

08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

UMA COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS E A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA PARA A SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO BIDIMENSIONAL

Gisele Moraes Marinho¹ - gmarinho@iprj.uerj.br

Diego Campos Knupp¹ - diegoknupp@iprj.uerj.br

João Flávio Vieira Vasconcellos¹ - jflavio@iprj.uerj.br

¹Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico - Nova Friburgo, RJ, Brazil

Resumo. Neste trabalho são consideradas soluções aproximadas para a equação de difusão anômala com distribuição de fluxo bimodal bidimensional obtidas através do Método de Volumes Finitos e da Técnica da Transformada Integral Generalizada. Os resultados são comparados às respectivas soluções analíticas e demonstram a boa convergência dos métodos para os casos analisados.

Palavras-chave: Difusão, Método dos Volumes Finitos, Técnica da Transformada Integral Generalizada

1. INTRODUÇÃO

Fenômenos de difusão são geralmente modelados matematicamente pela clássica lei de Fick. No entanto, há um grande número de fenômenos que exibem difusão anômala, ou seja, que não podem ser modelados com precisão por equações de difusão de segunda ordem. Na maioria dos casos, tais fenômenos são geralmente descritos através de generalizações da Lei de Fick ou através de equações diferenciais de ordem fracionária. Essa última abordagem apresenta aplicações relativamente recentes em medicina (Xiao et al., 2015), na modelagem de transporte de contaminantes de águas subterrâneas (Benson et al., 2000), entre outros casos.

Bevilacqua et al. (2011) apresentaram, a partir de uma abordagem discreta de dinâmica de populações, apresentaram uma nova formulação para o processo de difusão anômala onde ocorre retenção temporária de fluxo. De acordo com esses autores, esse processo pode ser representado pela seguinte equação:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \beta k_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \beta (1 - \beta) k_4 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \quad (1)$$

O efeito de retenção é representado na Eq. (1) pelo termo em que há a derivada de quarta ordem. Os coeficientes k_2 e k_4 são denominados de coeficiente de difusão e coeficiente de reatividade, respectivamente. Nessa nova abordagem, o processo de difusão está associado a dois fluxos, um correspondente à fração β , denominado fluxo primário, e o outro à fração $(1 - \beta)$, denominado fluxo secundário, sendo também chamada de equação de difusão com distribuição de fluxo bimodal.

Sob a perspectiva dessa nova abordagem, a Eq. (1) representa o processo de difusão submetido a distúrbios de fluxo abrangendo aceleração, atraso ou estagnação em função dos valores relativos de k_2 , β , k_4 e das condições de contorno (Bevilacqua et al., 2013).

Alguns trabalhos recentes investigaram a solução numérica desse novo modelo empregando diferentes métodos, tais como o Método de Diferenças Finitas (Silva, 2013), o Método de Elementos Finitos (Simas, 2013), o Método de Volumes Finitos (Vasconcellos et al., 2016) e a Técnica da Transformada Integral Generalizada (Marinho et al., 2015).

Neste artigo são empregados dois métodos distintos, o Método de Volumes Finitos (MVF) e a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), propícia para fins de validação, para a solução da equação de difusão com distribuição de fluxo bimodal em duas dimensões, apresentada inicialmente por Jiang (2017). Para tanto será considerada a seguinte equação:

$$\phi_t = \Gamma_2 \Delta \phi - \Gamma_4 \Delta^2 \phi + g(x, y, t), \quad \Omega \times [0, t_f] \quad (2a)$$

com condição inicial

$$\phi(x, y, 0) = \text{sen}(k\pi x) \text{sen}(k\pi y) \quad (2b)$$

sujeita às condições de contorno

$$\phi = 0, \quad \Delta \phi = 0, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times [0, t_f] \quad (2c)$$

onde $\Gamma_2 = \beta k_2$, $\Gamma_4 = \beta(1 - \beta)k_4$, $g(x, y, t)$ é um termo fonte, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ é o domínio espacial e $t \in [0, t_f]$,

2. Método de Volumes Finitos

O Método de Volumes Finitos (MVF) é um método utilizado para se obter uma versão discreta de uma equação diferencial a partir da integração dessa equação em uma região, ou volume de controle, de forma que em cada volume discretizado, sejam obedecidas as leis de conservação.

