

08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

PROBLEMA INVERSO DE ESTIMATIVA DA CONDUTÂNCIA TÉRMICA EM REGIME PERMANENTE COM FORMULAÇÃO EXPLÍCITA E REGULARIZAÇÃO VIA TRUNCAMENTO DE AUTOFUNÇÕES

Maria Trindade Gago Guimarães Gonçalves – mariatgguimaraes@hotmail.com

Luiz Alberto da Silva Abreu – luiz.abreu@iprj.uerj.br

Diego Campos Knupp – diegoknupp@iprj.uerj.br

Antônio J. da Silva Neto – ajsneto@iprj.uerj.br

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico – Nova Friburgo, RJ, Brazil

***Resumo.** Este trabalho tem como objetivo estimar a condutância térmica em um meio composto por duas camadas de materiais diferentes, a partir da resolução de um problema inverso de transferência de calor com formulação explícita. Para as temperaturas das camadas, são utilizadas medições não intrusivas obtidas na resolução do problema direto com a adição de diferentes níveis de ruído. Com o uso da transformação integral, é resolvido o problema de autovalores e a partir do truncamento de autofunções é encontrada uma função para a temperatura regularizada, que é utilizada para a resolução do problema inverso. Os resultados mostram que a metodologia funciona melhor para materiais bons condutores e pode, quando comparada a métodos encontrados na literatura, ser considerada rápida e satisfatória.*

***Palavras-chave:** Condutância térmica de contato, Problema inverso, Transformação Integral*

1. INTRODUÇÃO

A resolução de problemas inversos para a estimativa de parâmetros ou funções tem sido utilizada por pesquisadores e aplicada em diferentes ramos como na detecção de tumores (Mittal e Scott, 2007) e identificação de propriedades termofísicas (Naveira-Cotta et al, 2010). Uma das funções que pode ser estimada através da resolução de um problema inverso é a condutância térmica de contato.

Considerando duas camadas em contato, o coeficiente que relaciona a transferência de calor entre a camada de maior temperatura para a de menor, é chamado de condutância térmica de contato. Esse coeficiente pode ser utilizado na detecção de falhas, como realizado por Abreu et al. (2016) e Colaço e Alves (2015).

Colaço e Alves (2013) utilizaram um método sem o uso de medições de temperatura intrusivas por meio de uma abordagem de reciprocidade e estimaram a condutância térmica com a resolução de uma integral. Para isso, utilizaram o método de soluções fundamentais que consiste em aproximar a solução de um problema por meio de uma combinação linear de soluções.

Padilha et al. (2016) estimaram esse coeficiente com uma metodologia não iterativa e não intrusiva, a partir da resolução de um problema inverso, combinando a reciprocidade funcional e a técnica da transformação integral clássica.

Para que sua estimativa seja realizada a partir de medições de temperaturas, é necessário o uso de algum método de regularização pois o problema inverso é tipicamente mal posto e não pode ser resolvido diretamente. Um dos métodos encontrados na literatura utiliza um truncamento, como em Knupp e Abreu (2016), e a partir dele, é possível reconstruir as medições suavizando seu ruído e resolver o problema inverso encontrando soluções mais satisfatórias.

Neste trabalho, o mesmo método de Knupp e Abreu (2016) é utilizado para a resolução do problema inverso da estimativa da condutância térmica de contato com o objetivo de suavizar os ruídos presentes nas medições experimentais.

2. PROBLEMA FÍSICO E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste trabalho é considerado um problema bidimensional de transferência de calor em regime permanente, em uma placa com duas camadas de materiais diferentes. Um fluxo de calor $q(x, y)$, em W/m^2 , é aplicado na parte inferior e a parte superior troca calor, por convecção, com o meio externo, conforme ilustrado na Figura 1.

