



08 a 11 de Outubro de 2018  
Instituto Federal Fluminense  
Búzios - RJ

## APLICAÇÃO DO MÉTODO DA PENALIZAÇÃO ROBUSTA PARA ANÁLISE DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVOS

**Gustavo Barbosa Libotte**<sup>1</sup> - gustavolibotte@iprj.uerj.br

**Fran Sérgio Lobato**<sup>2</sup> - fslobato@ufu.br

**Francisco Duarte Moura Neto**<sup>1</sup> - fmoura@iprj.uerj.br

**Gustavo Mendes Platt**<sup>3</sup> - gmplatt@furg.br

<sup>1</sup>Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro - Nova Friburgo, RJ, Brasil

<sup>2</sup>Faculdade de Engenharia Química, Universidade Federal de Uberlândia - Uberlândia, MG, Brasil

<sup>3</sup>Escola de Química e Alimentos, Universidade Federal do Rio Grande - Rio Grande, RS, Brasil

**Resumo.** Tradicionalmente, no projeto de sistemas de engenharia não considera-se o efeito de perturbações na solução ótima encontrada (solução nominal). Neste caso, existe a possibilidade de que a solução nominal torne-se inviável de ser implementada, em virtude das incertezas associadas às variáveis de projeto. As incertezas podem estar relacionadas a diversos fatores, como variação do clima, limitações de equipamentos e questões financeiras. Nesse contexto, este trabalho tem por objetivo a obtenção de soluções ótimas que sejam menos sensíveis às incertezas a fim de minimizar a influência de pequenas perturbações no vetor de variáveis de projeto. Para essa finalidade considera-se uma abordagem que consiste na penalização robusta de problemas de otimização multi-objetivos. A partir dos resultados obtidos foi possível avaliar a influência do parâmetro de incerteza na qualidade da solução obtida.

**Palavras-chave:** Otimização robusta, Incertezas, Método da Penalização Robusta, Otimização multi-objetivo.

### 1. INTRODUÇÃO

Durante muitas décadas, a solução de problemas mono ou multi-objetivos não levava em consideração a presença e a influência de incertezas no vetor de variáveis de projeto (soluções nominais) (Deb & Gupta, 2006; Egorov et al., 2007). Todavia, as incertezas estão presentes no dia a dia do projetista, visto que existem erros associados à etapa de modelagem matemática do problema, na definição do vetor de parâmetros de entrada, durante o processo de otimização e no vetor de variáveis de projeto. Assim, nos dias atuais existe uma grande preocupação no que tange o estudo da influência de incertezas na qualidade das soluções ótimas e, até mesmo, a alteração da viabilidade das soluções nominais obtidas (Li et al., 2005).

Em se tratando da análise das variáveis de projeto e dos parâmetros, as incertezas estão associadas a seus valores nominais devido à presença de variações na fabricação, geometria

e propriedades do material que devem ser levadas em conta no planejamento e execução do projeto (Nejlaoui et al., 2013). Se uma solução global ótima é sensível a tais perturbações em sua vizinhança, a sua implementação prática pode resultar em um conjunto diferente de valores objetivos a partir da solução ótima nominal.

Para analisar a influência de incertezas no projeto de sistemas de engenharia, duas abordagens básicas podem ser empregadas, a saber, as metodologias para a análise de confiabilidade e as técnicas de robustez. A confiabilidade é uma ferramenta de análise que consiste em transformar restrições de desigualdade em restrições de desigualdade probabilísticas. Neste caso, avalia-se a possibilidade de um candidato a solução do problema de otimização violar uma ou mais restrições probabilísticas Lobato et al. (2017). Já a robustez pode ser entendida como o estudo da sensibilidade de um candidato a solução do problema de otimização em relação a uma pequena perturbação, a fim de otimizar o desempenho de um projeto e, ao mesmo tempo, minimizar sua sensibilidade a variações de parâmetros Taguchi et al. (2000); Saha & Ray (2011); Lobato et al. (2017). Formalmente, (Taguchi et al., 2000), que foi um dos pioneiros nesse assunto, define robustez como “o estado em que a tecnologia, o produto ou o desempenho do processo é minimamente sensível a fatores que causam variabilidade (na fabricação ou no ambiente do usuário) e ao envelhecimento, com o menor custo de fabricação por unidade”.

