

08 a 11 de Outubro de 2018  
Instituto Federal Fluminense  
Búzios - RJ

## ESTIMATIVA DE FLUXO TÉRMICO BIDIMENSIONAL PERMANENTE COM O MÉTODO DE MONTE CARLO VIA CADEIAS DE MARKOV, TÉCNICAS DE REGULARIZAÇÃO E TERMOGRAFIA POR INFRAVERMELHO

**Emerson de Lima Sanches**<sup>1</sup> – emerson\_llpsanches@hotmail.com

**Diego Campos Knupp**<sup>1</sup> – diegoknupp@gmail.com

**Luiz Alberto da Silva Abreu**<sup>1</sup> – abreu.l@gmail.com

**Antônio J. Silva Neto**<sup>1</sup> – ajsneto@iprj.uerj.br

**Fabricio da Silva Mascouto**<sup>1</sup> – fabricio\_mascouto@hotmail.com

<sup>1</sup> Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico – Nova Friburgo, RJ, Brazil

**Resumo.** *O presente artigo aborda a estimativa de fluxos térmicos permanentes com variação bidimensional, aplicados a um dos contornos de uma amostra termicamente fina, utilizando o Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov para a solução do respectivo problema inverso, bem como as técnicas de regularização baseadas na Total Variation (TV) empregada informação a priori, e na substituição dos dados experimentais por expansões truncadas das autofunções associadas. Além das metodologias inversa e de regularização, utiliza-se o Método das Diferenças Finitas (MDF) para a solução do problema direto associado, cujo modelo equivale a um problema de condução de calor em regime permanente e com variação espacial em duas direções. Os resultados apresentados para o problema inverso referem-se a dados experimentais reais obtidos via termografia por infravermelho para um caso estudado, enfatizando a influência da regularização dos mesmos para a recuperação do fluxo térmico.*

**Palavras-chave:** *Transferência de Calor, Termografia por Infravermelho, Problemas Inversos, Técnicas de Regularização, Inferência Bayesiana*

### 1. INTRODUÇÃO

O avanço da nanotecnologia e o crescente acoplamento de diferentes componentes em dispositivos primários, sejam estes utilitários ou industriais, tem gerado não apenas as vantagens associadas, mas também dificuldades cada vez maiores com relação ao controle de seu funcionamento. Entre os fatores recorrentes, o comportamento térmico tem grande influência no desempenho desses dispositivos, destacando-se, por exemplo, os casos de superaquecimento (Yang et al., 2014), pontual ou generalizado, responsáveis pelo aumento no gasto energético e pela redução na vida útil desses dispositivos.

A determinação da causa e, frequentemente, da própria região de superaquecimento é muito importante, tanto para o reparo imediato quanto para o aprimoramento das tecnologias utilizadas. Dentro desse contexto, a aplicação de metodologias de solução de problemas inversos desempenham um papel fundamental nesse processo de reconstrução térmica, em especial de fluxos e fontes, externos ou internos (Colaço et al., 2006; Singh et al., 2017). O principal problema enfrentado na solução inversa de tais problemas é o comportamento mal-posto associado ao procedimento de inversão.

Apesar das tecnologias existentes para aquisição de dados térmicos, como a termografia por infravermelho (Meola e Carlomagno, 2014), a presença de ruídos é inerente aos procedimentos experimentais e a sua propagação é inevitável. Assim, técnicas de regularização figuram como uma ferramenta necessária (Duda, 2017; Qian e Fu, 2007; Wróblewska et al., 2016), auxiliando na transformação dos dados de entrada e no controle da sua aplicação, sem que haja perda de informações.

Devido à grande relevância dos temas citados, este trabalho trata, basicamente, da estimativa de fluxos térmicos impostos no contorno de uma determinada amostra termicamente fina com o uso de dados térmicos obtidos experimentalmente pela termografia de infravermelho e do Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov para solução do problema inverso associado. Além disso, adota-se dois procedimentos de regularização para minimizar o comportamento mal-posto do PI e auxiliar nas estimativas. O respectivo modelo físico-matemático é baseado na equação do calor bidimensional em regime permanente.

## 2. DESENVOLVIMENTO E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

### 2.1 Problema Direto

Considere uma placa retangular cuja face em  $z=0$  recebe um fluxo térmico bidimensional permanente, genericamente representado por  $q(x,y)$ , enquanto a face oposta,  $z=L_z$ , assim como os outros quatro contornos, encontram-se expostos ao ambiente, à temperatura  $T_\infty$ , trocando calor por convecção, sob condições homogêneas, com um coeficiente de troca térmica  $h$ , como ilustra a representação esquemática da Fig. 1.

