



08 a 11 de Outubro de 2018  
Instituto Federal Fluminense  
Búzios - RJ

## ESTIMATIVA DE FONTES TÉRMICAS COM VARIAÇÃO ESPACIAL E TEMPORAL EMPREGANDO UM MÉTODO EXPLÍCITO

**Anny Resende Negreiros**<sup>1,2</sup> - anegreiros@iprj.uerj.br

**Luiz Alberto da Silva Abreu**<sup>1</sup> - luiz.abreu@iprj.uerj.br

**Diego Campos Knupp**<sup>1</sup> - diegoknupp@iprj.uerj.br

**Antônio J. Silva Neto**<sup>1</sup> - ajsneto@iprj.uerj.br

<sup>1</sup> Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico - Nova Friburgo, RJ, Brasil

<sup>2</sup> Instituto Federal do Espírito Santo - Cachoeiro de Itapemirim, ES, Brasil

**Resumo.** *Este trabalho aborda o problema inverso de estimativa de fontes térmicas transientes relacionadas a uma placa unidimensional, bem como, emprega a Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT) com a aplicação de filtro para solução do problema direto. O modelo adotado permite expressar a função a ser determinada explicitamente por meio de manipulações algébricas do problema direto. É apresentada uma análise da regularização dos dados experimentais no campo transformado, com a aplicação da Técnica da Transformada Integral Clássica. O custo computacional com a aplicação da técnica é avaliado para dois estudos de caso, para a estimativa de dois tipos diferentes de função representativos da fonte térmica.*

**Palavras-chave:** *Problemas Inversos, CITT, Estimativa de Fonte, Formulação Explícita.*

### 1. INTRODUÇÃO

Problemas inversos de reconstrução de fontes térmicas podem fornecer respostas satisfatórias para aplicações na engenharia (Guerrieri, 2013; Kakaç & Yuncu, 1993), e em outras áreas de elevado interesse científico como na medicina (Mital & Scott, 2007).

A existência de solução, que seja única e que tenha uma dependência contínua (suave) aos dados de entrada são pressupostos de Haddamard para a definição de um problema bem-posto. Por não atender nenhuma dessas condições o problema inverso é classificado como um problema mal posto (Campos Velho, 2001).

Técnicas matemáticas vêm sendo aplicadas para melhorar o condicionamento de um problema inverso. Elas envolvem procedimentos de regularização, os quais possibilitam transformação e controle de ruídos nos dados experimentais. Por exemplo, no trabalho de Lapinski & Leble (2014), foi demonstrada a eficiência na estimativa de fonte de calor numa equação unidimensional utilizando a técnica de Tikhonov para regularizar. Com isso minimizou o caráter mal posto do problema. Em outro trabalho Hazanee et al. (2015) destaca que a mesma técnica de regularização, Tikhonov de segunda ordem, produziu resultados mais precisos para o problema

inverso de determinar a fonte de calor dependente do tempo na equação do calor sob uma condição de contorno dinâmica não clássica e uma condição de sobredeterminação integral. No caso da estimativa de fluxo de calor no contorno, Knupp & Abreu (2016) aplicando uma metodologia explícita empregou o truncamento para regularizar e obter resultados mais precisos.

Diante do exposto, o presente trabalho propõe a aplicação da abordagem explícita para a reconstrução de fontes térmicas em um problema de transferência de calor unidimensional regularizando o problema. A principal contribuição é a análise do problema inverso no campo da transformada, considerando uma ordem de truncamento selecionada de modo a satisfazer o princípio da discrepância. Os valores experimentais em cada tempo são integralmente transformados ao longo do domínio espacial para produzir medidas experimentais transformadas de ordem crescente, que é a ordem dos autovalores do problema auxiliar usada na transformação (Cotta et al., 2011). Com o objetivo de reduzir o custo computacional, utiliza-se filtro auxiliar na aplicação da CITT no problema direto.

## 2. PROBLEMA DIRETO

Considere um meio unidimensional com geração de energia interna  $g(x, t)$ . Uma das suas extremidades,  $x = 0$ , encontra-se termicamente isolada enquanto a extremidade oposta  $x = L$ , está exposta ao ambiente à temperatura  $T_\infty$ , trocando calor por convecção com um coeficiente efetivo de troca térmica  $h$ , como ilustra a representação esquemática apresentada na Fig. 1.