Dentre diversas metodologias existentes, capazes de avaliar a robustez de determinado problema, duas das mais difundidas e aplicadas na esfera dos problemas de otimização são as soluções robustas do tipo I e II propostas por Deb & Gupta (2006). Em linhas gerais, a estratégia de tipo I considera a média efetiva da função objetivo, em relação a um conjunto finito de soluções aleatórias, distribuídas ao redor do ponto que se deseja analisar a robustez. Por sua vez, a estratégia de tipo II avalia a diferença normalizada entre os valores da função perturbada e original, de tal forma que a solução desejada deve atender a um limiar preestabelecido. Considerando tais formulações, foi proposto por Mirjalili & Lewis (2016) uma nova metodologia de avaliação de robustez, baseada na penalização da função-objetivo. Na ocasião, a metodologia foi aplicada em diversos problemas de *benchmark* propostos pelos autores, tendo obtido resultados satisfatórios.

Contudo, a proposta de penalização de Mirjalili & Lewis (2016) foi aplicada apenas a problemas no contexto mono-objetivo. Portanto, a proposta fundamental desse trabalho é entender a metodologia de penalização, a fim de avaliar a robustez de problemas no contexto multi-objetivo. Adicionalmente, a metodologia será avaliada através da variação do nível de perturbação e da quantidade de amostras aleatórias ao redor da solução, de forma que o comportamento das curvas de Pareto seja investigado. Para obtenção das soluções ótimas, será utilizado o método NSGA-II (Deb et al., 2002).

## 2. OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO ROBUSTA

A otimização multi-objetivo consiste em encontrar um conjunto de pontos que formam a curva de Pareto, isto é, um conjunto de pontos que relacionam os objetivos, geralmente, conflitantes (Babu et al., 2005). Isso significa que a melhoria de um objetivo pode levar à deterioração de outro e vice versa. Esse fato levanta a questão sobre como os diferentes objetivos devem ser combinados para produzir uma solução final e há também a questão sobre como procurar uma solução ideal para o problema a ser resolvido (pós-processamento do conjunto de pontos obtido).

De acordo com Zhou et al. (2011), um problema de otimização multiobjetivo pode ser for-

mulado como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T \\ \text{Sujeito a} \quad & \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $\Omega$  é o espaço de busca e  $\mathbf{x} \in \Omega$  é o vetor de decisão. Além disso,  $F(\mathbf{x})$  consiste em  $m$  funções-objetivo, de forma que  $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $i = 1, \dots, m$  e portanto  $F \in \mathbb{R}^m$ .

Por conta do conflito existente entre os objetivos, não existe um único ponto capaz de otimizar todos os objetivos simultaneamente. Em vez disso, os melhores pontos que podem ser obtidos são denominados de solução ótima de Pareto (curva de Pareto). Como os pontos pertencentes a solução ótima de Pareto dominam coletivamente qualquer outro ponto viável no espaço de busca, todos estes pontos são consideradas melhores do que qualquer outro (Deb & Gupta, 2006). Formalmente, o conceito de dominância é dado por (Zhou et al., 2011):

**Definição 1 (Dominância).** Diz-se que um vetor  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$  domina outro vetor  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$ , denotado por  $\mathbf{u} \prec \mathbf{v}$ , se e somente se  $\forall k \in \{1, \dots, n\}, u_k \leq v_k$  e  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ .

Em outras palavras, uma solução é dita dominante em relação a outra, se não for pior em nenhum dos objetivos e se for estritamente melhor em pelo menos um dos objetivos (Deb & Gupta, 2006). Uma vez conhecido o conceito de dominância, fica clara a definição para o conjunto ótimo de Pareto (Zhou et al., 2011):

**Definição 2 (Conjunto Ótimo de Pareto).** Uma solução viável  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  da Eq. (1) é chamada solução ótima de Pareto, se e somente se  $\nexists \mathbf{y} \in \Omega$  tal que  $F(\mathbf{y}) \prec F(\mathbf{x}^*)$ . O conjunto de todas as soluções ótimas de Pareto é conhecido como conjunto de Pareto, denotado por  $PS = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \nexists \mathbf{y} \in \Omega, F(\mathbf{y}) \prec F(\mathbf{x})\}$  e a imagem de  $PS$  é chamada de frente de Pareto e definida como  $PF = \{F(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in PS\}$ .

O aumento da complexidade dos sistemas, bem como o número de parâmetros manipuláveis, levam à necessidade de se utilizar modelagem matemática de sistemas e aplicação de técnicas de otimização para resolução de problemas como o da Eq. (1). A escolha dos parâmetros ideais para o problema que está sendo resolvido é feita através do uso de procedimentos formais de otimização matemática, principalmente através de técnicas evolucionárias. Contudo, soluções obtidas por meio de modelagem matemática e técnicas de otimização, na maioria dos casos são difíceis de se implementar em problemas reais de engenharia. Isso se deve, em grande parte, ao fato de que, quando são resolvidos problemas de otimização pela abordagem tradicional (determinística), várias incertezas que influenciam a eficiência do sistema projetado em condições reais não são levadas em consideração (Egorov et al., 2007).