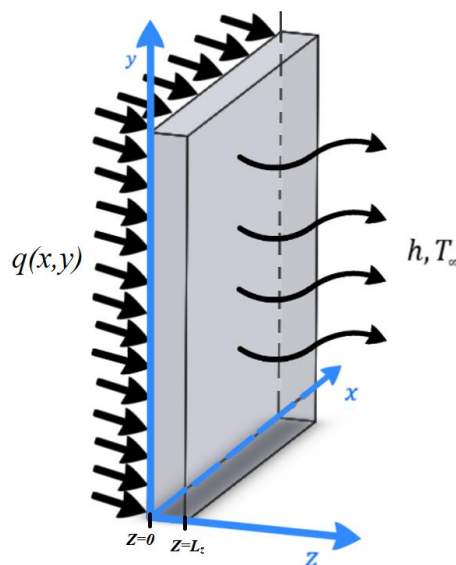


Figura 1 – Representação esquemática do problema físico.

A partir da equação geral da difusão térmica em coordenadas cartesianas (Bergman et al., 2011), considera-se uma formulação via parâmetros concentrados na direção  $z$  e anula-se a derivada primeira no tempo, obtendo-se um problema bidimensional (2D) em regime permanente.

São adotados fluxos pontualmente impostos, com dimensões inferiores às da placa, e sem variações ao longo do tempo, i.e.  $q(x, y)$ . Além disso, considera-se que a troca de calor pelas bordas ocorre, apesar das respectivas áreas serem pequenas, e com o mesmo coeficiente  $h$  adotado para a condição de contorno na superfície maior, em  $z = L_z$ .

Assim, com as considerações gerais indicadas e com a utilização do método *Lumped Analysis*, tem-se o seguinte modelo final simplificado:

$$\begin{cases} k \left( \frac{\partial^2 T_m(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_m(x, y)}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{L_z} [q(x, y) - h(T_m(x, y) - T_\infty)] = 0 \\ -k \frac{\partial T_m(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(T_m(x, y) - T_\infty) ; k \frac{\partial T_m(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = h(T_m(x, y) - T_\infty) \\ -k \frac{\partial T_m(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = h(T_m(x, y) - T_\infty) ; k \frac{\partial T_m(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = h(T_m(x, y) - T_\infty) \end{cases} \quad (1)$$

Para uma melhor calibração do modelo físico-matemático descrito pela Eq. (1), o coeficiente de troca térmica  $h$  foi estimado experimentalmente, a partir de um modelo 0D em regime permanente com fluxo térmico constante e uniforme  $q_{Max}$ , com as mesmas dimensões da placa. Neste caso, aplica-se o método *Lumped Analysis* também nas direções  $x$  e  $y$ , obtendo-se a seguinte expressão:

$$h = \frac{q_{Max} (L_x L_y)}{(2L_y L_z + 2L_x L_z + L_x L_y)(T_m - T_\infty)} \quad (2)$$

A solução do problema proposto, representado pela Eq. (1), é obtida numericamente via Método das Diferenças Finitas, utilizando aproximações do tipo centrada com 3 pontos para as derivadas segunda, avançada com 3 pontos para as derivadas primeira em  $x = 0$  e  $y = 0$  e, por fim, recuada com 3 pontos para as derivadas primeira em  $x = L_x$  e  $y = L_y$ . Em todos os casos aqui apresentados, utilizou-se uma malha de dimensões 21x21.

## 2.2 Problema Inverso e Regularização

A solução do problema inverso associado ao modelo direto apresentado consiste na determinação do fluxo térmico bidimensional em regime permanente (causa) a partir das temperaturas obtidas experimentalmente pela termografia de infravermelho (efeito). É apresentado a seguir o desenvolvimento para uma abordagem Bayesiana utilizando o Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC).

Na abordagem Bayesiana, o problema inverso é formulado como um problema de inferência estatística, onde objetiva-se determinar uma função densidade de probabilidade *a posteriori* a partir das observações experimentais. Dessa maneira, as informações a priori

sobre os parâmetros do modelo podem ser utilizadas na formulação do problema inverso, a partir do Teorema de Bayes (Orlande et al., 2008), representado matematicamente por:

$$\pi_{pos}(\mathbf{Z}) = \pi(\mathbf{Z}|\mathbf{T}_{exp}) = \frac{\pi_{pr}(\mathbf{Z}) \cdot \pi(\mathbf{T}_{exp}|\mathbf{Z})}{\pi(\mathbf{T}_{exp})} \quad (3)$$

onde  $\pi_{pos}(\mathbf{Z})$  é a densidade de probabilidade a posteriori,  $\pi_{pr}(\mathbf{Z})$  é a densidade de probabilidade a priori,  $\pi(\mathbf{T}_{exp}|\mathbf{Z})$  é a função de verossimilhança,  $\pi(\mathbf{T}_{exp})$  é a densidade marginal, que exerce um papel de constante de normalização, e  $\mathbf{Z}$  é o vetor de parâmetros do modelo, que consiste em  $Nq_x \times Nq_y$  valores discretos da função  $q(x, y)$  e no valor de  $h$ .