Após a formulação do problema, para a obtenção da solução numérica, devem ser seguidos os seguintes passos:

- discretização geométrica do domínio: abrange a definição do tipo de malha e do tipo de volumes que serão empregados;

- discretização matemática das equações: é realizada a integração das equações diferenciais, aplicação das aproximações numéricas dos termos resultantes e aplicação das condições de contorno;
- obtenção da solução numérica.

2.1 Discretização Geométrica

No método dos volumes finitos a malha gerada sobre o domínio de cálculo, consiste em um conjunto de volumes de controle. A discretização do método pode variar de acordo com o tipo de malha empregado, quanto à disposição relativa entre as faces e o centro dos volumes e quanto ao tipo de volume empregado no contorno ou nas fronteiras.

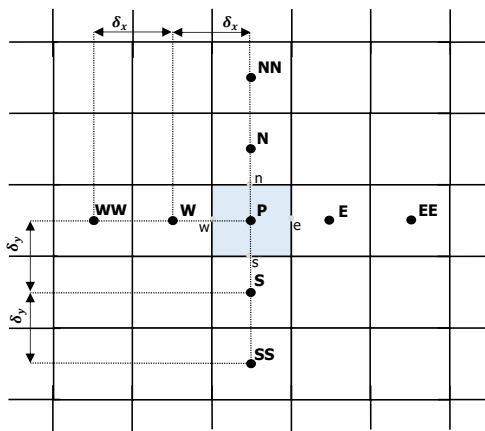


Figura 1- Discretização volumes internos

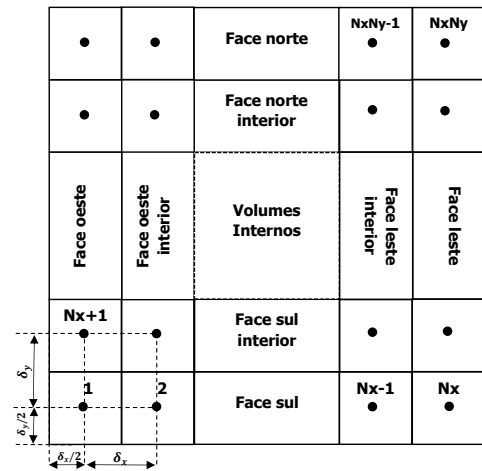


Figura 2- Discretização volumes de contorno

As Figuras 1 e 2 ilustram a discretização de uma malha bidimensional estruturada e com nós centrados, com fronteiras dadas pelos pontos w , e , s e n . Os pontos discretos W e P estão separados por uma distância δx e os pontos S e P , por uma distância δy .

Neste trabalho, a malha utilizada será estruturada, uniforme, com nós centrados e com volumes inteiros para a discretização do contorno.

2.2 Discretização Matemática

A discretização matemática para o MVF consiste na integração das equações diferenciais que compõem o modelo matemático sobre os volumes de controle e posterior aproximação numérica dos termos resultantes e suas condições de contorno e iniciais, formando um sistema de equações. Inicialmente a Eq. (2a) é reescrita como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Gamma_2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \Gamma_4 \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right) + g(x, y, t) \quad (3)$$

A Eq. (3) é integrada sobre cada um dos volumes de controle no domínio do tempo e do espaço:

$$\int_w^e \int_s^n \int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt dy dx = \int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \left[\int_s^n \int_w^e \left(\Gamma_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \Gamma_4 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right) dx dy + \int_w^e \int_s^n \left(\Gamma_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \Gamma_4 \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right) dy dx + \int_w^e \int_s^n g(x, y, t) dx dy \right] dt \quad (4)$$

A integração no espaço do termo entre colchetes da Eq. (4) fornece:

$$\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} F(\phi(t)) dt = \int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \left[\left(\Gamma_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_w \right) - \Gamma_4 \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Big|_e - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Big|_w \right) \right) \Delta y + \left(\Gamma_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n - \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_s \right) - \Gamma_4 \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Big|_n - \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \Big|_s \right) \right) \Delta x + \bar{g}_{ij} \Delta x \Delta y \right] dt \quad (5)$$

Considerando o valor de $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ como uniforme no volume de controle, integrando o lado esquerdo da Eq. (4) diretamente no espaço, utilizando o teorema fundamental do cálculo para a integral no tempo e empregando uma discretização implícita para a aproximação de $F(\phi(t))$, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} (\Delta x \Delta y) = F(\phi^{n+1}) \quad (6)$$

Há várias formas de se aproximar tanto o fluxo primário quanto o secundário no âmbito do MVF. Como a modelagem do fluxo de retenção exige que mais pontos sejam utilizados, visto que esse fluxo envolve derivadas de terceira ordem, empregar mais pontos também na avaliação do fluxo de Fick não alteraria a forma da matriz resultante do sistema linear de equações envolvido na solução deste problema. Para a modelagem dos fluxos, além do ponto discreto P foram utilizados mais quatro pontos da direção x , dois à esquerda (WW e W) e dois à direita (E e EE) e mais quatro pontos na direção y , dois abaixo (SS e S) e dois acima (N e NN).