Beyer & Sendhoff (2007) lista as principais causas de diferenças entre os resultados estimados através de modelos matemáticos e àqueles previstos no produto final. Em geral, quatro pontos foram considerados: desde que não se tenha conhecimento detalhado da função de erro do modelo, não se pode ter certeza de que o modelo ótimo pode ser mapeado para a verdadeira solução; mesmo que fosse possível realizar o mapeamento do modelo para o ótimo real, poderia não ser possível implementá-lo na prática, seja por incertezas de fabricação ou pelo custo embarcado; a formulação do problema de otimização da Eq. (1) é intrinsecamente estática, diferentemente do contexto real, que possui parâmetros variáveis (como a temperatura e umidade relativa do ar); os custos do ciclo de vida devem ser levados em consideração para muitos projetos de engenharia, algo complexo de ser modelado.

Problemas como os descritos pela Eq. (1) e otimizados no sentido clássico podem ser muito sensíveis a pequenas mudanças no vetor de variáveis de projeto. Na prática de engenharia, a dispersão aleatória de parâmetros sobre os valores nominais é inevitável. Nesse sentido, faz-se necessário adotar um procedimento para encontrar as soluções ótimas considerando a influência de incertezas. Para essa finalidade, considera-se a otimização robusta como ferramenta para análise de incertezas.

De maneira ampla, Jin & Branke (2005) categorizaram as incertezas na computação evolutiva em quatro segmentos, que compreendem: as funções-objetivo podem ser essencialmente ruidosas, de tal forma que tais perturbações podem ser provenientes de muitas fontes distintas; as variáveis de projeto podem estar sujeitas a perturbações ou mudanças após a determinação da solução ótima; a função-objetivo pode ser aproximada, o que significa que existe a possibilidade de sofrer erros de aproximação e truncamento; o ótimo do problema a ser resolvido muda com o tempo e, assim, o otimizador deve ser capaz de rastrear o ótimo continuamente.

Portanto, sem perda de generalidade, um problema de otimização multi-objetivo robusto pode ser formulado como apresentado por Mirjalili & Lewis (2016):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & F(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}) = (f_1(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}), \dots, f_m(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}))^T \\ \text{Sujeito a} \quad & g_j(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, p_1 \\ & h_j(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}) = 0, \quad j = 1, \dots, p_2 \\ & L \leq \mathbf{x} + \boldsymbol{\delta} \leq U \end{aligned} \quad (2)$$

tal que  $\mathbf{x}$  é o vetor de decisão,  $\boldsymbol{\delta}$  denota o vetor de incertezas (parâmetro de incerteza) associado a cada variável,  $p_1$  e  $p_2$  representam o número de restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente, e os limites de cada uma das  $k$ -ésimas variáveis são descritos pelos vetores  $L$  (inferior) e  $U$  (superior).

### 3. METODOLOGIA PARA AVALIAÇÃO DE ROBUSTEZ

Como mencionado anteriormente, foi apresentado por Deb & Gupta (2006) duas metodologias capazes de avaliar a robustez de um dado problema de otimização. Ambas baseiam-se na análise do comportamento da função na vizinhança da solução considerada, através da avaliação de amostras distribuídas aleatoriamente. Dessa forma, torna-se possível quantificar com que intensidade uma pequena perturbação das variáveis de decisão altera o valor da função-objetivo na solução em questão. Assim, é viável estimar a robustez de uma dada solução, uma vez que é definida como aquela que é insensível (até um limite arbitrário) às perturbações nas variáveis de decisão em sua vizinhança.

No contexto dos problemas de otimização multi-objetivos, a sensibilidade deve ser estabelecida com respeito a todos os objetivos, isto é, um efeito combinado de variações em todos os objetivos deve ser usado simultaneamente como uma medida de sensibilidade às perturbações das variáveis. Uma das alternativas para avaliação de robustez é através da abordagem de média efetiva, como definido abaixo.

