf{P})}{\pi(\mathbf{Y})}, \quad (23)$$

em que  $\pi(\mathbf{P}/\mathbf{Y})$  é a densidade de probabilidade a posteriori,  $\pi(\mathbf{P})$  é a informação a priori,  $\pi(\mathbf{Y}/\mathbf{P})$  é a função de verossimilhança e  $\pi(\mathbf{Y})$  é a densidade marginal, funcionando, neste caso, como uma constante de normalização.

Para chegar a uma distribuição a posteriori é necessário conhecer a verossimilhança, que para o modelo de erro convencional é dada por (Kaipio e Somersalo, 2004).

$$\pi(\mathbf{Y}/\mathbf{P}) = 2\pi^{-\frac{N_d}{2}} |\mathbf{W}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{R}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{R}}, \quad (24)$$

onde  $\mathbf{W}$  é a matriz de covariância e  $\mathbf{R} = \mathbf{Y} - U_C(\mathbf{P})$  é o vetor residual. Por outro lado, para o modelo de erro de aproximação a verossimilhança é dada por (Kaipio e Somersalo, 2004).

$$\pi(\mathbf{Y}/\mathbf{P}) = 2\pi^{-\frac{N_d}{2}} |\mathbf{W}_*|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{R}_*^T \mathbf{W}_*^{-1} \mathbf{R}_*}, \quad (25)$$

com a matriz de covariância  $\mathbf{W}_* = \mathbf{W}_\epsilon + \mathbf{W}$  e o vetor residual  $\mathbf{R}_* = \mathbf{Y} - U_R(\mathbf{P}) - \bar{\eta}(\mathbf{P})$ . Observe que  $\bar{\eta}(\mathbf{P})$  é obtido pela soma das médias de  $\epsilon(\mathbf{P})$  e  $e$ .

Para este trabalho as estatísticas do erro de aproximação foram obtidas considerando.

1. Gerar  $N_S$  amostras para os parâmetros  $\mathbf{P} = \{D, P, K, C, B\}$ .
2. Calcular as soluções  $U_C(\mathbf{P})$  e  $U_R(\mathbf{P})$  considerando cada amostra de  $\mathbf{P}$ .
3. Calcular  $N_S$  amostras para o erro de modelagem  $\epsilon(\mathbf{P}) = U_C(\mathbf{P}) - U_R(\mathbf{P})$ .
4. Calcular a média e covariância para  $\epsilon(\mathbf{P})$

Para explorar a distribuição a posteriori foi usado o método de amostragem aleatória de Monte Carlo via Cadeias de Markov utilizando o algoritmo Metropolis-Hastings (Kaipio e Somersalo 2004).

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Tomando como base os casos investigados por White (2009), foram escolhidos os parâmetros para implementar a solução do problema direto.

Tabela 1- Parâmetros para solução do Problema Direto

$D = 0,0001$	$P = 0,001$	$K = 1$	$C = 0,5$	$B = 0,001$
$\mu = 0$	$\tau = 10$	$L = 1$	$U_0(x, t) = 1$	

A solução do problema direto depende basicamente de dois parâmetros de controle, a ordem de truncamento  $N$  e o número de sub-regiões na integração semianalítica  $M$ . Vale ressaltar que no modelo reduzido considera-se uma outra ordem de truncamento  $N_R < N$ , que neste trabalho foi estabelecida como  $N_R = 1$ . Considerando  $N = \{10, 30, 50, 80, 100\}$  e  $M = \{30, 60\}$  pode-se observar a análise de convergência na Tabela 2. Na Figura 1 pode-se observar o perfil da solução considerando diferentes tempos, nota-se um bom ajuste no centro do domínio espacial.

Antes da solução do problema inverso, caracterizou-se o erro de aproximação para isso foram utilizadas  $N_s = 1000$  amostras do vetor de parâmetros utilizando uma distribuição normal multivariada com média e desvio padrão baseados em Friguís (2015), onde para cada vetor de parâmetros foi calculada uma solução considerando o modelo reduzido com  $N_R = 1$  e o modelo completo considerando  $N = 20$  e  $M = 30$  subregiões de integração. Finalmente foram geradas 1000 amostras para o erro de modelagem e retiradas a média e a matriz de covariância.