Dessa forma, substituindo as aproximações, obtém-se a equação geral que pode ser aplicada em cada um dos volumes de controle:

$$a_P \phi_P^{n+1} = a_{SS} \phi_{SS}^{n+1} + a_S \phi_S^{n+1} + a_{WW} \phi_{WW}^{n+1} + a_W \phi_W^{n+1} + a_E \phi_E^{n+1} + a_{EE} \phi_{EE}^{n+1} + a_N \phi_N^{n+1} + a_{NN} \phi_{NN}^{n+1} + S_C \quad (7)$$

onde

$$S_C = \Delta x \Delta y \left(\frac{\phi_P^n}{\Delta t} + g_P^{n+1} \right) \quad (8)$$

contém as informações da solução no tempo anterior e do termo fonte.

Ao observar a Fig. 2, que ilustra a os contornos da malha bidimensional, é possível notar que nos volumes de contorno não estão definidos alguns pontos discretos, como por exemplo, para o primeiro volume, volume 1, não estão definidos os pontos WW , W , SS e S , para o segundo

volume, volume 2, não estão definidos os pontos W , SS e S , o que impossibilita escrever a equação que descreve tais volumes utilizando a Eq. (7). O mesmo acontece com os demais volumes nos contornos, sendo necessária uma nova análise para determinar as equações que os descrevem. As equações dos volumes dos contornos foram obtidas fazendo expansões em série de Taylor dos pontos discretos disponíveis em torno dos contornos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$.

No total, para cada condição de contorno, há um conjunto de 25 equações distintas, uma para os volumes internos, dada pela Eq. (7), e outras 24 para os diferentes volumes do contorno.

A cada passo de tempo Δt , os valores da função ϕ são calculados através da resolução de um sistema de equações algébricas lineares $Az = b$, no qual a matriz A é uma matriz com nove diagonais, z é um vetor que guarda as informações das posições x e y de cada volume de controle e b é o vetor com o termo independente, que armazena S_C e as informações das condições de contorno.

3. Técnica da Transformada Integral Generalizada

O segundo método empregado é a GITT - Técnica da Transformada Integral Generalizada (Cotta, 1993). A GITT oferece mais flexibilidade no tratamento de problemas não transformantes, incluindo, entre outros, a análise de problemas de difusão não linear e de convecção-difusão, em comparação com a Técnica de Transformação Integral Clássica. Por outro lado, a GITT mantém o caráter analítico da técnica clássica, resultando em soluções que permitem tolerâncias prescritas pelo usuário e podem ser usadas como resultados de benchmark. Esse método utilizado em conjunto com a computação simbólica permite uma considerável redução no tempo dispensado com a formulação matemática e análise de dados.

3.1 Solução via Transformação Integral

O problema (2) é integralmente transformado ao longo das direções x e y usando as equações de transformada e de inversão:

$$\bar{\phi}_{m,n}(t) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_m(x) \tilde{Y}_n(y) \phi(x, y, t) dy \quad (9a)$$

$$\phi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{X}_m(x) \tilde{Y}_n(y) \bar{\phi}(t) \quad (9b)$$

As autofunções X_m e Y_n são obtidas através da solução de um problema auxiliar de autovalor conhecido, utilizado em equações diferenciais de quarta ordem, e que pode ser encontrado em livros e artigos sobre vibrações e métodos de resolução de EDPs (Matt, 2013):

$$X_m(\alpha_m, x) = \sin \left(\frac{x\alpha_m}{\Gamma_4^{1/4}} \right), \quad Y_n(\lambda_n, y) = \sin \left(\frac{y\lambda_n}{\Gamma_4^{1/4}} \right) \quad (10a,b)$$

e os autovalores α_m e λ_n são as raízes das equações das equações transcendentais $X_m(\alpha_m, x) = 0$ e $Y_n(\lambda_n, y) = 0$, respectivamente:

$$\alpha_m = m\pi\Gamma_4^{1/4}, \quad \lambda_n = n\pi\Gamma_4^{1/4} \quad (11a,b)$$