**Definição 3 (Solução Multi-objetivo Robusta de Tipo I).** Uma solução  $\mathbf{x}^*$  é chamada de solução multiobjetiva robusta de tipo I, se for um conjunto ótimo de Pareto para o problema de otimização multi-objetivo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & F^{\text{eff}}(\mathbf{x}) = (f_1^{\text{eff}}(\mathbf{x}), \dots, f_m^{\text{eff}}(\mathbf{x}))^T \\ \text{Sujeito a} \quad & \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned}$$

definido com respeito a vizinhança  $\delta$ , tal que  $f_i^{\text{eff}}(\mathbf{x})$  é dada por:

$$f_i^{\text{eff}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathcal{B}_\delta(\mathbf{x})|} \int_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}_\delta(\mathbf{x})} f_i(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3)$$

com  $\mathcal{B}_\delta(\mathbf{x})$  denotando a vizinhança  $\delta$  da solução  $\mathbf{x}$  e  $|\mathcal{B}_\delta(\mathbf{x})|$  o hipervolume da vizinhança.

Analisando a Eq. (3), fica claro que trata-se da integração analítica da função-objetivo com o máximo possível de perturbação nas variáveis. Em virtude da complexidade na avaliação desta integral, além do custo computacional elevado, a Eq. (3) pode ser aproximada pelo valor médio atingido pela função-objetivo, calculado por:

$$f_i^{\text{eff}}(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{H} \sum_{j=1}^H f_i(\theta^{(j)}), \quad i = 1, \dots, m,$$

tal que  $H$  representa o número finito de soluções distribuídas aleatoriamente ao redor de  $\mathbf{x}$ , dentro do intervalo  $[\mathbf{x} - \delta, \mathbf{x} + \delta]$ . Nesse caso, cada amostra pode ser calculada através da relação  $\theta_k = x_k + r_k \delta$ , com  $r$  sendo uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo  $r \sim [-1, 1]$ . Obviamente,  $\delta$  também pode estar definido para cada uma das variáveis do vetor de decisão, através da determinação de um vetor responsável pela delimitação da vizinhança, isto é,  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_k)^T$  para  $k = 1, \dots, n$ .

Na segunda abordagem proposta por Deb & Gupta (2006),  $H$  soluções aleatórias dentro do hipervolume de raio  $\delta$  são geradas em torno das soluções no espaço de parâmetros, onde  $\delta$  indica o nível máximo possível de perturbação. Então, a variância calculada através dos valores obtidos pela avaliação das funções-objetivo correspondentes não deve exceder um determinado limiar, denotado por  $\eta$ . Matematicamente, a formulação da solução do problema multi-objetivo robusta de tipo II é definida como abaixo.

**Definição 4 (Solução Multi-objetivo Robusta de Tipo II).** Uma solução  $\mathbf{x}^*$  é chamada de solução multi-objetivo robusta de tipo II se for um conjunto ótimo de soluções de Pareto para o problema de otimização multi-objetivo:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T \\ &\text{Sujeito a} && \frac{\|\mathcal{F}(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x})\|}{\|F(\mathbf{x})\|} \leq \eta \\ &&& \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned}$$

Nesse caso, a função perturbada  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$  pode ser tomada como a média efetiva, calculada através da Eq. (3), ou tomando-se o pior valor dentre as  $H$  amostras avaliadas na vizinhança  $\delta$  da solução  $\mathbf{x}$ . Além disso, o parâmetro  $\eta$  de controle da robustez é inversamente proporcional ao nível de robustez desejado, uma vez que quanto menor for o valor definido para o limiar  $\eta$ , a frente de Pareto correspondente estará cada vez mais afastada do conjunto ótimo original. Obviamente, o problema original é recuperado quando define-se  $\eta = 1$ , uma vez que a restrição de desigualdade será incondicionalmente satisfeita.

Baseado nas metodologias de análise de robustez apresentadas por Deb & Gupta (2006), foi proposta por Mirjalili & Lewis (2016) uma nova abordagem baseada na penalização de soluções proporcionais à sua sensibilidade a perturbações nos parâmetros. Esta função de penalização calcula a flutuação da função-objetivo nas vizinhanças das soluções. Assim, pode-se estimar

o nível de flutuação de uma solução arbitrária, tornando-se capaz de penalizar a solução, baseado no seu nível de robustez. Tomando como base a Eq. (2) e sem perda de generalidade, a otimização robusta baseada na penalização da função-objetivo, para problemas multiobjetivos, pode ser formulada como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && F(\mathbf{x}) + P(\mathbf{x}) \\ &\text{Sujeito a} && g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, p_1 \\ &&& h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p_2 \\ &&& L_k \leq x_k \leq U_k, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4)$$

de tal forma que a função de penalização é dada por:

$$P(x) = \frac{\frac{1}{H} \sum_{j=1}^H |F(\theta^{(j)}) - F(x)|}{|F(x)|}, \quad (5)$$

em que  $F(\theta^{(j)})$  representa o valor da função-objetivo avaliada em cada um dos  $H$  pontos amostrais gerados aleatoriamente na vizinhança de  $\mathbf{x}$ .