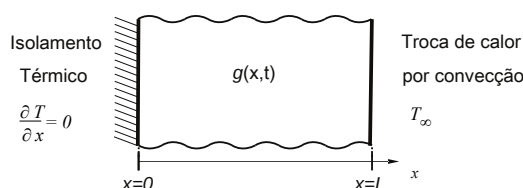


Figura 1- Representação esquemática do problema considerado.

Para o caso aqui tratado, considera-se que a temperatura  $T$  varia exclusivamente com a direção  $x$  e com o tempo  $t$ , assim como a geração de energia interna. Dessa forma, tem-se, a partir da equação geral de difusão térmica em coordenadas cartesianas (Incropera et al., 2011), o seguinte modelo matemático com as respectivas condições de contorno e inicial:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \frac{g(x, t)}{\kappa} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}, \quad 0 < x < L \quad e \quad t > 0 \quad (1a)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad t > 0 \quad (1b)$$

$$-\kappa \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = h [T(x, t)|_{x=L} - T_\infty], \quad t > 0 \quad (1c)$$

$$T(x, 0) = f(x) = T_0, \quad 0 < x < L \quad (1d)$$

onde  $\rho$  é a massa específica ( $kg/m^3$ ),  $\kappa$  é a condutividade térmica ( $W/(m \cdot K)$ ),  $c_p$  é o calor específico ( $J/(kg \cdot K)$ ) e  $\alpha = \kappa/\rho c_p$  é a difusividade térmica. O método da Transformada Integral Clássica (CITT) com aplicação de filtro é utilizado para a solução do problema direto (Ozisik, 1999). A estratégia de filtrar tem como objetivo remover os termos fonte, gerando

assim, dois novos problemas. Define-se

$$T(x, t) = T_f(x) + T^*(x, t) \quad (2)$$

onde  $T_f(x)$  é chamado de filtro e  $T^*(x, t)$  é o potencial filtrado. As Eqs. (3a-c) representam o problema filtro,

$$\frac{\partial^2 T_f(x)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L \quad (3a)$$

$$\left. \frac{\partial T_f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3b)$$

$$\kappa \left. \frac{\partial T_f(x)}{\partial x} \right|_{x=L} + h T_f(x)|_{x=L} = h T_\infty \quad (3c)$$

$$f^*(x) = f(x) - T_f(x) \quad (3d)$$

Para o problema filtro integra-se a Eq. (3a) duas vezes, e substitui as respectivas condições de contorno. Desta forma tem-se:

$$T_f(x) = T_\infty \quad (4)$$

O problema filtrado é representado por:

$$\frac{\partial^2 T^*(x, t)}{\partial x^2} + \frac{g(x, t)}{\kappa} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T^*(x, t)}{\partial t}, \quad 0 < x < L \quad e \quad t > 0 \quad (5a)$$

$$\left. \frac{\partial T^*(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad t > 0 \quad (5b)$$

$$\kappa \left. \frac{\partial T^*(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} + h T^*(x, t)|_{x=L} = 0, \quad t > 0 \quad (5c)$$

$$T^*(x, 0) = f^*(x) = f(x) - T_f(x) = f(x) - T_\infty \quad (5d)$$

O método da Transformada Integral Clássica (CITT) (Ozisik, 1999) é utilizado para as Eqs. (5a-d), que resulta no seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2 \chi(\beta_m, x)}{dx^2} + \beta_m^2 \chi(\beta_m, x) = 0 \quad (6a)$$

$$\left. \frac{d\chi(\beta_m, x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \kappa \left. \frac{d\chi(\beta_m, x)}{dx} \right|_{x=L} + h \chi(\beta_m, x)|_{x=L} = 0 \quad (6b,c)$$