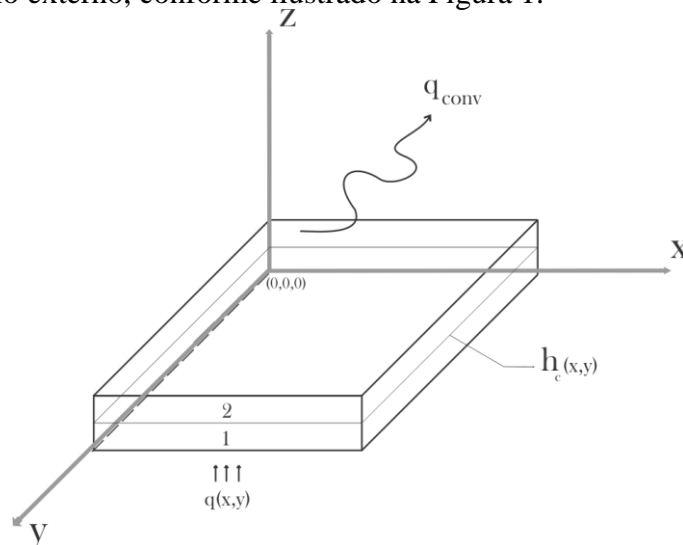


Figura 1 – Representação esquemática do problema físico

Entre as camadas é considerada a existência de uma condutância térmica de contato com dependência nas coordenadas espaciais, i.e. $h_c(x, y)$, em W/m^2K . As superfícies laterais das placas são consideradas adiabáticas.

Sendo k_1 e k_2 as condutividades térmicas de cada uma das camadas, em W/mK , a interface entre as camadas localizada em $z = L_c$, a parte superior da segunda camada em z

$= L_z$, representando a temperatura ambiente por T_∞ , e considerando h o coeficiente da troca de calor por convecção em W/m^2K , a formulação matemática do problema de transferência de calor, para $0 < x < L_x$ e $0 < y < L_y$, pode ser escrita como (Osizik, 1993)

$$\frac{\partial^2 T_1(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_1(x, y, z)}{\partial z^2} = 0, \text{ em } 0 < z < L_c, \quad (1.a)$$

$$\frac{\partial^2 T_2(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_2(x, y, z)}{\partial z^2} = 0, \text{ em } L_c < z < L_z, \quad (1.b)$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1(x, y, z)}{\partial z} = q(x, y), \text{ em } z = 0, \quad (1.c)$$

$$k_2 \frac{\partial T_2(x, y, z)}{\partial z} = h[T_\infty - T_2(x, y, z)], \text{ em } z = L_z, \text{ e} \quad (1.d)$$

$$k_1 \frac{\partial T_1(x, y, z)}{\partial z} = k_2 \frac{\partial T_2(x, y, z)}{\partial z} = h_c(x, y)[T_2(x, y, z) - T_1(x, y, z)], \text{ em } z = L_c. \quad (1.e)$$

Considera-se as propriedades térmicas constantes e assumindo que a placa é suficientemente fina, o problema pode ser escrito em termos de um campo de temperatura medio transversal, utilizando a abordagem *Lumped*, definida como (Cotta e Mikhailov, 1997)

$$T_{m1}(x, y) = \frac{1}{L_c} \int_0^{L_c} T_1(x, y, z) dz, \text{ e} \quad (2.a)$$

$$T_{m2}(x, y) = \frac{1}{L_z - L_c} \int_{L_c}^{L_z} T_2(x, y, z) dz. \quad (2.b)$$

Aplicando essa abordagem para as camadas inferior e superior obtém-se as seguintes equações.

$$\frac{\partial^2 T_{m1}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{m1}(x, y)}{\partial y^2} + \frac{1}{L_c} \frac{h_c(x, y)[T_2(x, y, z) - T_1(x, y, z)]}{k_1} + \frac{1}{L_c} \frac{q(x, y)}{k_1} = 0, \text{ e} \quad (3.a)$$

$$\frac{\partial^2 T_{m2}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{m2}(x, y)}{\partial y^2} - \frac{1}{L_z - L_c} \frac{h_c(x, y)[T_2(x, y, z) - T_1(x, y, z)]}{k_2} + \frac{1}{L_z - L_c} \frac{h[T_\infty - T_2(x, y, z)]}{k_2} = 0. \quad (3.b)$$