As autofunções normalizadas são definidas como:

$$\tilde{X}_m(\alpha_m, x) = \frac{X_i(\alpha_m, x)}{\sqrt{N_m}}, \quad \tilde{Y}_n(\lambda_n, y) = \frac{Y_n(\lambda_n, y)}{\sqrt{N_n}} \quad (12a,b)$$

com integrais de normalização:

$$N_m = N_n = \frac{1}{2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (13)$$

As somatórias duplas são reorganizadas na forma de um somatório único, usando os autovalores bidimensionais $\mu_i^2 = \alpha_m^2 + \lambda_n^2$ em ordem crescente.

Reescrevendo $\tilde{\psi}_i(x, y) = \tilde{X}_m(x)\tilde{Y}_n(y)$ e aplicando o operador $\int_0^1 \int_0^1 \tilde{\psi}_i(x, y) dx dy$ sobre a Eq. (2a), obtém-se os seguintes sistemas de equações acopladas:

$$\frac{d\bar{\phi}_i}{dt} + \mu^4 \bar{\phi}_i(t) = \beta k_2 \sum_{i=1}^{nT} A_{ij} \bar{\phi}_i(t) + \bar{g}_i(t), \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (14a)$$

Os componentes da matriz A_{ij} são definidos por:

$$A_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\psi}_i(x, y) \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_j(x, y)}{\partial x^2} dx dy + \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\psi}_i(x, y) \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_j(x, y)}{\partial y^2} dx dy \quad (14b)$$

e o termo fonte é transformado como:

$$\bar{g}_i(t) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\psi}(\mu_i, x, y) g(x, y, t) dx dy \quad (14c)$$

Da mesma forma, a condição inicial é também transformada de modo a eliminar a dependência de x e y :

$$\bar{\phi}_i(0) = \int_0^1 \tilde{\psi}(\mu_i, x, y) \phi(x, y, 0) dx \quad (14d)$$

A solução geral do problema é então dada por:

$$\phi(x, y, t) = \sum_{i=1}^{nT} \tilde{\psi}(\mu_i, x, y) \bar{\phi}_i(t) \quad (15)$$

onde $\bar{\phi}_i(t)$ é a solução do sistema de equações dado pelas Eqs.(14a-14d) e nT é a ordem de truncamento ou o número de termos utilizados na expansão.

4. Resultados e Discussões

O problema em análise foi computacionalmente resolvido utilizando o sistema de computação simbólica Mathematica[®](Wolfram, 2003) para a solução através da Técnica da Transformada

Integral Generalizada e uma rotina em linguagem C++ para o Método de Volumes Finitos. O algoritmo utilizado na solução dos sistemas de equações lineares resultante do MVF foi o método Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado (Vandervorst, 1992), no qual não se faz necessário o armazenamento de toda a matriz, mas apenas de suas diagonais, reduzindo possíveis problemas com memória e o custo computacional.

Para avaliar o erro entre as soluções numéricas e analíticas foram utilizados o erro relativo e a norma máxima:

$$\epsilon_{rel} = \|\phi_{exato} - \phi_{aproximado}\|_2 / \|\phi_{exato}\|_2 \quad (16a)$$

$$\|\epsilon\|_{\infty} = \max |\phi_{exato} - \phi_{aproximado}| \quad (16b)$$

4.1 Exemplo 1

Considere o problema definido pelas Eqs.(2a-2c) e na ausência de termos fontes, ou seja, $g(x, y, t) = 0$, com $k = 1$, $\beta = 0, 2$, $k_2 = 10^{-3}$, $k_4 = 10^{-5}$ e $t_f = 50$. A solução exata para este problema é dada por:

$$\phi(x, y, t) = e^{(-2\Gamma_2\pi^2t)} e^{(-2\Gamma_4\pi^4t)} \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) \quad (17)$$

A Figura 1 abaixo mostra a evolução temporal do erro máximo para o MVF considerando uma malha uniforme com $\Delta x = \Delta y = h$ em função de diferentes valores de h . Conforme esperado, há uma diminuição no erro máximo com o refinamento da malha espacial.