As Eqs. (6a-c) correspondem a um caso particular de um problema de Sturm-Liouville, de modo que as autofunções  $\chi_m(x)$ , solução do problema, satisfazem a propriedade de ortogonalidade,

$$\int_0^L \chi_m(x) \chi_n(x) dx = \begin{cases} 0, & se \quad m \neq n \\ N_m, & se \quad m = n \end{cases} \quad (7)$$

com

$$N_m = \int_0^L \chi_m^2(x) dx \quad (8)$$

Para que o potencial  $T^*(x, t)$  possa ser escrito como uma expansão em termos da base de autofunções  $\chi_m(x)$ , considerou-se o par de transformada integral:

$$\text{Transformada : } \bar{T}(\beta_m, t) = \int_0^L \chi(\beta_m, x) T^*(x, t) dx \quad (9a)$$

$$\text{Inversa : } T^*(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(\beta_m, x)}{N(\beta_m)} \bar{T}(\beta_m, t) \quad (8b)$$

Operando as Eqs. (5a-d) com  $\int_0^L \chi(\beta_m, x)(\cdot)dx$  e realizando manipulações algébricas por meio da técnica da integração por partes, tem-se o sistema de EDO's para o potencial transformado,

$$\frac{d\bar{T}(\beta_m, t)}{dt} + \alpha\beta_m^2 \bar{T}(\beta_m, x) = \alpha \frac{\bar{g}(t)}{\kappa} \quad (10a)$$

$$\bar{T}(\beta_m, 0) = \bar{T}_0(\beta_m, 0) \quad (10b)$$

onde

$$\bar{g}(t) = \int_0^L \chi(\beta_m, x) g(x, t) dx \quad (11)$$

cuja solução analítica é dada por:

$$\bar{T}(\beta_m, t) = e^{-\alpha\beta_m^2 t} \left( \bar{T}_0(\beta_m, 0) + \int_0^t e^{\alpha\beta_m^2 t'} \frac{\alpha\bar{g}(t')}{\kappa} dt' \right) \quad (12)$$

Considerando que o potencial  $\bar{T}(\beta_m, t)$  é conhecido, solução dada pela Eq. (12), a fórmula de inversão pode ser reescrita, resultando na seguinte solução para o potencial  $T(x, t) = T_f(x) + T^*(x, t)$ :

$$T(x, t) = T_{\infty} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha\beta_m^2 t}}{N(\beta_m)} \chi(\beta_m, x) \left( \bar{T}_0(\beta_m, 0) + \int_0^t e^{\alpha\beta_m^2 t'} \frac{\alpha\bar{g}(t')}{\kappa} dt' \right) \quad (13)$$

O somatório da Eq. (13) foi truncado em uma ordem finita  $N_{tr}$ , o suficiente para garantir a precisão desejada na solução.

### 3. PROBLEMA INVERSO

O problema inverso estudado envolve medições experimentais com o intuito de se estimar a fonte térmica,  $g(x, t)$ , na Eq. (1). Os dados experimentais foram simulados adicionando-se ruídos aleatórios aos resultados calculados empregando o valor exato da fonte térmica a ser recuperada para o potencial filtrado. Desta forma, considerando o campo transformado, dado pela Eq. (9a), para as medidas experimentais em pontos específicos do domínio tem-se:

$$\bar{T}_{exp}(\beta_m, t) = \int_0^L T_{exp}^*(x, t) \chi(\beta_m, x) dx \quad (14)$$

Para a determinação da função  $g(x, t)$  explicitamente, considera-se as medidas da temperatura no campo transformado representadas pela Eq. (14), obtidas numericamente, e uma

aproximação de diferença avançada para representar a derivada na Eq. (10a). Assim, obtém-se a seguinte expressão discretizada para  $\bar{g}(t)$ :

$$\bar{g}(\beta_m, t_l) = \kappa \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\bar{T}^{l+1}(\beta_m) - \bar{T}^l(\beta_m)}{\Delta t} \right] + \beta_m^2 \bar{T}^l(\beta_m) \right\} \quad (15)$$

com  $l = 1, 2, \dots, N_t$  e  $m = 1, 2, \dots, m_{trmax}$ , onde  $N_t$  define o número de nós no tempo e  $m_{trmax}$  a ordem de truncamento. A partir da análise da informação do campo transformado pode ser reconstruída a função  $g(x, t)$ :

$$g(x, t) = \sum_{m=1}^{m_{trmax}} \frac{\chi(\beta_m, x) \bar{g}(\beta_m, t)}{N(\beta_m, x)} \quad (16)$$