Para o problema aqui abordado, são estimadas as distribuições de probabilidade para  $q(x, y)$  e  $h$ . No caso do fluxo, são utilizados 11 pontos na direção  $x$  e 11 na direção  $y$  para representar o comportamento da função de maneira discreta. Assim, o valor do fluxo em cada um desses pontos é estimado, sendo por fim interpolados para a obtenção da função  $q(x, y)$ .

O valor de  $h$  é estimado apenas para que a incerteza associada possa ser levada em consideração a partir da informação *a priori* fornecida. Tal informação é modelada por uma distribuição normal, com média no valor inicialmente conhecido e desvio padrão de 2,5 % dessa média.

A solução do problema inverso consiste na amostragem da distribuição de probabilidades *a posteriori* através do método MCMC, que utiliza um processo estocástico de simulação iterativa. Para tal, é empregado o algoritmo de Metropolis-Hastings (Sanches et al., 2016).

Durante o procedimento iterativo, os candidatos para cada um dos pontos discretos referentes à função fluxo são gerados a partir de uma distribuição auxiliar uniforme e assimétrica de acordo com o estado anterior da cadeia. O fato da distribuição auxiliar ser assimétrica impede que sejam gerados candidatos com valores negativos quando se está em uma região de geração próxima a zero.

Apesar do MCMC ser um método robusto e com aplicações frequentes, o emprego direto da metodologia inversa é incapaz, para o caso em questão, de recuperar os fluxos impostos no contorno, já que os problemas inversos possuem comportamento mal-posto e, assim, as oscilações presentes nos dados de entrada são amplificadas. Dessa forma, faz-se necessário o uso de técnicas de regularização.

Para o problema abordado, serão utilizados dois diferentes procedimentos de regularização. Inicialmente, utiliza-se, com a aplicação dos dados experimentais originais, a técnica *Total Variation* (Chambolle et al., 2010) nas informações *a priori*.

$$\pi(\mathbf{Z}) \propto \exp[-0,5\gamma TV(\mathbf{Z})] \quad (4)$$

onde  $TV(\mathbf{Z})$  é representada, nesse caso, por:

$$TV(\mathbf{Z}) = \sum_{i=2}^{Nq_x-1} \sum_{j=2}^{Nq_y-1} \left( \Delta x \left[ |q_{i+1,j} - q_{i,j}| + |q_{i,j} - q_{i-1,j}| \right] + \Delta y \left[ |q_{i,j+1} - q_{i,j}| + |q_{i,j} - q_{i,j-1}| \right] \right) \quad (5)$$

Tal procedimento requer o esforço de se determinar o parâmetro  $\gamma$  por meio de testes, já que o mesmo varia de caso para caso, podendo assumir valores completamente diferentes.

Com isso, propõe-se a utilização do procedimento de regularização que consiste, basicamente, na expansão de  $T_{\text{exp}}$  em termos de autofunções  $\psi(x, y)$  (Knupp e Abreu, 2016), a saber:

$$T_{\text{Reg}}(x, y) = \sum_{n=1}^{N_{tr}} \frac{\bar{T}_{\text{exp}_n} \psi_n(x, y)}{N_i}, \quad \text{com} \quad \begin{cases} N_i = \int_0^{L_{\text{exp}_y}} \int_0^{L_{\text{exp}_x}} [\psi_i(x, y)]^2 dx dy \\ \bar{T}_{\text{exp}_n} = \int_0^{L_{\text{exp}_y}} \int_0^{L_{\text{exp}_x}} \psi_i(x, y) T_{\text{exp}}(x, y) dx dy \end{cases} \quad (6)$$

onde  $L_{\text{exp}_x}$  e  $L_{\text{exp}_y}$  são as dimensões da região na qual são obtidos os dados térmicos experimentais. As autofunções  $\psi(x, y)$  são calculadas a partir do problema de autovalor bidimensional básico de Sturm-Liouville (Mikhailov et al., 1984).