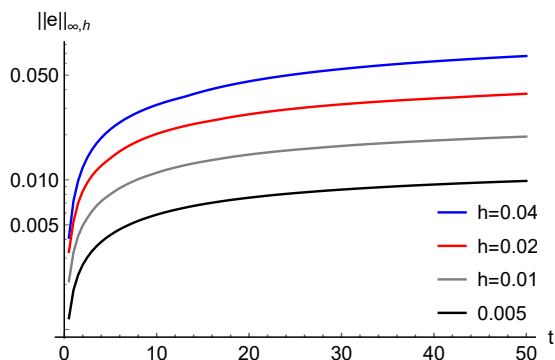


Figura 3- Evolução do erro máximo em função do tamanho da malha - MVF, $t = 50$.

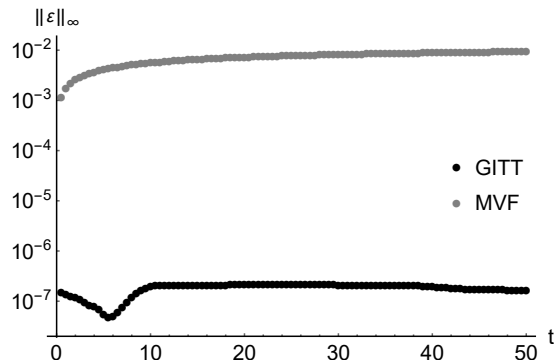


Figura 4- Comparação entre o erro máximo utilizando o MVF e a GITT.

Na Figura 2 é apresentada uma comparação entre os erros máximos obtidos com a GITT, utilizando uma ordem de truncamento $Ntr = 10$ termos, e com o MVF, utilizando uma malha com 200 volumes em cada direção, $h = 0, 005$, e um passo no tempo $\Delta t = 0, 5$.

4.2 Exemplo 2

Considere agora o problema definido pelas Eqs.(2a-2c) com $k = 2$, $\beta = 0, 2$, $k_2 = 10^{-1}$, $k_4 = 10^{-3}$, $t_f = 1$ na presença de um termo fonte:

$$g(x, y, t) = e^t(1 + 8\Gamma_2\pi^2 + 32\Gamma_4\pi^4)\text{sen}(2\pi x)\text{sen}(2\pi y) \quad (18)$$

A solução exata para este problema é dada por:

$$\phi(x, y, t) = e^t \text{sen}(2\pi x)\text{sen}(2\pi y) \quad (19)$$

Nas Figuras a seguir são apresentados os perfis das soluções numéricas para o exemplo 2, bem como o comportamento dos erros relativo e absoluto, novamente utilizando uma ordem de truncamento $Ntr = 10$ termos para a GITT, $h = 0,005$ e $\Delta t = 0,01$ no MVF.

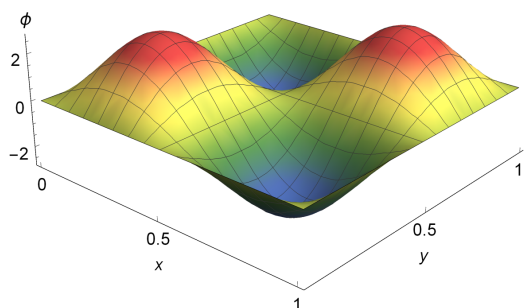


Figura 5- Perfil da solução numérica utilizando a GITT com $t = 1$.

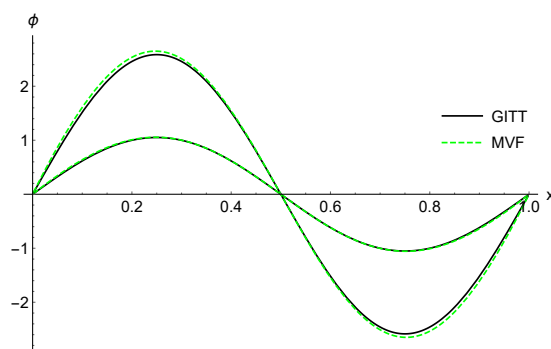


Figura 6- Comparação entre a solução numérica utilizando o MVF e a GITT com $y = 0,3$ nos tempos $t = 0,1$ e $t = 1$.