A próxima seção tem por objetivo empregar o denominado Método da Penalização Robusta em alguns problemas matemáticos. Para essa finalidade considera-se como metodologia para a resolução dos problemas de otimização multi-objetivos o algoritmo NSGA-II (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm) Deb et al. (2002).

#### 4. PROBLEMAS-TESTE E RESULTADOS

Nessa seção, o objetivo principal é analisar a eficiência da metodologia para avaliação de robustez baseada na penalização da função-objetivo, através da sua aplicação na resolução de problemas de otimização multi-objetivos. Para conduzir essa tarefa são apresentados dois problemas, introduzidos por Deb & Gupta (2006), e para cada um deles serão obtidas as curvas de Pareto correspondentes, variando os valores do vetor de incertezas  $\delta$  e da quantidade de amostras aleatórias  $H$ , a fim de avaliar o comportamento das soluções obtidas, em relação à frente de Pareto do problema original.

Em todos os testes, o algoritmo NSGA-II foi executado ao longo de  $10^4$  gerações, a fim de evitar a obtenção de soluções indesejadas, ocasionadas por convergência prematura do algoritmo. Além disso, foi adotada uma população de 100 indivíduos, com chances de mutação e cruzamento definidas como  $2/n$ , sendo  $n$  o número de variáveis do problema. A operação de cruzamento foi efetuada a uma taxa de 1,2 e, no caso da mutação, foi utilizado um operador Gaussiano, com os parâmetros de escala e contração definidos como 0,8 e 0,5 respectivamente.

O primeiro problema-teste é definido como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f_1(\mathbf{x}) = x_1 \\ &&& f_2(\mathbf{x}) = h(x_1) + g(\mathbf{x}) S(x_1) \\ &\text{Sujeito a} && 0 \leq x_1 \leq 1, \quad -1 \leq x_k \leq 1, \quad k = 2, \dots, n \\ &\text{Em que} && h(x_1) = 1 - x_1^2 \\ &&& g(\mathbf{x}) = \sum_{k=2}^n 10 + x_k^2 - 10 \cos(4\pi x_k) \\ &&& S(x_1) = \frac{1}{0,2 + x_1} + x_1^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Analisando-se  $g(\mathbf{x})$ , observa-se que o termo  $\cos(4\pi x_k) = 1$  sempre que  $x_k = \omega/2$ , com  $\omega \in \mathbb{Z}$ . Através da escolha específica de  $\omega = 0$ , tem-se que  $g(\mathbf{x}) = 0$  para  $k \geq 2$ , fazendo com que a contribuição de  $S(x_1)$  seja desprezada no segundo objetivo. Dessa forma,  $f_2(\mathbf{x}) = 1 - x_1^2$  e, portanto, a solução determinística do problema de otimização representado pela Eq. (6) é dada pela relação  $f_2(\mathbf{x}) = 1 - [f_1(\mathbf{x})]^2$ , definida quando  $x_1 \in [0, 1]$ .

Na primeira rodada de testes, a metodologia de avaliação da robustez, através da técnica de penalização, foi analisada por meio da obtenção dos resultados da Eq. (6) para diferentes valores de  $\delta$ . Para tal, foram geradas 50 amostras aleatórias na vizinhança da solução corrente, a fim de se obter o valor da penalização através da Eq. (5). O conjunto de amostras foi gerado através da estratégia de hipercubo latino, de maneira que, a cada geração da metaheurística, a mesma sequência de amostras foi utilizada para avaliação de todos os indivíduos da população, de forma sistemática.

Especificamente para o problema que está sendo estudado, foi tomado  $n = 5$  e o vetor de incertezas  $\delta$  foi escolhido com respeito ao intervalo de busca das variáveis de decisão, ou seja, foi definido que  $\delta_1 = \delta$  e  $\delta_k = 2\delta$  para  $k > 1$ , de forma que a proporção entre a amplitude dos intervalos de busca das variáveis fosse mantida, preservando o tamanho da vizinhança. Com isso, as amostras aleatórias foram geradas no intervalo  $[x_k - \delta_k x_k, x_k + \delta_k x_k]$ , simetricamente em relação a cada uma das variáveis de decisão.

