XXI ENMC
ENCONTRO NACIONAL DE MODELAGEM COMPUTACIONAL
IX ECTM
ENCONTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS

08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

COMPARAÇÃO DE MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDOS COM GALERKIN DESCONTÍNUO PARA PROBLEMAS MISTOS

Gabriel Brandão de Miranda[1] - gabriel.miranda@ice.ufjf.br
Emerson Joarez da Silva[1] - emerson.silva@engenharia.ufjf.br
Iury Igreja[1] - iuryigreja@ice.ufjf.br
Bernardo Martins Rocha[1] - bernardo.rocha@ice.ufjf.br
[1]Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Ciência da Computação/ICE - Juiz de Fora, MG, Brazil

Resumo. *Com o objetivo de resolver problemas mistos através de aproximações polinomiais de alta ordem com custo computacional reduzido, este trabalho propõe o estudo de um método de elementos finitos Híbrido Misto Estabilizado (HME). Tal abordagem é caracterizada por introduzir um multiplicador de Lagrange para impor fracamente a continuidade nas interfaces dos elementos e pela estabilização por termos de mínimos quadrados que garantem a compatibilidade entre os espaços de aproximações que permitem interpolações polinomiais de mesma ordem para as variáveis do problema. Frequentemente, métodos de Galerkin Descontínuo (GD) são aplicados na resolução de problemas, uma vez que são mais consolidados na literatura. Assim, esse trabalho contempla a comparação entre os métodos HME e GD em termos de convergência, eficiência e custo computacional, principalmente quando interpolações polinomiais de alta ordem são utilizadas.*

Keywords: *Problemas mistos, métodos mistos híbridos, métodos de Galerkin descontínuo, análise numérica, métodos estabilizados.*

1. INTRODUÇÃO

Buscando aproximar problemas mistos através de método de elementos finitos utilizando aproximações polinomiais de alta ordem com custo computacional reduzido, o presente trabalho apresenta uma metodologia híbrida estabilizada para aproximar o seguinte problema modelo:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= -\kappa \nabla p \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} \vec{u} &= f \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \vec{u} \cdot \vec{n} &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_N, \\ p &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_D. \end{aligned} \tag{1}$$

Na dinâmica dos fluidos e hidrologia, a equação acima é conhecida como problema misto de Darcy, onde p representa a pressão hidrostática, $\vec{u}$ a velocidade do fluido, f é um termo fonte,

$\kappa = \frac{K}{\mu}$ é a condutividade hidráulica, K e μ denotam a permeabilidade e viscosidade, respectivamente.

Diferentes metodologias podem ser aplicadas para resolver o sistema acima. Uma possível abordagem é utilizar os métodos mistos de elementos finitos baseados na formulação de Galerkin que são caracterizados pela aproximação simultânea de $\vec{u}$ e p. Entretanto, tais métodos limitam a flexibilidade nas construções de aproximações por elementos finitos devido à necessidade de compatibilização entre os espaços de aproximação (Babuška, 1971; Brezzi, 1974). Neste sentido, Raviart and Thomas (1977) e Brezzi et al. (1985) desenvolveram combinações dos espaços de aproximação bem sucedidos. Outra metodologia aplicada para contornar as condições de compatibilidade são as formulações de elementos mistos estabilizados conhecidas como métodos de mínimos quadrados de Galerkin (MQG), propostas por Brezzi and Fortin (2001); Masud and Hughes (2002); Correa and Loula (2008). Outras alternativas possíveis são os métodos de Galerkin descontínuos (GD) (Brezzi et al., 2005; Hughes et al., 2006; Antonietti and Heltai, 2007; Badia and Codina, 2010). As vantagens dos métodos GD são conservação local, robustez e flexibilidade para a implementação de adaptatividade de malha e ordem polinomial devido ao uso de espaços de elementos finitos compostos por polinômios descontínuos por partes. Entretanto, devido à sua complexa formulação, implementação computacional e geração de um grande número de graus de liberdade, as hibridizações de métodos GD têm sido bastante exploradas para derivar novos métodos de elementos finitos com estabilidade aprimorada, complexidade e custo computacional reduzidos e ainda preservando a robustez e flexibilidade de métodos GD.