### 3. METODOLOGIA EXPERIMENTAL

Para a estimativa dos fluxos térmicos reais, há a necessidade de aquisição de dados térmicos experimentais. O principal equipamento necessário à obtenção desses dados é a câmera termográfica, disponível no Laboratório Patrícia Oliva Soares de Experimentação e Simulação Numérica em Transferência de Calor e Massa (LEMA-IPRJ/UERJ).

Um aparato experimental foi montado para a realização dos experimentos necessários, como ilustra a Fig. 2, com os equipamentos disponíveis no LEMA e destacados na imagem como: (1) Computador; (2) Datalogger Agilent 34972a; (3) Fontes de Corrente Contínua Minipa MPL-1303M; (4) Câmera Termográfica Flir A645sc (640x480 pixels de resolução); (5) Mesa Elevadora ME1 Optron; (6) Mesa Óptica Optron (600x800 mm); (7) Conjunto de duas placas de aço (40x40x1 mm), com superfícies cobertas com uma tinta de emissividade conhecida, e duas resistências elétricas; e (8) Suporte bilateral para fixação do conjunto.



Figura 2 – Aparato experimental

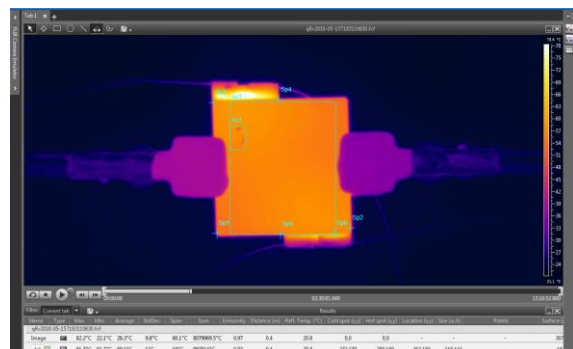


Figura 3 – Imagem termográfica no software Flir Research IR

O objetivo principal é a obtenção da distribuição de temperaturas em regime permanente na superfície da placa ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , com cada pixel da imagem equivalente a um dado térmico específico. A Fig. 3 apresenta o ambiente do software FLIR ReasearchIR para o experimento realizado, com destaque para a seleção da região na qual serão considerados os dados térmicos experimentais, com largura  $L_{\text{exp}_x} \approx 31,56 \text{ mm}$  e altura  $L_{\text{exp}_y} \approx 39,18 \text{ mm}$ .

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Formuladas as metodologias diretas e inversas, pode-se aplicá-las, então, à solução computacional dos problemas abordados, utilizando-se códigos desenvolvidos, e validados, no software de computação simbólica Wolfram Mathematica 11 (Wolfram, 1999), instalado em um notebook com processador Intel Core™ i7-7500U @2.70 Ghz, 16GB de memória RAM, SSD de 128GB e SO Windows 10.

A apresentação dos resultados será dividida em duas partes. Primeiramente, a metodologia inversa via MCMC é aplicada aos dados experimentais originais, utilizando a técnica de regularização *Total Variation (TV)*. A segunda etapa consiste na solução do problema inverso via MCMC, sem a *TV* como *priori*, i.e.  $\gamma = 0$  na Eq. (4), utilizando os dados experimentais previamente regularizados com o truncamento das autofunções associadas.

Para todos os resultados, utilizou-se as propriedades do aço SAE 1020 em uma amostra quadrada termicamente fina (Fig. 1), com destaque para a condutividade térmica  $k \approx 51,9 \text{ W/mK}$ . Além disso, a temperatura ambiente no regime permanente foi  $T_\infty = 20,8 \text{ }^\circ\text{C}$ , o coeficiente de troca térmica, calculado pela Eq. (2), foi  $h = 20,64 \text{ W/m}^2\text{K}$  e o desvio padrão, relacionado à variância experimental no MCMC, foi  $\sigma = 0,11 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Os resultados são referentes a um experimento com dois fluxos impostos, de forma simultânea, no contorno, com valores iguais e posições opostas na amostra. Teoricamente, essa configuração pode ser representada pela seguinte expressão:

$$q(x, y) \cong \begin{cases} 2137,5 \text{ W/m}^2, & (0 \text{ mm} \leq x < 20 \text{ mm}) \& (24,86 \text{ mm} \leq y \leq 40 \text{ mm}) \\ 2137,5 \text{ W/m}^2, & (20 \text{ mm} \leq x \leq 40 \text{ mm}) \& (0 \text{ mm} \leq y \leq 16,28 \text{ mm}) \\ 0 \text{ W/m}^2, & \text{em todo o restante do domínio } 40 \times 40 \text{ mm} \end{cases} \quad (7)$$

### 4.1 Dados Térmicos Originais com o Uso da TV

Os dados experimentais obtidos via termografia possuem um perfil bem definido de baixa oscilação, como mostra a Fig. 4.