Para investigar a solução do problema inverso foi considerado um conjunto de dados experimentais gerados por um modelo com alta ordem de convergência acrescido de um resíduo experimental modelado por uma distribuição normal, centrada em zero com desvio padrão  $\sigma_e = 0,004$ . Foi também considerada uma cadeia com 50000 estados, descartando os 10000 primeiros estados como aquecimento da cadeia. Após descartar os 10000 primeiros estados foram retiradas as médias, o desvio padrão (DP) e os intervalos com 99% de confiança (IC). Outra medida utilizada foi a razão entre o comprimento do intervalo de confiança e o valor médio estimado (MI). Os resultados obtidos estão na Tabela 3 que mostra intervalos de confiança compatíveis com os valores da Tabela 1 para os parâmetros D, P e C, enquanto para os parâmetros K e B não se obteve o mesmo resultado. Na Figura 2 pode-se observar a distribuição a posteriori para cada um dos parâmetros e na Figura 3 vê-se a convergência das cadeias assim como a média e os intervalos de confiança.

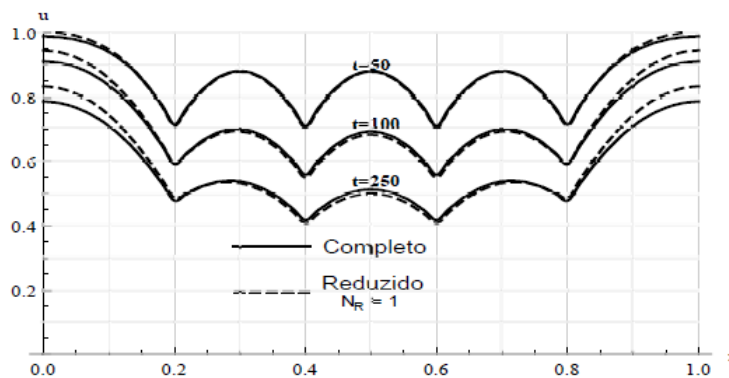


Figura 1- Comparação entre o modelo reduzido e o modelo completo.

Tabela 2- Análise de convergência

$M = 30$ e $N_R = 1$						
$N$	$x = 0,2$	$x = 0,4$	$x = 0,5$	$x = 0,2$	$x = 0,4$	$x = 0,5$
10	0,792576	0,787014	0,806822	0,795369	0,791027	0,810236
30	0,725412	0,718911	0,871353	0,728479	0,723104	0,872755
50	0,716631	0,710242	0,876485	0,719287	0,713974	0,877521
80	0,712551	0,706238	0,879562	0,715544	0,710306	0,880688
100	0,711152	0,704866	0,879688	0,714087	0,708867	0,880775
$M = 30$ e $N_R = N$						

10	0,795369	0,791027	0,810236	0,795369	0,791027	0,810236
30	0,728479	0,723104	0,872755	0,728479	0,723104	0,872755
50	0,719287	0,713974	0,877521	0,719287	0,713974	0,877521
80	0,715544	0,710306	0,880688	0,715544	0,710306	0,880688
100	0,714087	0,708867	0,880775	0,714087	0,708867	0,880775