Considerando a abordagem *Lumped* Clássica, têm-se $T_1(x, y, L_c) = T_{m1}(x, y)$, $T_2(x, y, L_c) = T_{m2}(x, y)$ e $T_2(x, y, L_z) = T_{m2}(x, y)$ (Cotta e Mikhailov, 1997). As Equações (3.a-b) são então reescritas como

$$\frac{\partial^2 T_{m1}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{m1}(x, y)}{\partial y^2} + \frac{1}{L_c} \frac{h_c(x, y)[T_{m2}(x, y) - T_{m1}(x, y)]}{k_1} + \frac{1}{L_c} \frac{q(x, y)}{k_1} = 0, \text{ e} \quad (4.a)$$

$$\frac{\partial^2 T_{m2}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{m2}(x, y)}{\partial y^2} - \frac{1}{L_z - L_c} \frac{h_c(x, y)[T_{m2}(x, y) - T_{m1}(x, y)]}{k_2} + \frac{1}{L_z - L_c} \frac{h[T_\infty - T_{m2}(x, y)]}{k_2} = 0. \quad (4.b)$$

O problema direto dado pelas Equações 4(a-b) é resolvido utilizando a rotina NDSolve do software *Mathematica*. Na próxima seção, é apresentado o problema inverso para a estimativa da condutância térmica de contato.

3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

Para o problema inverso são utilizadas medições de temperatura não intrusivas da camada 1 e a partir de uma estimativa inicial para o $h_c(x, y)$, é estimada a temperatura da camada 2 através da Equação (4.b). A condutância térmica de contato pode ser explicitada e escrita como

$$h_c(x, y) = \frac{[-q(x, y) - k_1 L_c \frac{\partial^2 T_{m1}(x, y)}{\partial x^2} - k_1 L_c \frac{\partial^2 T_{m1}(x, y)}{\partial y^2}]}{[T_{m2}(x, y) - T_{m1}(x, y)]}. \quad (5)$$

Utiliza-se diferenças finitas centradas nas derivadas da Equação (5), e obtém-se a seguinte equação para a condutância térmica de contato

$$h_c(x_i, y_j) = \frac{[-q(x_i, y_j) - k_1 L_c \frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{\Delta x^2} - k_1 L_c \frac{\theta_{i,j+1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j-1}}{\Delta y^2}]}{[T_{m2}(x_i, y_j) - \theta_{i,j}]}, \quad (6)$$

para as posições i e j do domínio especial discretizado. Analogamente, com a Equação (7) é possível encontrar os valores da temperatura na camada superior.

$$\frac{\partial^2 T_{m2}(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{m2}(x_i, y_j)}{\partial y^2} - \frac{1}{L_z - L_c} \frac{h_c(x_i, y_j)[T_{m2}(x_i, y_j) - \theta_{i,j}]}{k_2} + \frac{1}{L_z - L_c} \frac{h[T_\infty - T_{m2}(x_i, y_j)]}{k_2} = 0. \quad (7)$$

Realizando um processo iterativo com as Equações. (6-7), encontrando a temperatura para a camada dois e logo após o coeficiente $h_c(x, y)$, é possível estimar a condutância térmica de contato. Porém, esse problema inverso relacionado a transferência de calor por condução é mal posto e o ruído presente nas medições experimentais é amplificado na estimativa (Alifanov, 1994; Beck et al., 1985). Para melhorar a solução, são utilizados métodos de regularização como por exemplo o método de Tikhonov (Moura Neto e Silva Neto, 2012). Neste trabalho, para a regularização das medições não intrusivas é utilizado um método de truncamento (Knupp e Abreu, 2016).

O método proposto utiliza autofunções e autovalores de acordo com as Equações (8.a-c).

$$\hat{\theta}(x, y) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{N_m} \bar{\theta}_m \varphi_m(x, y), \quad (8.a)$$

com a normalização dada por

$$N_m = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} [\varphi_m(x, y)]^2 dx dy. \quad (8.b)$$

Com os coeficientes

$$\bar{\theta}_m = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \varphi_m(x, y) \theta(x, y) dx dy. \quad (8.c)$$

Para as autofunções é utilizado o problema bidimensional de Sturm-Liouville.