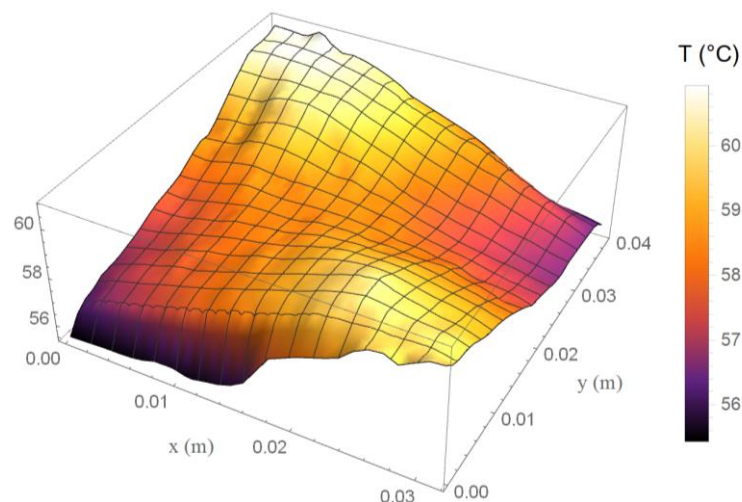


Figura 4 – Dados térmicos experimentais reais obtidos via termografia por infravermelho.



Para a solução inversa via MCMC, são utilizados 250 mil estados na cadeia de Markov, sendo os 150 mil primeiros descartados como estados de aquecimento. Além disso, adota-se um passo  $\delta q = 3.5 \text{ W/m}^2$  para a geração dos candidatos em cada estado. As Figs. 5(a-b) apresentam as estimativas para os fluxos para dois diferentes valores de  $\gamma$ .

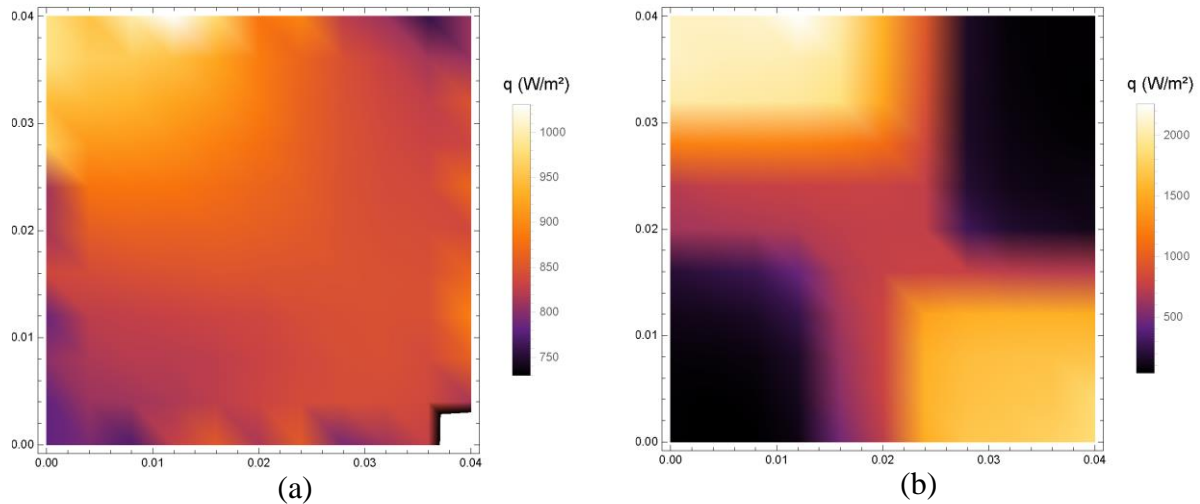


Figura 5 – Fluxos bidimensionais, sendo x o eixo horizontal e y o vertical, estimados com TV para: (a)  $\gamma = 1000$ ; (b)  $\gamma = 50$ .

Com relação ao procedimento de regularização da TV, percebe-se, claramente, a importância da escolha correta dos valores de  $\gamma$ , já que, de acordo com a Fig. 5(a), a estimativa do fluxo térmico para  $\gamma = 1000$  ficou completamente errada. Já a estimativa representada pela Fig. 5(b) teve um comportamento adequado, dentro do que era esperado.

A estimativa para  $\gamma = 50$  possui regiões quadrangulares bem delimitadas, sem a presença de grandes oscilações e com valores aceitáveis para o experimento proposto. As Figs. 6(a-b) apresentam os perfis para o fluxo imposto, estimado com  $\gamma = 50$ , em duas posições específicas dentro do domínio avaliado, comparando com o perfil de referência (Eq. (7)).