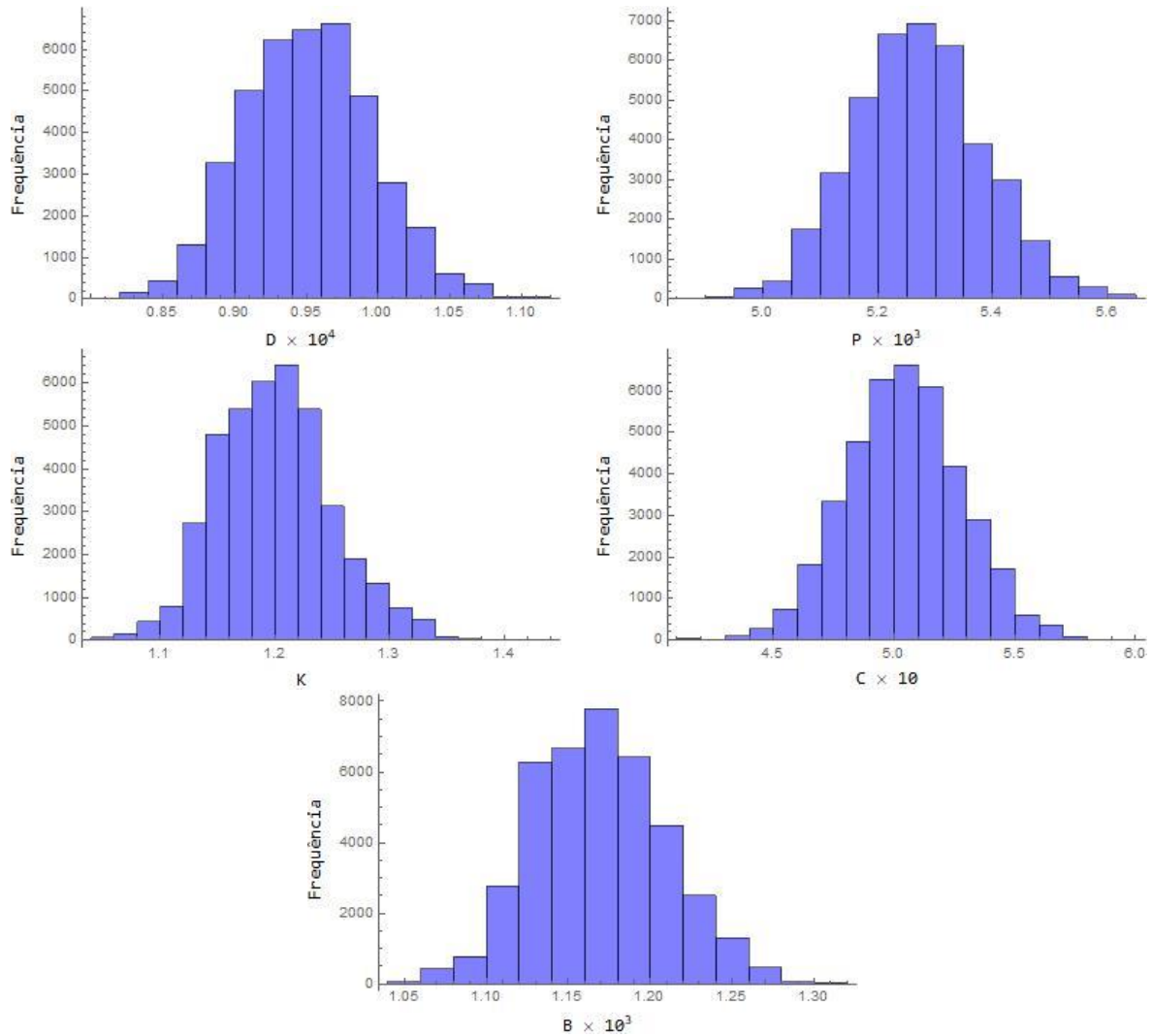


Figura 2: Densidade das distribuições a posteriori

Tabela 3 – Solução Problema Inverso

Parâmetros	Inicial	Média	DP	IC	MI %
$D \times 10^4$	1,3148	0,9518	0,0000045	[0,84584, 1,07593]	24,17
$P \times 10^3$	5,8661	5,2703	0,00011	[4,98128, 5,57175]	11,20
$K$	1,5684	1,2	0,05	[1,07703, 1,33647]	21,62
$C \times 10$	13,0992	5,0418	0,023	[4,40844, 5,65576]	24,74
$B \times 10^3$	1,2581	1,1689	0,00004	[1,07100, 1,26952]	16,98