$$\frac{\partial^2 \varphi_m(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m(x, y)}{\partial y^2} + \mu_m^2 \varphi_m(x, y) = 0, \text{ em } 0 < x < L_x \text{ e } 0 < y < L_y, \quad (9.a)$$

$$\frac{\partial \varphi_m(0, y)}{\partial x} = 0, \quad (9.b)$$

$$\frac{\partial \varphi_m(L_x, y)}{\partial x} = 0, \quad (9.c)$$

$$\frac{\partial \varphi_m(x, 0)}{\partial y} = 0, \text{ e} \quad (9.d)$$

$$\frac{\partial \varphi_m(x, L_y)}{\partial y} = 0, \quad (9.e)$$

pois o mesmo permite uma solução explícita analítica. Considerando um truncamento adequado, i.e. M na Equação (8.a), as medições regularizadas são obtidas e substituídas na equação abaixo para estimar a condutância térmica de contato.

$$h_c(x_i, y_j) = \frac{[-q(x_i, y_j) - k_1 L_c \frac{\hat{\theta}_{i+1,j} - 2\hat{\theta}_{i,j} + \hat{\theta}_{i-1,j}}{\Delta x^2} - k_1 L_c \frac{\hat{\theta}_{i,j+1} - 2\hat{\theta}_{i,j} + \hat{\theta}_{i,j-1}}{\Delta y^2}]}{[T_{m2}(x_i, y_j) - \hat{\theta}_{i,j}]}, \quad (10)$$

onde $\hat{\theta}_{i,j} = \hat{\theta}(x_i, y_j)$.

4. RESULTADOS

Medições experimentais para a primeira camada foram simuladas a partir da resolução do problema direto com o valor exato do fluxo de calor aplicado e adição de ruído nas temperaturas calculadas. O fluxo de calor aplicado na camada inferior foi de 10.000 W/m²K, sendo a camada inferior de aço AISI 1050 (condutividade térmica $k = 54$ W/mK e calor específico 446 J/(kg.K)) e a superior de alumínio (condutividade térmica $k = 237$ W/mK e calor específico 903 J/(kg.K)). O coeficiente de troca térmica por convecção considerado foi

de $1000 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$, cada camada com 2 mm de espessura, temperatura ambiente $T_\infty = 25^\circ\text{C}$ e o tempo de experimento 600 segundos. Além disso, $L_x = L_y = 4 \text{ mm}$. A função escolhida para teste é a função apresentada na Figura 2.

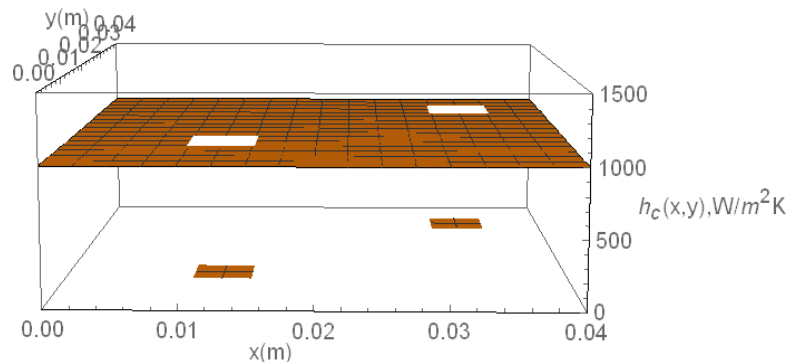


Figura 2 – Função da Condutância Térmica

Essa função foi escolhida para testar se o método funciona para funções que possuem pontos de descontinuidade. Adicionando um ruído de aproximadamente 1% da temperatura máxima, de acordo com o princípio da discrepância (Morozov, 1966), uma boa escolha para a ordem de truncamento seria de 100 modos (Figura 3(a)). A Figura 3(b) mostra o resultado para esse caso utilizando o método proposto de regularização.