#### 4. RESULTADOS

A metodologia da solução via CITT com filtro foi implementada no software de computação simbólica Wolfram Mathematica. Para os resultados foram utilizadas as propriedades do alumínio (Incropera et al., 2011) em um meio com comprimento  $L = 1m$ , bem como  $h = 20W/m^2K$ ,  $T_\infty = 23^\circ C$  e  $T_0 = 30^\circ C$ . As fontes térmicas que se pretende estimar neste trabalho são representadas graficamente na Figura 2, que consistem em duas diferentes funções com variações no tempo e no espaço.

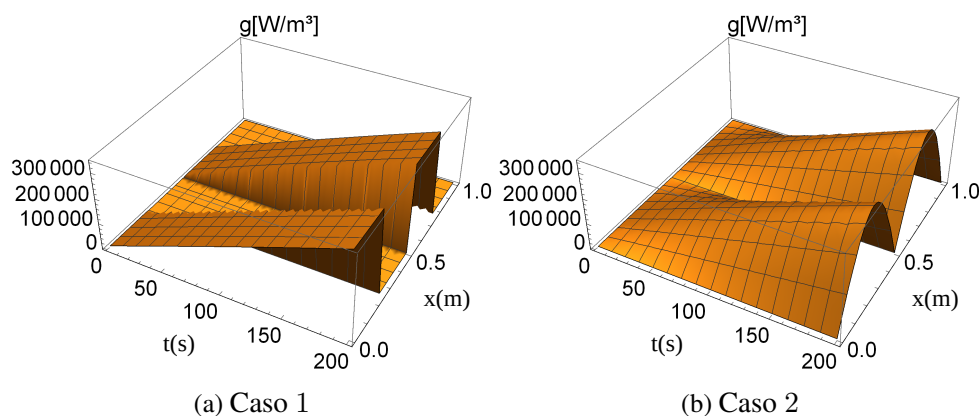


Figura 2- Gráfico 3D para a função  $g(x, t)$ .

A malha utilizada para a estimativa da fonte térmica em todos os casos possui 200 nós em  $t$ , o que leva a 199 parâmetros a serem estimados. As Figs. (3) e (4) mostram as fontes térmicas, calculadas com a Eq. (16), para diferentes ordens de truncamento  $m_{trmax}$ . Os dados experimentais foram simulados considerando a solução CITT com as funções de teste exatas para as fontes térmicas aplicadas, e a adição de ruído a partir de uma distribuição normal com média zero e desvio padrão  $\sigma = 0,5^\circ C$  e  $\sigma = 1^\circ C$ .

Para as temperaturas no campo experimental foram considerados 9 sensores internos, logo  $N_s = N_{si} + 2 = 11$ . Em ambos os casos, observa-se que quando a ordem de truncamento é pequena, a estimativa apresenta suavidade e boa concordância com o fluxo exato. As Figs. (5) e (6) mostram a temperatura reconstruída para o fluxo estimado com  $m_{trmax} = 5$ .

Observando os valores dos erros RMS (Root Mean Square) na Tabela 1 para cada caso, fica claro como a abordagem explícita é capaz de recuperar a temperatura no campo transformado. A Eq. (17) representa como é calculado o erro RMS.

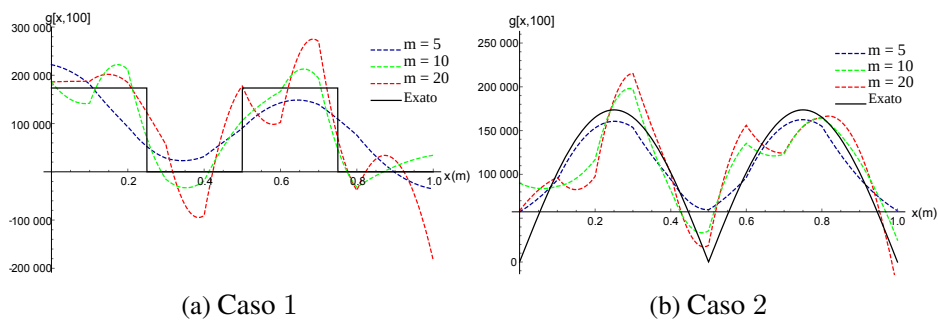


Figura 3- Estimativa da fonte térmica empregando diferentes ordens de truncamento  $m$  com ruído  $\sigma = 0,5^\circ\text{C}$ .