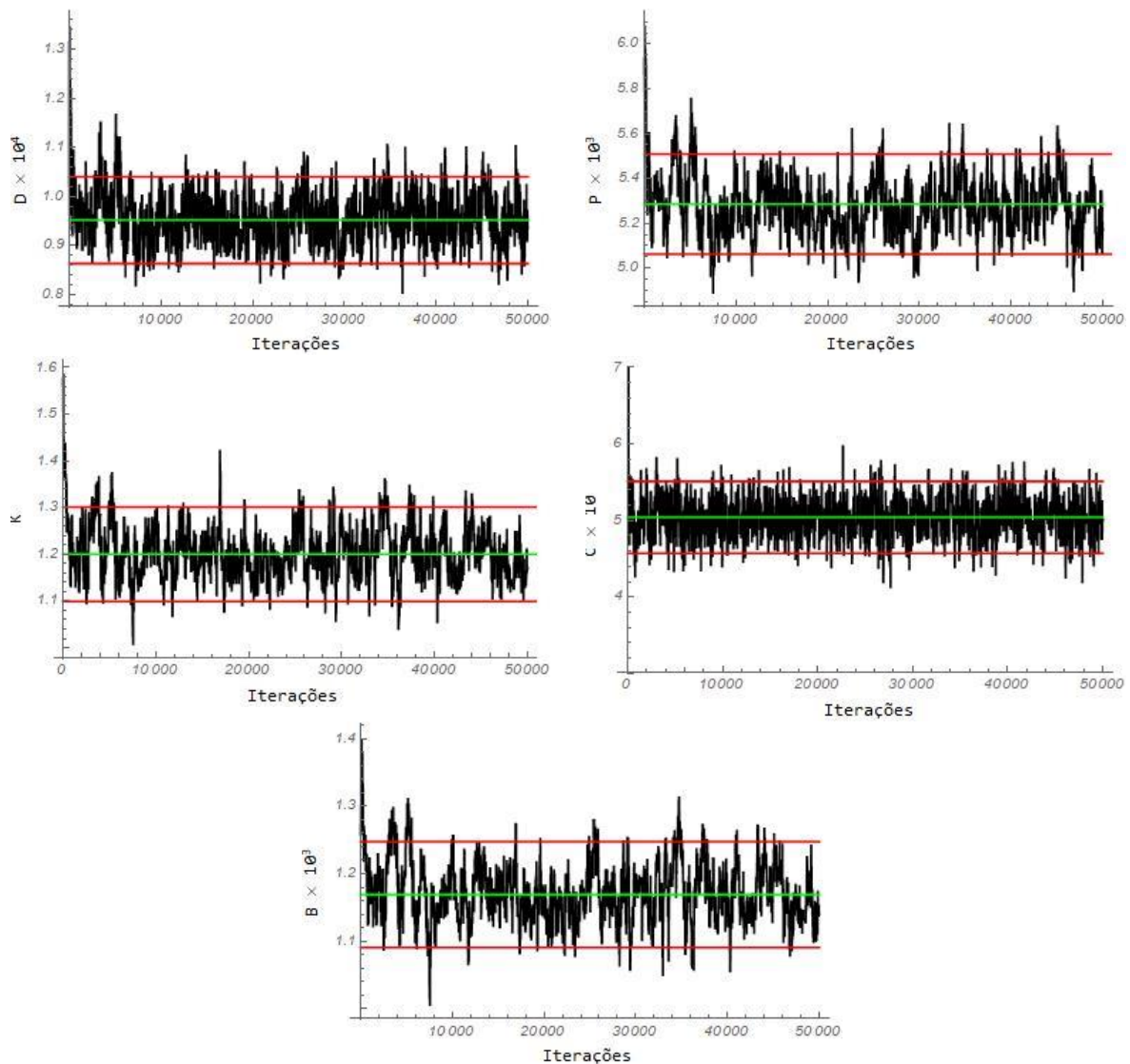


Figura 3: Cadeias (Preto), Média (Verde) e Intervalo de Confiança(Vermelho)

## 5. CONCLUSÕES

A dinâmica populacional difusiva com taxas de natalidade e mortalidade logísticas considerando armadilhas locais é um problema muito relevante, principalmente quando a população de estudo pode ser de vetores de doenças. O modelo empregado neste trabalho foi um modelo baseado na equação de difusão clássica acrescida de uma parte não linear, por conta disso uma boa opção para solução é a técnica de transformada integral generalizada (GITT), uma técnica muito eficiente mas que nesse estudo apresentou um tempo computacional considerado elevado. Para contornar essa dificuldade foi utilizado um modelo reduzido que mostrou-se uma boa opção, reduzindo consideravelmente o tempo de uma solução. A solução considerando o modelo reduzido, embora muito mais rápida que a convencional, sacrificou a precisão do problema inverso, pois o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov necessita de milhares de avaliações da solução do problema direto. Para contornar a propagação de erro foi considerada a utilização do modelo de erro de aproximação, um modelo que tem como objetivo considerar o erro de modelagem



quando usa-se o modelo reduzido. Os resultados encontrados foram promissores e futuramente utilizaremos outras formulações para o modelo de erro de aproximação.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da FAPERJ, da CAPES, do CNPq e do IFFluminense.