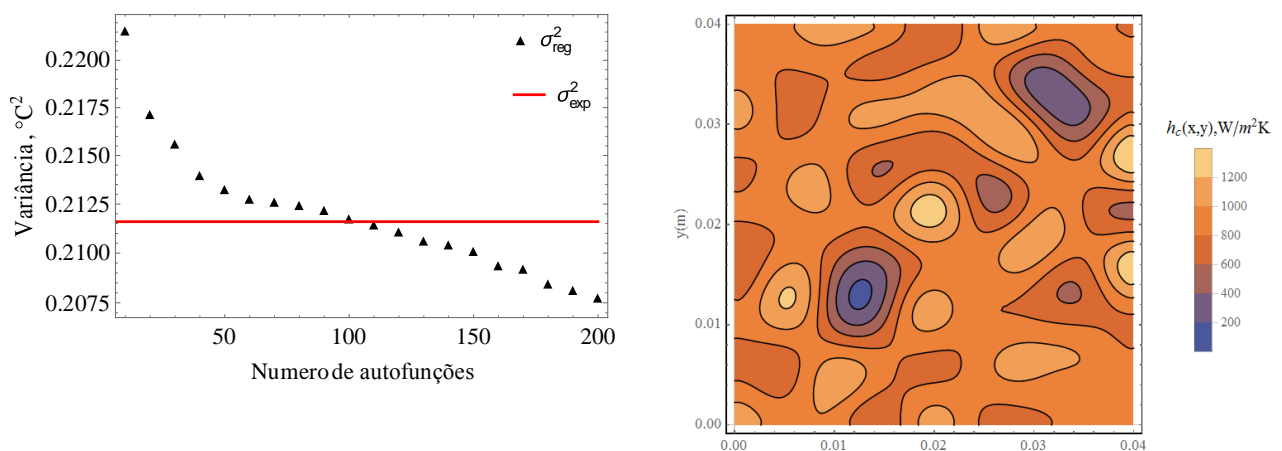


Figura 3: (a) Uso do princípio discrepância para 1% de ruído; (b) Estimativa para a condutância térmica para 1% de ruído

Pode-se observar que embora não se encontre o valor exato da função real, é perceptível o perfil da função, podendo-se visualizar os pontos onde há uma falha de contato indicado pelos pontos em azul.

Ainda para analisar os resultados desse teste, é apresentada a função de temperatura encontrada no problema inverso e o seu resíduo na Figura 5. Pode-se observar que o maior resíduo de temperatura alcança aproximadamente 0,14 % da temperatura máxima.

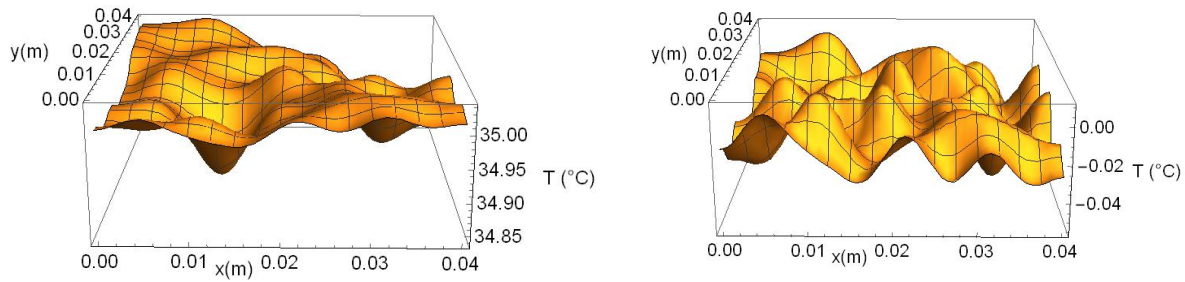


Figura 5: (a) Temperatura para a camada superior; (b) Resíduo de temperatura

Aumentando o ruído para 2% da temperatura máxima, encontra-se a estimativa da Figura 6.

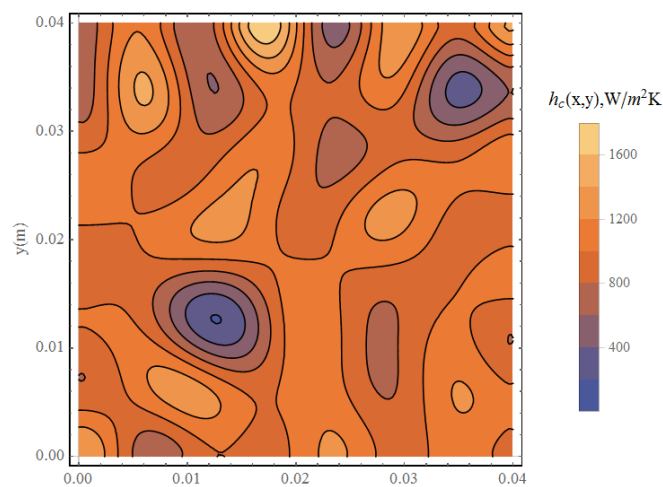


Figura 6: Estimativa para a condutância térmica para 2% de ruído

A estimativa se afasta da função real, mas o método consegue estimar uma função com perfil parecido, indicando os pontos nos quais existem falhas de contato, novamente simbolizado com a cor azul.