Na segunda rodada de testes, ainda em relação ao problema da Eq. (6), foi analisado o comportamento das curvas de Pareto obtidas com relação a variação da quantidade de amostras aleatórias utilizadas no cálculo da Eq. (5). Para o cômputo desses resultados, foi fixado  $\delta = 0,1$  e os demais parâmetros foram mantidos como no teste anterior. Os resultados obtidos para ambas as rotinas do primeiro problema-teste estão mostrados nas Figs. 1(a) e 1(b), respectivamente.

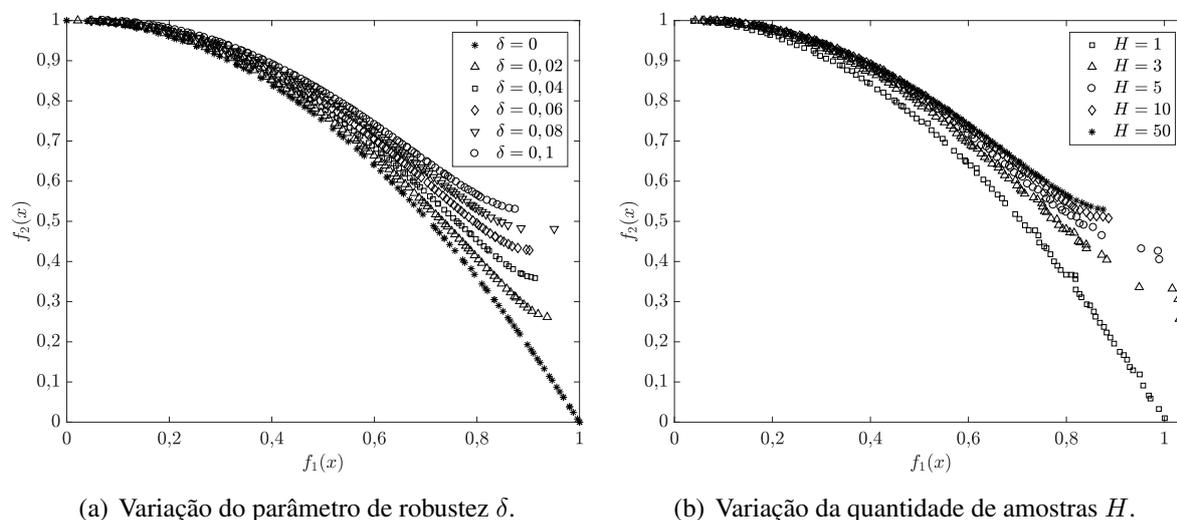


Figura 1 - Influência dos parâmetros de controle de robustez no primeiro estudo de caso.

Na Fig. 1(a) observa-se, como esperado, que o aumento no valor do parâmetro de robustez faz com que a solução robusta ( $\delta$  diferente de zero) se distancie da solução nominal ( $\delta$  igual a zero). Neste caso, observa-se, para o estudo em análise, que este distanciamento é mais pronunciado com relação ao aumento de  $f_1(x)$  e a redução de  $f_2(x)$ . Com relação a influência do número de amostra utilizadas, conclui-se a partir da análise da Fig. 1(b) que existe um valor para o qual a solução robusta converge, evidenciando a importância deste parâmetro na curva

de Pareto obtida. Assim, o número de amostras deve ser escolhido de forma que o mesmo não influencie a solução ótima obtida.

No segundo problema-teste, deve-se minimizar três objetivos simultaneamente, conforme a Eq. (7):

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar } & f_1(\mathbf{x}) = x_1 \\
 & f_2(\mathbf{x}) = x_2 \\
 & f_3(\mathbf{x}) = h(x_1, x_2) + g(\mathbf{x}) S(x_1, x_2) \\
 \text{Sujeito a } & 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, -1 \leq x_k \leq 1, k = 3, \dots, n \\
 \text{Onde } & h(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - x_2^2 \\
 & g(\mathbf{x}) = \sum_{k=3}^n 10 + x_k^2 - 10 \cos(4\pi x_k) \\
 & S(x_1, x_2) = \frac{0,75}{0,2 + x_1} + 10x_1^8 + \frac{0,75}{0,2 + x_2} + 10x_2^8
 \end{aligned} \tag{7}$$