## REFERÊNCIAS

- Alifanov, O. M. (2012). *Inverse heat transfer problems*. Springer Science & Business Media.
- Cotta, R. M. (1990). Hybrid numerical/analytical approach to nonlinear diffusion problems. *Numerical Heat Transfer*, 17(2), 217-226.
- Cotta, R. M. (1993). *Integral transforms in computational heat and fluid flow*. CRC Press.
- Cotta, R. M., & Mikhailov, M. D. (1997). *Heat conduction: lumped analysis, integral transforms, symbolic computation*. Chichester: Wiley.
- Cotta, R. M. (Ed.). (1998). *The integral transform method in thermal and fluids sciences and engineering*. Begell House Publishers.
- Feng, W., & Lu, X. (1999). On diffusive population models with toxicants and time delays. *Journal of mathematical analysis and applications*, 233(1), 373-386.
- Friguis, M. S. (2015). Análise dos problemas direto e inverso em um modelo de evolução populacional através de transformações integrais e inferência Bayesiana (Dissertação de mestrado, Universidade do estado do Rio de Janeiro).
- Kaipio, J. P., & Somersalo, E. (2004). *Computational and statistical methods for inverse problems*. Applied mathematical sciences, 160.
- Knupp, D. C. (2010). Análise Teórico-Experimental de Transferência de Calor em Nanocompósitos via Transformação Integral e Termografia por Infravermelho (Doctoral dissertation, Universidade Federal do Rio de Janeiro).
- Knupp, D. C.; Sacco, W. F.; Silva Neto, A. J. Direct and inverse analysis of diffusive logistic population evolution with time delay and impulsive culling via integral transforms and hybrid optimization. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, vol. 250, 105-120.
- Malthus, T. R. (1959). *“Population: the first essay”*. University of Michigan Press.
- Naveira Cotta, C. P. (2009). Problemas Inversos De Condução De Calor Em Meios Heterogêneos: Análise Teórico-Experimental Via Transformação Integral, Inferência Bayesiana E Termografia Por Infravermelho (Doctoral dissertation, Tese de Doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro).
- Neto, F. D. M., & da Silva Neto, A. J. (2012). *“An introduction to inverse problems with applications”*. Springer Science & Business Media.
- Nissinen, A., Heikkinen, L. M., & Kaipio, J. P. (2007). The Bayesian approximation error approach for electrical impedance tomography—experimental results. *Measurement Science and Technology*, 19(1), 015501.
- Okubo, A. (1980). *“Diffusion and ecological problems: mathematical models”* Springer-Verlag New York Google Scholar.
- Ozisik, M. N., & Mikhailov, M. D. (1984). Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion.
- Simons, R.; Gourley, S., Extinction criteria in stage-structured population models with impulsive culling. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2006, vol. 66, num. 6, 1853-1870.
- Skellam, J. G. (1951). Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika*, 38, 196-218.
- Su, Y., Wei, J., & Shi, J. (2009). Hopf bifurcations in a reaction–diffusion population model with delay effect. *Journal of Differential Equations*, 247(4), 1156-1184.
- Verhulst, P. F. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Corresp. Math. Phys.*, 10, 113-126.
- White, R. E. (2009). Populations with impulsive culling: control and identification. *International Journal of Computer Mathematics*, 86(12), 2143-2164.

## INVERSE ANALYSIS OF THE DIFFUSIVE POPULATION DYNAMICS WITH IMPULSIVE CULLING SITES VIA INTEGRAL TRANSFORMS, APPROXIMATION ERROR MODEL AND BAYESIAN INFERENCE

**Abstract.** *This paper deals with the analysis of the direct and inverse problems considering a diffusive population with logistic birth rates and mortality with impulsive slaughter. The formulation and solution of the direct problem was considered the formalism of the generalized integral transformation technique. To reduce computational time in the solution of the direct problem a low order solution was proposed using the reduced model. The inverse problem was formulated using a Bayesian approach applied approximation error model.*

**Keywords:** *Population Dynamics, Integral Transform, Bayesian Inference, Aproximation Error Model.*