Os métodos híbridos foram desenvolvidos por Jones (1964) e Pian (1964) e no mesmo período, hibridizações dos métodos de elementos finitos emergiram do trabalho de Fraeijs de Veubeke (1965), que foi entendido como uma técnica de implementação associada à manipulação algébrica matricial já conhecida, denominada condensação estática. Entretanto, Arnold and Brezzi (1985) demonstraram que a hibridização é mais do que um truque de implementação. Uma vez estabelecida, a nova variável responsável por impor fracamente o fluxo de continuidade nas interfaces dos elementos (interpretada como multiplicador de Lagrange) contém informações adicionais sobre a solução exata (Raviart and Thomas, 1977; Cockburn and Gopalakrishnan, 2005; Fix, 1976; Brezzi and Fortin, 1991). Dessa forma, os métodos híbridos são caracterizados pela fraca imposição de continuidade nas interfaces dos elementos através dos multiplicadores de Lagrange, gerando assim um sistema global envolvendo apenas os graus de liberdade associados ao multiplicador através da eliminação das variáveis de interesse no nível dos elementos (Igreja and Loula, 2017). A aplicação desta metodologia em problemas unidimensionais sempre produz uma matriz global tridiagonal independentemente da ordem de interpolação polinomial (uma vez que o multiplicador é uma função de valor único definido nos nós das interfaces dos elementos), fato que reduz significativamente o custo computacional da resolução do sistema, principalmente quando aplica-se aproximações de alta ordem e malhas refinadas.

2. NOTAÇÕES E DEFINIÇÕES

Dado o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d = 1, 2, 3$, seja $H^m(\Omega)$ o espaço usual de Sobolev equipado com a norma $||\cdot||_{m.\Omega} = ||\cdot||_m$ e semi-norma $|\cdot|_{m.\Omega} = |\cdot|_m$, com $m \geq 0$. Em particular para $m = 0$, denota-se $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ como o espaço de funções quadrado integráveis. Neste contexto, a formulação mista dual para o problema descrito pela Eq. (1) com condição de contorno do tipo Dirichlet homogênea é dado a seguir:

Dado $f \in L^2(\Omega)$ e κ, encontre o par $[\vec{u}, p] \in H^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$ tal que satisfaça

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{v}) + b(p, \vec{v}) &= 0, \\ b(q, \vec{u}) &= f(q), \quad \forall [\vec{v}, q] \in H^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega), \end{aligned} \tag{2}$$

onde $L^2_0(\Omega)$ denota o espaço das funções quadrado integráveis com restrição de média nula e as formas bilineares e o funcional linear são dados por

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{v}) &= \int_\Omega \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} \, d\Omega, \\ b(p, \vec{v}) &= -\int_\Omega p \operatorname{div} \vec{v} \, d\Omega, \\ f(q) &= -\int_\Omega f q \, d\Omega, \end{aligned} \tag{3}$$

com $\alpha = \kappa^{-1}$. Porém, tal formulação limita a flexibilidade na construção das aproximações por elementos finitos. Devido a este motivo, torna-se necessário compatibilizar os espaços de aproximação e isso pode ser feito incluindo um termo de mínimos quadrados (Masud and Hughes, 2002; Correa and Loula, 2008) dado por

$$-\delta_1 \int_\Omega \kappa(\alpha \vec{u} + \nabla p) \cdot (\alpha \vec{v} + \nabla q) \, d\Omega. \tag{4}$$

Essa abordagem compatibiliza de maneira simples os espaços de aproximação. A utilização de polinômios de Lagrange de mesma ordem para os campos de interesse provoca instabilidade com a formulação mista dual, como demonstrado em Correa and Loula (2008). Para contornar esse problema, pode-se adicionar um termo de mínimos quadrados associado a segunda equação do sistema da Eq. (1) dado por

$$\delta_2 \int_\Omega (\operatorname{div} \vec{u} - f) \operatorname{div} \vec{v} \, d\Omega. \tag{5}$$

A adição desse termo estabiliza a formulação mista dual e garante a mesma taxa de convergência entre a velocidade e a pressão (Brezzi and Fortin, 2001; Masud and Hughes, 2002; Correa and Loula, 2008).

Por outro lado, para resolver o sistema da Eq. (1) através do método de elementos finitos híbrido misto, considere uma partição $\mathcal{T}_h$ formada pela união de todos os elementos K_i, com $i = 1, ..., N$ (onde N é a quantidade de elementos pertencentes ao domínio Ω). Para as arestas e dos elementos, define-se os seguintes conjuntos: $\mathcal{E}_h = \{e; e \text{ é uma aresta de } K_i, \forall K_i \in \mathcal{T}_h\}$ denota o conjunto de todas as arestas de todos os elementos, $\mathcal{E}^0_h = \{e \in \mathcal{E}_h; e \text{ é uma aresta interior}\}$ é o conjunto das arestas interiores e $\mathcal{E}^\partial_h = \{e \in \mathcal{E}_h; e \subset \partial\Omega\}$ o conjunto das arestas pertencentes ao contorno de Ω. Para cada aresta e para cada elemento, associa-se um vetor unitário normal $\vec{n}$. Dessa forma, define-se também os seguintes espaços quebrados de Sobolev para as variáveis de interesse:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^k_h &= \left\{ \vec{v} \in L^2(\Omega); \vec{v_h}|_{K_i} \in \mathbb{P}_k(K_i), \forall i \right\}, \\ \mathcal{Q}^l_h &= \left\{ q \in L^2(\Omega); q_h|_{K_i} \in \mathbb{P}_l(K_i), \forall i \right\}, \end{aligned} \tag{6}$$