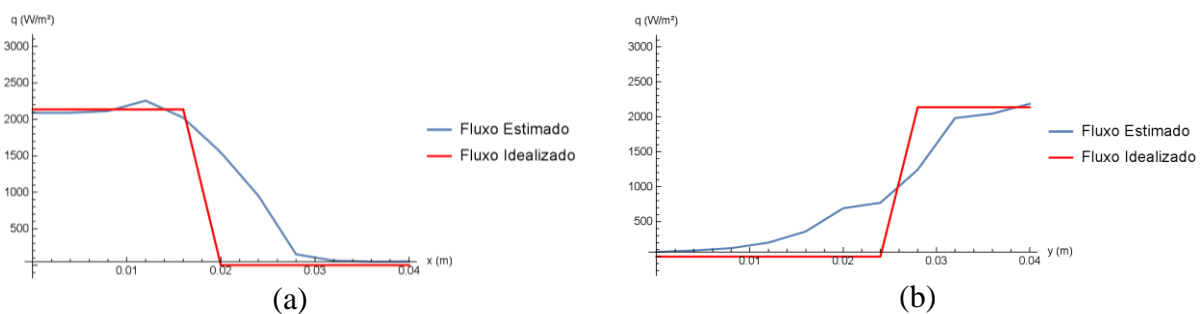


Figura 6 – Perfis para o fluxo estimado com  $\gamma = 50$  em: (a)  $y = 0.04 \text{ m}$ ; (b)  $x = 0.01 \text{ m}$ .

As Figs. 7(a-b) apresentam, respectivamente, um gráfico 3D para fluxo estimado, em comparação com o fluxo de referência, e a evolução das cadeias de Markov para dois pontos discretos da função fluxo estimado, contemplando regiões com e sem fluxo aplicado.

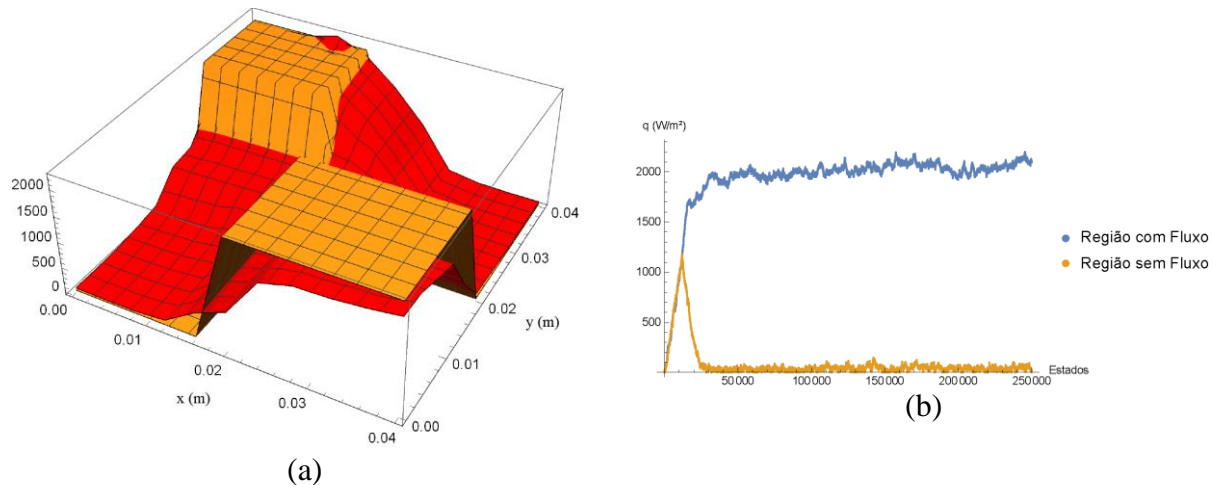


Figura 7 – Fluxo estimado para  $\gamma = 50$ . (a) Comparação entre os fluxos estimado e de referência; (b) Cadeias de Markov para regiões com e sem fluxo próximas à  $x = 0$ .

De acordo com os resultados obtidos para  $\gamma = 50$ , percebe-se uma boa equivalência com relação ao fluxo base. As cadeias de Markov apresentaram uma boa convergência, com o algoritmo apresentando um taxa de aceitação de aproximadamente 54%, e o coeficiente de troca térmica foi estimado com um erro relativo de apenas 0,13 %, i.e.  $h_{est} \approx 20,67 W / m^2 K$ .