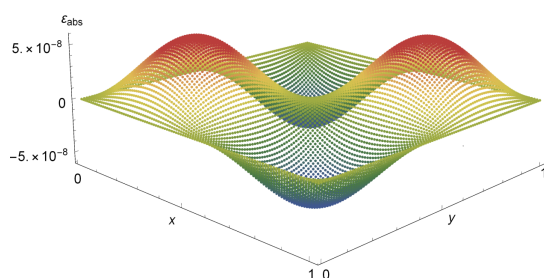


Figura 7- O perfil do erro absoluto entre a solução obtida com a GITT e a solução exata, $t = 1$.

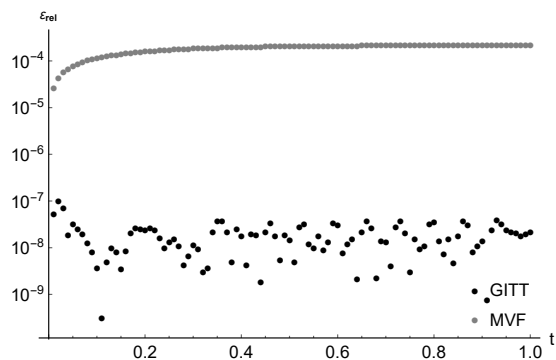


Figura 8- Comparação entre o erro relativo utilizando o MVF e a GITT.

4.3 Exemplo 3

Considere agora o problema definido pelas Eqs.(2a-2c) com $k = 1$, $\beta = 0,2$, $k_2 = 10^{-3}$, $k_4 = 10^{-5}$, $t_f = 5$ na presença de um termo fonte $g(x, y, t) = h(x, y)e^{-t}$, onde $h(x, y)$ é apresentado na figura a seguir:

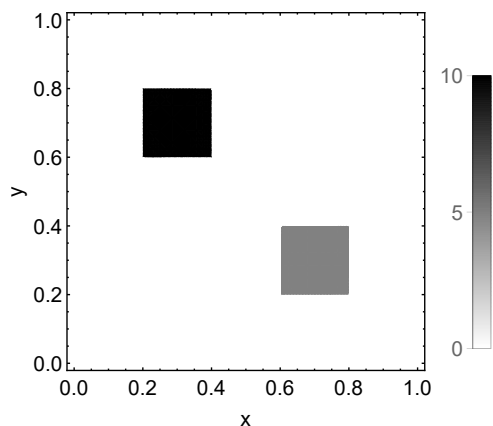


Figura 9- Perfil da função $h(x, y)$ utilizada no termo fonte.

Nas Figuras a seguir são apresentados os perfis das soluções numéricas para o exemplo 2 novamente utilizando uma ordem de truncamento $Ntr = 40$ termos para a GITT, $h = 0,005$ e $\Delta t = 0,05$ no MVF.

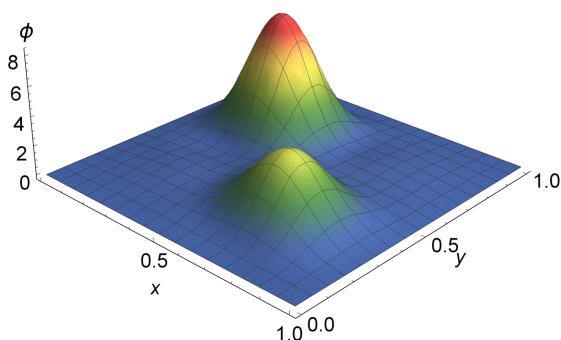


Figura 10- Perfil da solução numérica utilizando a GITT com $t = 5$.

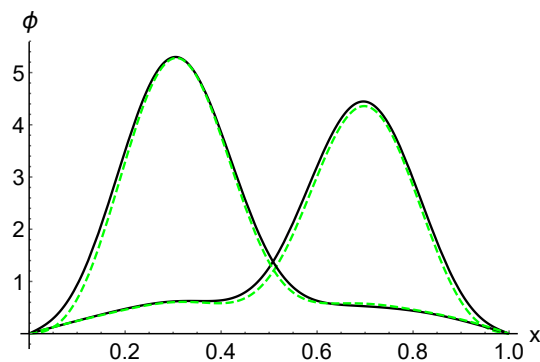


Figura 11- Comparação entre a solução numérica utilizando o MVF e a GITT com $y = 0,3$, $y = 0,6$ nos tempos $t = 1$ e $t = 5$.