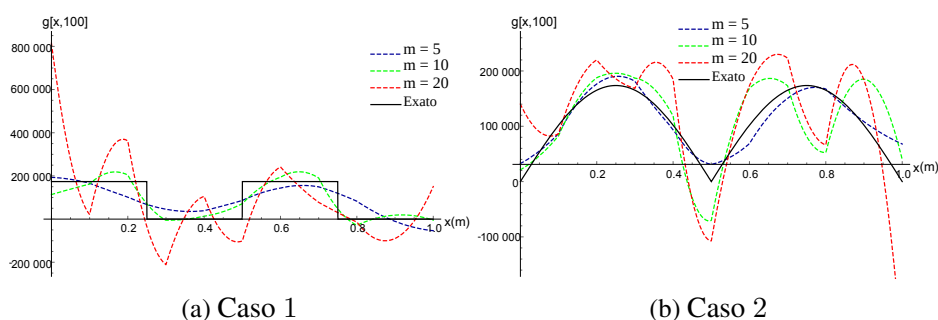


Figura 4- Estimativa da fonte térmica empregando diferentes ordens de truncamento  $m$  com ruído  $\sigma = 1^\circ\text{C}$ .

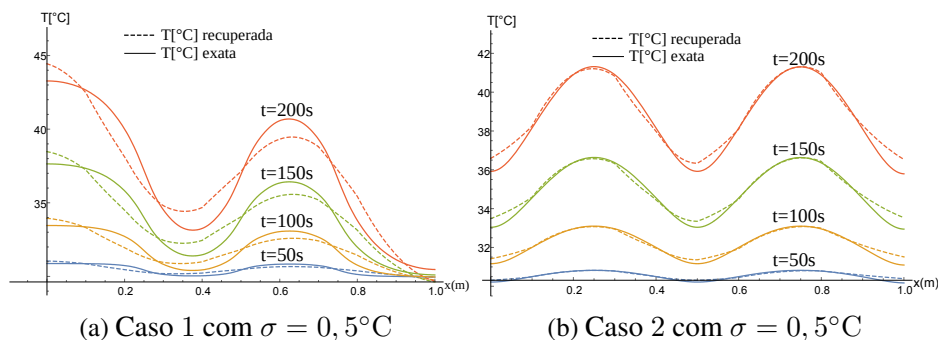


Figura 5- Temperatura calculada após a solução do problema inverso.

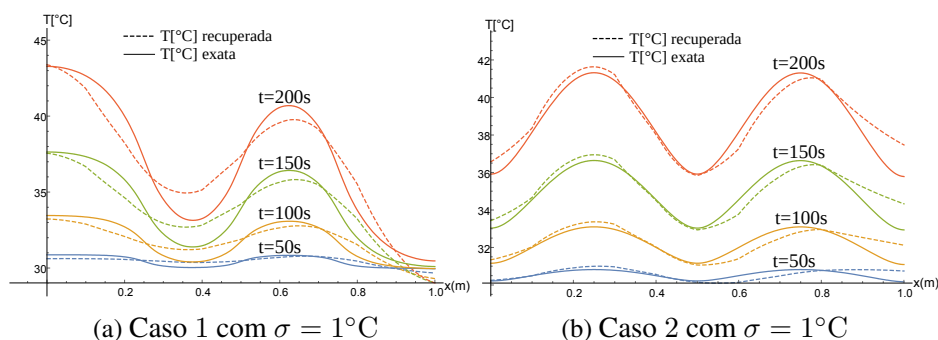


Figura 6- Temperatura calculada após a solução do problema inverso.

Tabela 1- Erro RMS.