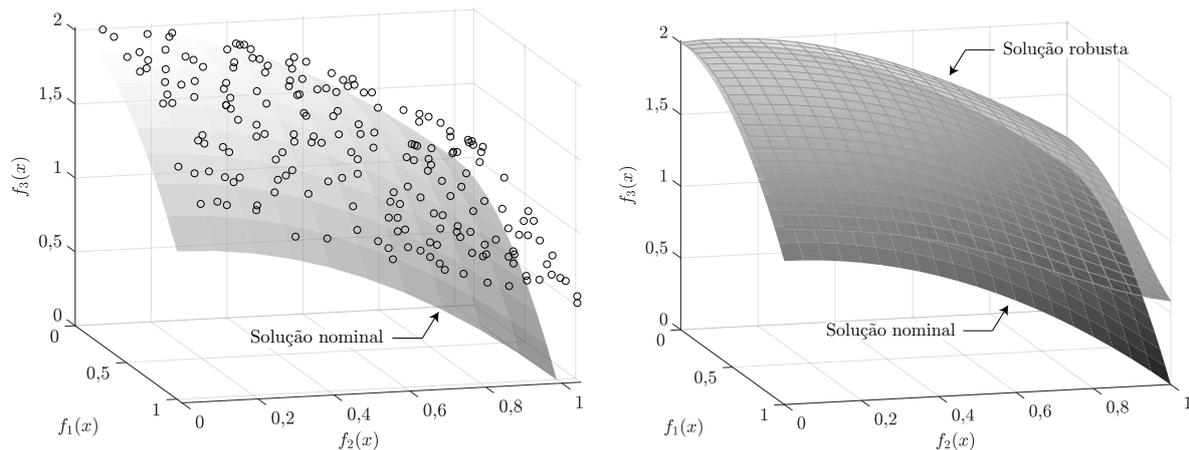
Analogamente ao caso anterior, a solução nominal trata-se da superfície obtida quando a variável  $x_k = 0$ , para  $k \geq 3$ , e qualquer combinação de valores das variáveis  $x_1$  e  $x_2$ , desde que estejam estabelecidas no intervalo  $[0, 1]$ . Nesse caso,  $g(\mathbf{x}) = 0$  e a curva de Pareto referente a solução nominal é dada pela relação  $f_3(\mathbf{x}) = 2 - [f_1(\mathbf{x})]^2 - [f_2(\mathbf{x})]^2$ . Para esse caso de teste, também foi escolhido  $n = 5$  e as amostras foram geradas de maneira similar aos casos anteriores, respeitando a relação entre os intervalos de busca das variáveis de decisão, exceto pelo fato de que se adotou a mesma grandeza  $\delta$  para os parâmetros  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , além de  $\delta_k = 2\delta$  para  $k > 2$ , haja vista a proporção dos intervalos das variáveis.

Por conta da representação das soluções do problema no espaço, adotou-se 200 indivíduos na população durante a execução do NSGA-II, a fim de favorecer a visualização dos resultados obtidos em relação à solução nominal no segundo problema-teste. No caso dos parâmetros inerentes à técnica evolucionária, foram tomados os mesmos valores do caso de teste anterior. Também foi escolhido  $\delta = 0,1$  arbitrariamente, com o propósito de se averiguar o comportamento da frente de Pareto da solução robusta em relação à superfície da solução determinística, quando  $\delta = 0$ . Os resultados obtidos para o problema da Eq. (7) são mostrados na Fig. 2(a), assim como a superfície interpolada através dos valores computados pelo NSGA-II, com coeficiente de determinação da ordem de 99,97%, conforme a Fig. 2(b).

Assim como constatado no estudo de caso anterior, na Fig. 2 observa-se que a inserção da análise de robustez resulta na deterioração dos objetivos em relação à solução nominal. Este comportamento já era esperado, visto que, geralmente, o aumento do valor do parâmetro de robustez implicará em um maior distanciamento da solução robusta em relação à solução nominal.

## 5. CONCLUSÕES

O presente trabalho teve por objetivo estender o Método da Penalização Robusta, proposto inicialmente para o tratamento de problemas mono-objetivos para o contexto multi-objetivo. A metodologia proposta foi empregada para a resolução de dois problemas puramente matemáticos, em que foi avaliado a influência do parâmetro de robustez e do número de amostras



(a) Curva de Pareto representadas pelos círculos. (b) Superfície ajustada em relação às soluções obtidas.

Figura 2 - Curva de Pareto obtida para  $\delta = 0, 1$  em relação à solução nominal da Eq. (7).

consideradas para a avaliação da solução robusta. De forma geral pode-se concluir que o aumento do parâmetro de robustez faz com que a solução robusta se distancie da solução nominal e que existe um valor ótimo para o número de amostras de forma que este não interfira na qualidade da solução robusta obtida. Em resumo, via análise das Figs. 2(a) e 2(b), conclui-se que a metodologia analisada para avaliação de robustez também foi capaz de obter resultados satisfatórios.