Tabela 1- Comparação entre as soluções via GITT e MVF

(x,y)	GITT	MVF	$ \phi_{GITT} - \phi_{MVF} $	GITT	MVF	$ \phi_{GITT} - \phi_{MVF} $
	$t = 1$			$t = 5$		
(0, 2; 0, 6)	2,16662	2,09091	$7,57061 \times 10^{-2}$	3,50235	3,29029	$2,1206 \times 10^{-2}$
(0, 4; 0, 6)	2,55823	2,58742	$2,91956 \times 10^{-2}$	3,86096	3,78727	$7,36882 \times 10^{-2}$
(0, 6; 0, 2)	1,36354	1,32371	$3,98302 \times 10^{-2}$	1,99197	1,91815	$7,3815 \times 10^{-2}$
(0, 6; 0, 4)	1,67662	1,74412	$6,74989 \times 10^{-2}$	2,34722	2,34627	$9,43284 \times 10^{-4}$

5. CONCLUSÕES

Ao analisar os gráficos apresentados, pode-se observar que os resultados obtidos através da GITT, para os casos analisados, são mais acurados do que os obtidos pelo Método de Volumes

Finitos, demonstrando a propriedade da GITT de ser um método computacional alternativo particularmente adequado a propósitos de benchmark (validação).

Com a solução para o modelo bidimensional já desenvolvida, a próxima etapa deste trabalho consiste em estudar a equação de difusão de difusão apresentada incluindo um termo de advecção a fim de abranger uma maior gama de aplicações, a análise do desvio quadrático médio da equação para diferentes conjuntos de parâmetros, com a finalidade de caracterizar o comportamento da difusão, e o emprego dos métodos na solução de problemas inversos.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro fornecido da FAPERJ, Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro, do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, e da CAPES, Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Referências

- Benson, D., Whearcraft, S. and Meerschaert, M. (2000), Application of a fractional advection–dispersion equation. *Water Resources Research*, 36, 1403-1413.
- Bevilacqua, L.; Galeão, A. C. N. R.; Costa, F. P. (2008), A new analytical formulation of retention effects on particle diffusion processes. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 83, 1443-1464.
- Bevilacqua, L. et al. (2013), A new theory for anomalous diffusion with a bimodal flux distribution. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 35, n. 4, 431–440.
- Cotta, R. M. (1993), “*Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*”. CRC Press, Boca Raton, Florida.
- Jiang, M. (2017), *The fourth order diffusion model for a bi-flux mass transfer*, Tese de Doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro.
- Marinho, G. M. et al (2015), Aplicação do método da transformada integral generalizada para solução da equação de difusão anômala com distribuição de fluxo bimodal. *XVIII Encontro Nacional de Modelagem Computacional e VI Encontro de Ciência e Tecnologia dos Materiais*, Salvador.
- Matt, C. (2015), Combined classical and generalized integral transform approaches for the analysis of the dynamic behavior of a damage structure. *Applied Mathematical Modelling*, 37, 8431–8450.
- Silva, L.G. (2013), “*Problemas inversos em problemas de difusão com retenção*”, Dissertação de Mestrado, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo.
- Simas, J.G. (2013), “*Modelagem computacional do problema de difusão com retenção*”, Dissertação de Mestrado, LNCC, Petrópolis.
- Vasconcellos, J.F., Marinho, G.M. e Zanni, J.H. (2016), Análise numérica da equação da difusão anômala com fluxo bimodal. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 33, 242-249.
- Vorst, H. (1992), Bi-cgstab: A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 13, 631–644.
- Wolfram, S. (2003), “*The Mathematica Book*”. Cambridge: Wolfram Media.
- Xiao, F., Hrabe, J., Hrabetova, S. (1993), Anomalous extracellular diffusion in rat cerebellum. *Biophysical Journal*, 108, 2384–2395.

A COMPARATION BETWEEN FINITE VOLUME SCHEMES AND GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORM TECHNIQUE FOR THE SOLUTION OF A TWO-DIMENSIONAL DIFFUSION EQUATION

Resumo. *In this work, approximate solutions are considered for the for solving the two-dimensional bi-flux anomalous diffusion equation by the Finite Volume Method and the Generalized Integral Transform Technique. The results are compared to their analytical solutions and demonstrate the good convergence of the methods for the presented cases.*

Keywords: *Diffusion, Finite Volume Method, Generalized Integral Transform Technique*