Casos	$\sigma = 0,5^{\circ}\text{C}$	$\sigma = 1^{\circ}\text{C}$
1	0,4422	0,4582
2	0,2603	0,5299

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N_t} \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_t} (T_{rec}(x_i, t_k) - T(x_i, t_k))^2} \quad (17)$$

onde  $N_t$  representa o número de nós no tempo e  $N_s$  o número de sensores.

O esforço computacional para a aplicação do método é reduzido quando comparado aos métodos iterativos disponíveis na literatura. A Tabela 2 mostra o tempo computacional para cada aplicação, usando um notebook com processador Intel Core™ i5-5200U, 8GB de memória RAM, CPU 2.20GHz e SO Windows 7.

Tabela 2- Tempo CPU.

Casos	$\sigma = 0,5^{\circ}\text{C}$	$\sigma = 1^{\circ}\text{C}$
1	88,11s	91,69s
2	98,47s	101,52s

## 5. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos indicam a eficiência da aplicação de filtros no campo transformado de estimativa de fontes térmicas em um meio unidimensional com variação espacial e temporal. A temperatura recuperada apresenta boa acurácia com a temperatura calculada para diferentes níveis de ruído. Além disso a solução do problema inverso evidencia o baixo custo computacional do procedimento desenvolvido.

### Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da FAPERJ, do CNPq e da CAPES.

## REFERÊNCIAS

- Bergman, T.L., Lavine, A.S., Incropera, F.P. e DeWitt, D.P. (2011), “*Fundamentals of Heat and Mass Transfer*”, John Wiley & Sons, USA.
- Campos Velho, H.F. (2001), “Problemas Inversos: Conceitos Básicos e Aplicações”, *IV Encontro de Modelagem Computacional*, Instituto Politécnico, UERJ, Nova Friburgo - RJ.
- Cotta, C.N., Cotta, R.M., Orlande, H.R.B. (2011), “Inverse analysis with integral transformed temperature fields: Identification of thermophysical properties in heterogeneous media”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, 54, 1506-1519.
- Guerrieri, D. (2013), “*Análise Teórico-Experimental de Microtrocaadores de Calor para Controle Térmico de Painéis Fotovoltaicos de Alta Concentração*”, Dissertação de Mestrado, COOPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

- Hazanee, A, Lesnic, D, Ismailov, M.I. e Kerimov N.B. (2015), "An inverse time-dependent source problem for the heat equation with a non-classical boundary condition. *Applied Mathematical Modelling*, 39 (20). 6258 - 6272.
- Kakaç, S., Yuncu, H. e Hijikata, K. (1993), "Introduction to ASI on Cooling of Electronic Systems", *Cooling of Electronic Systems*, NATO ASI Series, vol 258, 1-15.
- Knupp, D.C. e Abreu, L.A.S. (2016), "Explicit boundary heat flux reconstruction employing temperature measurements regularized via truncated eigenfunction expansions", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Elsevier, 78, 241-252.
- Lapinski, T. M. and Leble, S. (2014), "A Mathematica Program for heat source function of 1D heat equation reconstruction by three types of data", *ADS*, DOI: arXiv:1410.7066.
- Mital, M. and Scott, E. P. (2007), Thermal Detection of Embedded Tumors Using Infrared Imaging, *Journal of Biomechanical Engineering*, 129, 33-39.
- Ozisik, M.N. (1999), *Heat Conduction*, John Wiley and Sons, 2<sup>o</sup> ed., USA.

## ESTIMATION OF THERMAL SOURCES WITH SPACE AND TEMPORARY VARIATION EMPLOYING AN EXPLICIT METHOD

**Abstract.** *This work addresses the inverse problem of estimation of transient thermal sources related to a one - dimensional plate, as well as employing the Classical Integral Transformation Technique (CITT) with the filter application to solve the direct problem. The adopted model allows to express the function to be determined explicitly through algebraic manipulations of the direct problem. An analysis of the regularization of the experimental data in the transformed field is presented, with the application of the Technique of the Integral Classic Transform. The computational cost with the application of the technique is evaluated for two case studies, for the estimation of two different types of function representative of the thermal source.*

**Keywords:** *Inverse Problems, CITT, Source Estimating, Explicit Formulation.*