As principais diferenças estão relacionadas à condutividade térmica do material utilizado. Primeiramente, o material utilizado é muito condutor, difundindo o calor aplicado em uma determinada região e aquecendo a amostra como um todo, como em regiões em que não existe a imposição direta de fluxo. Isso torna o perfil de temperatura mais homogêneo, diminuindo a sensibilidade associada, e dificultando uma melhor estimativa, principalmente nas regiões de transições, que, como ilustrado, possui valores não nulos de fluxo.

O segundo fator está relacionado ao valor adotado para o  $k$ , que não corresponde exatamente ao da amostra usada, fazendo com que o fluxo estimado sofra uma compensação para que as temperaturas calculadas se aproximem ao máximo dos dados experimentais. Além disso, as imprecisões experimentais também possuem alguma relevância.

## 4.2 Dados Térmicos Regularizados pelas Autofunções e sem o Uso da TV

Como pode ser visto na Fig. 5, a determinação do valor ideal para o parâmetro de regularização  $\gamma$  é uma tarefa difícil, pois não se tem um critério de referência para tal procedimento. Desta forma, de acordo com o proposto na Seção 2.2, utiliza-se a expansão em termos das autofunções para substituir os dados térmicos experimentais antes que os mesmos sejam aplicados ao MCMC.

Novamente, utiliza-se 250mil estados, sendo os 150mil primeiros como aquecimento. Para os resultados seguintes, adotou-se  $\delta q = 1 W / m^2$ , na tentativa de se amenizar as oscilações e os “bicos” nas estimativas, já que a TV não foi adotada como *priori*. As Figs. 8(a-b) apresentam as estimativas para os fluxos com relação à ordem de truncamento na regularização dos dados experimentais.



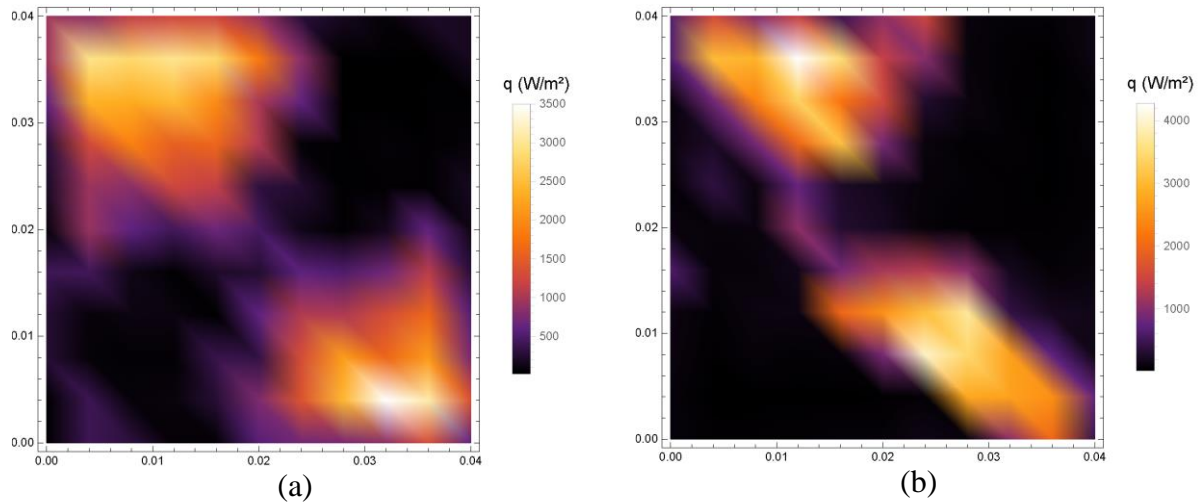


Figura 8 – Fluxos bidimensionais, sendo  $x$  o eixo horizontal e  $y$  o vertical, estimados sem  $TV$  para: (a)  $Ntr = 5$  termos; (b)  $Ntr \rightarrow \infty$ , i.e. sem regularização (dados térmicos reais).

Nota-se, novamente, a importância da regularização para a estimativa do fluxo térmico. Nesse caso, ambos os resultados apresentam um comportamento longe do ideal, o que era, em parte, esperado. Apesar disso, a aplicação de dados previamente regularizados uniformizou e delimitou as regiões onde existe fluxo imposto, possibilitando uma identificação visível de tais regiões. Além disso, se comparada ao caso apresentado pela Fig. 8(b), a estimativa com dados regularizados apresenta valores menores e, assim, mais próximos da referência.

## 5. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos indicam o funcionamento adequado da metodologia inversa adotada na solução do problema abordado, sendo capaz de reconstruir os fluxos térmicos experimentais dentro de uma margem esperada.