É importante ressaltar que custo computacional requerido para a resolução do problema robusto é bem superior ao requerido para a resolução do problema nominal. A diferença está no fato de que, na abordagem robusta, em cada geração e para cada candidato, é necessária a avaliação do vetor de objetivos para cada uma das amostras geradas aleatoriamente. Assim, o número de avaliações requeridas pelas abordagens nominais e robustas são iguais a  $NP + NP \times N_{ger}$  e  $NP + NP \times H \times N_{ger}$ , respectivamente (em que  $NP$  é o tamanho da população,  $H$  é o número de amostras e  $N_{ger}$  é o número de gerações).

### Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) pelo auxílio financeiro disponibilizado para pesquisa e elaboração deste trabalho. Fran Sérgio Lobato também agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo suporte financeiro para a realização deste trabalho.

### REFERÊNCIAS

- Babu, B.V.; Chakole, P.G.; Syed Mubeen, J.H. (2005), Multiobjective Differential Evolution (MODE) for Optimization of Adiabatic Styrene Reactor. *Chemical Engineering Science*, 60(17), 4822–4837.
- Beyer, H.-G.; Sendhoff, B. (2007), Robust Optimization — A Comprehensive Survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(33–34), 3190–3218.
- Deb, K.; Pratap, A.; Agarwal, S.; Meyarivan, T. (2002), A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2), 182–197.
- Deb, K.; Gupta, H. (2006), Introducing Robustness in Multi-Objective Optimization. *Evolutionary Computation*, 14(4), 463–494.

- Egorov, I.N.; Kretinin, G.V.; Leshchenko, I.A.; Kuptzov, S.V. (2007), Multi-objective Approach for Robust Design Optimization Problems. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 15(1), 47–59.
- Fang, J.; Gao, Y.; Sun, G.; Xu, C.; Li, Q. (2015), Multiobjective Robust Design Optimization of Fatigue Life for a Truck Cab. *Reliability Engineering and System Safety*, 135, 1–8.
- Jin, Y.; Branke, B. (2005), Evolutionary Optimization in Uncertain Environments — A Survey. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 9(3), 303–317.
- Li, M.; Azarm, S.; Aute, V. (2005), “A Multi-objective Genetic Algorithm for Robust Design Optimization”, In *7th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*, H.-G. Beyer e U.-M. O’Reilly (eds.), ACM, New York, NY, USA.
- Lobato, F. S.; Gonçalves, M. S.; Jahn, B.; Cavalini Jr, A. Ap.; Steffen Jr., V. Reliability-Based Optimization Using Differential Evolution and Inverse Reliability Analysis for Engineering System Design. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1, 1–33, 2017.
- Mirjalili, S.; Lewis, A. (2016), Obstacles and Difficulties for Robust Benchmark Problems: A Novel Penalty-based Robust Optimisation Method. *Information Sciences*, 328, 485–509.
- Nejlaoui, M.; Houidi, A.; Affi, Z.; Romdhane, L. (2013), Multiobjective Robust Design Optimization of Rail Vehicle Moving in Short Radius Curved Tracks Based on the Safety and Comfort Criteria. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 30, 21–34.
- Saha, A.; Ray, T. (2011), Practical Robust Design Optimization Using Evolutionary Algorithms. *Journal of Mechanical Design*, 133(10), 101012.
- Taguchi, G.; Chowdhury, S.; Taguchi, S. (2000), “*Robust Engineering*”, McGraw–Hill, New York, USA.
- Zhou, A.; Qu, B.-Y.; Li, H.; Zhao, S.-Z.; Suganthan, P.N.; Zhang, Q. (2011), Multiobjective Evolutionary Algorithms: A Survey of the State of the Art. *Swarm and Evolutionary Computation*, 1(1), 32–49.

## APPLICATION OF ROBUST PENALIZATION TECHNIQUE FOR ANALYSIS OF MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION PROBLEMS

**Abstract.** *Traditionally, the engineering systems design does not consider the effect of perturbations on optimal solution found (nominal solution). In this case, it is possible that the nominal solution becomes impractical to be implemented, due to uncertainties associated with the design variables. The uncertainties may be related to several factors, such as climate variation, equipment limitations and financial factors. This work aims to obtain optimal solutions that are less sensitive to uncertainties in order to minimize the influence of small perturbations on vector of design variables. For this purpose, the Robust Penalization Method to solve multi-objective problems is proposed. From the obtained results it was possible to evaluate the influence of uncertainty parameter on quality of obtained solution.*

**Keywords:** *Robust optimization, Uncertainties, Robust Penalization Method, Multi-objective optimization*