5. CONCLUSÕES

Mesmo para uma função que possui pontos de descontinuidade, o método demonstra robustez e funciona para camadas de materiais diferentes e com ruídos relativamente altos se comparados aos encontrados na literatura. Os resultados foram obtidos com pouco esforço computacional e se demonstrou um método eficiente para placas com pequenas espessuras.

Agradecimentos

Os autores agradecer o suporte financeiro oferecido pelas agências brasileiras CNPq, FAPERJ e CAPES.

REFERÊNCIAS

D.C. Knupp and L. A. Abreu. Explicit Boundary Heat Flux Reconstruction Employing Temperature Measurements Regularized via Truncated Eigenfunction Expansions, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 78:241-252, 2016.

- F. D. M Neto e A. J. da Silva Neto. *An introduction to inverse problems with applications*. Springer Science & Business Media, 2012
- J. V. Beck, B. Balckwell, C.R. St. Clair, *Inverse Heat Conduction – Ill-posed Problems*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1985.
- L.A.S.Abreu, M.J.Colaço, H.R.B Orlande, C.J.S.Alves. Detection of contact failures in composites using infrared thermography and the reciprocity functional approach, in:Proceedings of the Sixteenth International Conference on Mechanics and Materials in Design, Ponta Delgada, Azores, 2015.
- L.A.S. Abreu. et al. Thermography detection of contact failures in double layered materials using the reciprocity functional approach. *Applied Thermal Engineering*, Elsevier, v. 100, p. 1173–1178, 2016.
- M.J. Colaço, C. J.S. Alves, A fast non-intrusive method for estimating spatial thermal contact conductance by means of the reciprocity functional approach and the method of fundamental solutions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 60, p. 653–663, 2013.
- M.J. Colaço e C.J.S. Alves, A backward reciprocity function approach to the estimation of spatial and transient thermal contact conductance in double-layerd materials using non-intrusive measurements. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 68: 117–132, 2015
- M. Mital, E.P. Scott, Thermal detection of embedded tumors using infrared imaging, *J. Biomech. Eng.* 129 (1) (2007) 33–39.
- M.N, ÖZISIK. *Heat conduction*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1993.
- O.M. Alifanov, *Inverse Heat Transfer Problems*, Springer, Berlin, 1994.
- R. M. Cotta e M. D. Mikhailov. *Heat conduction: Lumped analysis, integral transforms, symbolic computation*. Chichester: Wiley, 1997.
- R.S. PADILHA, et al. An analytical method to estimate spatially-varying termal contact conductances using the reciprocity functional and the integral transform methods: Theory and experimental validation. , R.S *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 100, p. 599–607, 2016.
- V. A. Morozov. On the solution of functional equations by the method of regularization. In *Soviet Math. Dokl*, 7:414-417, 1966.

APPENDIX A

ESTIMATION OF THERMAL CONDUCTANCE THROUGH THE INVERSE PROBLEM OF HEAT TRANSFER IN THE CASE OF PERMANENT REGIME WITH REGULARIZATION VIA TRUNCATED EIGENFUNCTIONS

Abstract. *This work aims to estimate the thermal conductance in a medium composed of two layers of different materials, from the resolution of an inverse heat transfer problem with explicit formulation. For layer temperatures, non-intrusive measurements obtained in solving the direct problem with the addition of different levels of noise are used. With the use of the integral transform, the problem of eigenvalues is solved and from the truncation of autofunctions a function is found for the regularized temperature that is used to solve the inverse problem. The results show that the methodology works best for good conductive materials and can be considered fast and satisfactory if compared to methods found in the literature.*

Keywords: *Thermal Contact Conductance, Inverse Problem, Integral Transform*