A aplicação das técnicas de regularização foi fundamental para os resultados obtidos, tendo em vista que o caso em que nenhuma regularização foi utilizada apresentou um comportamento distante da referência. Em especial, a  $TV$  se mostrou muito eficiente, mesmo associada aos dados experimentais brutos, principalmente no que diz respeito à redução de picos e oscilações de um modo geral.

Em contrapartida, a utilização pura da regularização por expansão em autofunções não forneceu uma estimativa muito boa, apesar de delimitar visivelmente a região com fluxo térmico. A utilização de ambas as técnicas em conjunto já está sendo providenciada, e os resultados serão apresentados em artigos futuros.

Além disso, a solução via abordagem explícita do problema aqui tratado também está sendo desenvolvida, com a aplicação de dados térmicos experimentais obtidos com outras configurações.

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio financeiro das agências FAPERJ, CNPq e CAPES.

## REFERÊNCIAS

- Colaço, M.J.; Orlande, H.R.; Dulikravich, G.S. (2006), Inverse and optimization problems in heat transfer. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 28(1), 1-24.
- Duda, P. (2017), Solution of inverse heat conduction problem using the Tikhonov regularization method. *Journal of Thermal Science*, 26(1), 60-65.
- Bergman, T.L.; Incropera, F.P.; DeWitt, D.P.; Lavine, A.S. (2011), *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons.
- Chambolle, A.; Caselles, V.; Cremers, D.; Novaga, M.; Pock, T. (2010), An introduction to total variation for image analysis. *Theoretical foundations and numerical methods for sparse recovery*, 9(263-340), 227.
- Knupp, D.C.; Abreu, L.A.S. (2016), Explicit boundary heat flux reconstruction employing temperature measurements regularized via truncated eigenfunction expansions. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 78, 241-252.
- Meola, C.; Carlomagno, G.M. (2004), Recent advances in the use of infrared thermography. *Measurement science and technology*, 15(9), R27.
- Mikhailov, M.D.; Ozisik, M.N. (1984), *Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion*. John Wiley & Sons, New York.
- Orlande, H.R.; Colaço, M.J.; Dulikravich, G.S. (2008), Approximation of the likelihood function in the Bayesian technique for the solution of inverse problems. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 16(6), 677-692.
- Qian, Z.; Fu, C.L. (2007), Regularization strategies for a two-dimensional inverse heat conduction problem. *Inverse Problems*, 23 (3), 1053.
- Sanches, E.S.; Mascouto, F.S.; Knupp, D.C.; Abreu, L.A.S.; Silva Neto, A.J. (2016), Estimativa da condutividade térmica de uma amostra através do uso da termografia por infravermelho e do método de Monte Carlo via Cadeias de Markov. *Encontro Nacional de Modelagem Computacional – XIX ENMC*, João Pessoa.
- Singh, S.K.; Yadav, M.K.; Sonawane, R.; Khandekar, S.; Muralidhar, K. (2017), Estimation of time-dependent wall heat flux from single thermocouple data. *International Journal of Thermal Sciences*, 115, 1-15.
- Yang, L.; Wang, Y.; Liu, H.; Yan, G.; Kou, W. (2014), Infrared identification of internal overheating components inside an electric control cabinet by inverse heat transfer problem. *International Symposium on Optoelectronic Technology and Application 2014: Infrared Technology and Applications*, International Society for Optics and Photonics, 9300, 930002.
- Wolfram, S. (1999), *The MATHEMATICA® book*, Cambridge university press, 4.
- Wróblewska, A.; Frąckowiak, A.; Ciałkowski, M. (2016), Regularization of the inverse heat conduction problem by the discrete Fourier transform. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 24(2), 195-212.

## TWO-DIMENSIONAL HEAT FLUX ESTIMATION IN STEADY STATE WITH THE MARKOV CHAIN MONTE CARLO METHOD, REGULARIZATION TECHNIQUES AND INFRARED THERMOGRAPHY

**Abstract.** *The present article addresses the estimation of permanent heat fluxes with two-dimensional variation, applied to one of the boundaries of a thermally thin plate, using the Markov Chain Monte Carlo method (MCMC) to solve the respective inverse problem, as well as the regularization techniques based on Total Variation employed as prior information, and on the substitution of the experimental data by truncated expansions of the associated eigenfunctions. In addition to the inverse and regularization methodologies, the Finite Difference Method (FDM) is used to solve the direct problem, whose model equals to a heat conduction problem in steady state and with variation in two spatial directions. The results presented for the inverse problem refer to real experimental data obtained via infrared thermography for one studied case, emphasizing the influence of their regularization to recover the imposed thermal flux.*

**Keywords:** *Heat Transfer, Infrared Thermography, Inverse Problem, Regularization Techniques, Bayesian Inference*