onde $\mathbb{P}_j(K_i)$, $j = k$ ou $j = l$ denota o espaço de funções polinomiais de grau j associado aos elementos. Sobre as arestas $e \in \mathcal{E}_h$ introduz-se os espaços de aproximações referentes aos multiplicadores de Lagrange, que podem ser considerados de forma contínua ou descontínu

$$\mathcal{M}_h^n = \left\{ \mu|_e \in L^2(\mathcal{E}_h) \text{ ou } C^0(\mathcal{E}_h); \mu|_e = \varphi_n(e), \forall e \in \mathcal{E}_h^0; \mu|_e = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial \right\}, \quad (7)$$

onde φ_n é o espaço de funções polinomiais de grau menor ou igual a n sobre cada aresta e.

3. MÉTODO HÍBRIDO ESTABILIZADO

Dentre as principais características deste método, destacam-se: (i) Em problemas unidimensionais, a matriz de rigidez gerada pela técnica de condensação estática é sempre tridiagonal, independentemente da ordem polinomial utilizada; (ii) Estabilidade dos problemas locais, de modo que todos os graus de liberdade de $\vec{u}$ e $\vec{p}$ possam ser eliminados no nível do elemento em favor do multiplicador de Lagrange, gerando um sistema global somente com os graus de liberdade do multiplicador; (iii) A adição de termos residuais de mínimos quadrados permite a obtenção de estabilidade ao empregar a mesma ordem de aproximação para as variáveis de interesse; (iv) A partir de uma escolha específica do coeficiente de estabilização, o método torna-se localmente conservativo; (v) Associação natural entre a formulação híbrida e o método GD através das definições de saltos e médias.

Tomando o multiplicador de Lagrange como o traço do campo de pressão ($\lambda_h = p|_e$) sobre cada aresta $e \in \mathcal{E}_h$ para impor a continuidade entre as aproximações locais definidas em cada elemento, formula-se o método HME dual:

Dado $f \in L^2(\Omega)$ e κ, encontre o par $[\vec{u}_h, p_h] \in \mathcal{V}_h^k \times \mathcal{Q}_h^l$ e o multiplicador de Lagrange $\lambda_h \in \mathcal{M}_h^n$, tal que $\forall[\vec{v}_h, q_h] \in \mathcal{V}_h^k \times \mathcal{Q}_h^l$ e $\forall \mu_h \in \mathcal{M}_h^n$ satisfazendo

$$\begin{aligned}
&\sum_{K_i \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{K_i} \alpha \vec{u}_h \cdot \vec{v}_h \, dK_i - \int_{K_i} p_h \operatorname{div} \vec{v}_h \, dK_i + \int_{\partial K_i} \lambda_h (\vec{v}_h \cdot \vec{n}) \, ds \right. \\
&+ \int_{\partial K_i} \mu_h (\vec{u}_h \cdot \vec{n}) \, ds - \beta \int_{\partial K_i} (p_h - \lambda_h)(q_h - \mu_h) \, ds - \int_{K_i} q_h \operatorname{div} \vec{u}_h \, dK_i \\
&\left. -\delta_1 \int_{K_i} \kappa (\alpha \vec{u}_h + \nabla p_h) \cdot (\alpha \vec{v}_h + \nabla q_h) \, dK_i + \delta_2 \int_{K_i} (\operatorname{div} \vec{u}_h - f) \operatorname{div} \vec{v}_h \, dK_i \right] \\
&= - \sum_{K_i \in \mathcal{T}_h} \int_{K_i} f q_h \, dK_i,
\end{aligned} \quad (8)$$

com $\beta = \kappa \frac{\beta_0}{h}$ (h é uma característica da dimensão do elemento). Uma vez que $\vec{v}_h$ e q_h são definidos independentemente em cada elemento, observa-se que o sistema da Eq. (8) pode ser dividido em um conjunto de problemas locais definidos em cada elemento K_i acoplado a um problema global definido sobre $\mathcal{E}_h$, como segue:

Problema local: Para cada $K_i \in \mathcal{T}_h$, encontrar $\vec{u}_h|_{K_i} \in \mathcal{V}_h^k(K_i)$ e $p_h|K_i \in \mathcal{Q}_h^l(K_i)$, tal que para todo $\vec{v}_h \in \mathcal{V}_h^k(K_i)$ e $q_h|_{K_i} \in \mathcal{Q}_h^l(K_i)$ satisfaça

$$\begin{aligned}
a_K(\vec{u}_h, \vec{v}_h) + \quad & b_K(p_h, \vec{v}_h) = \delta_2 \int_{K_i} f \operatorname{div} \vec{v}_h \, dK_i - \int_{\partial K_i} \lambda_h (\vec{v}_h \cdot \vec{n}) \, ds, \\
b_K(q_h, \vec{u}_h) - \beta \int_{\partial K_i} p_h q_h ds + \quad & c_K(p_h, q_h) = - \int_{K_i} f q_h \, dK_i - \beta \int_{\partial K_i} \lambda_h q_h \, ds.
\end{aligned} \quad (9)$$

Problema global: Encontrar $\lambda_h \in \mathcal{M}_h^n$ *satisfazendo para todo* $\mu_h \in \mathcal{M}_h^n$

$$\sum_{K_i \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{\partial K_i} \mu_h (\vec{u_h} \cdot \vec{n}) \, ds + \beta \int_{\partial K_i} (p_h - \lambda_h) \mu_h \, ds \right] = 0. \tag{10}$$

Desse modo, as formas bilineares $a_K(\cdot,\cdot), b_K(\cdot,\cdot)$ e $c_K(\cdot,\cdot)$ são dadas por

$$\begin{aligned} a_K(\vec{u_h}, \vec{v_h}) &= (1-\delta_1) \int_{K_i} \alpha \vec{u_h} \cdot \vec{v_h} \, dK_i + \delta_2 \int_{K_i} \operatorname{div} \vec{u_h} \operatorname{div} \vec{v_h} \, dK_i, \\ b_K(p_h, \vec{v_h}) &= - \int_{K_i} p_h \operatorname{div} \vec{v_h} \, dK_i - \delta_1 \int_{K_i} \nabla p_h \cdot \vec{v_h} \, dK_i, \\ c_K(p_h, q_h) &= -\delta_1 \int_{K_i} \kappa \nabla p_h \cdot \nabla q_h \, dK_i. \end{aligned} \tag{11}$$

3.1 Conexão entre os métodos HME e GD

Os métodos de Galerkin Descontínuo são formulados usando os conceitos dos operadores conhecidos como saltos e médias, definidos, respectivamente, conforme as equações a seguir:

$$\begin{aligned} [v]_e &= v_i \vec{n_i} + v_j \vec{n_j}, \\ [\nabla v]_e &= \nabla v_i \cdot \vec{n_i} + \nabla v_j \cdot \vec{n_j}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \{v\} &= \frac{1}{2}(v_i + v_j), \\ \{\nabla v\} &= \frac{1}{2}(\nabla v_i + \nabla v_j), \end{aligned} \tag{13}$$

como os saltos e médias são calculados nas interfaces entre elementos ($e \in \mathcal{E}_h^0$), para qualquer $v \in \mathcal{V}_h^k$, $v_i = v|_{\partial K_i}$ e $v_j = v|_{\partial K_j}$. Os índices i e j são utilizados para denotar dois elementos distintos e consecutivos.

Dada a definição de saltos e médias, pode-se formular um método de GD para a Eq. (1) e até mesmo reescrever o método HME em termos de saltos e médias (e dessa forma, mostrar que ambos os métodos podem ser relacionados). Neste trabalho, tal conexão entre os métodos não é abordada. Assim, o método HME será comparado com o método de GD presente em Brezzi et al. (2005).

Dessa forma, utilizando novamente as formas bilineares $a_K(\cdot,\cdot), b_K(\cdot,\cdot)$ e $c_K(\cdot,\cdot)$, chega-se na seguinte formulação (Brezzi et al., 2005):

$$\begin{aligned} a_K(\vec{u_h}, \vec{v_h}) + b_K(p_h, \vec{v_h}) + \beta_u [\vec{u_h}][\vec{v_h}] &= \delta_2 \int_{K_i} f \operatorname{div} \vec{v_h} \, dK_i, \\ b_K(q_h, \vec{u_h}) + c_K(p_h, q_h) + \beta_p [p_h][q_h] &= - \int_{K_i} f q_h \, dK_i. \end{aligned} \tag{14}$$

Onde β_p e β_u são diferentes termos de penalização dos saltos em p e u respectivamente.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados resultados dos experimentos numéricos, que tem por objetivo validar a formulação da Eq. (8) e realizar comparações com o método de GD. Para tanto, foi considerado um caso unidimensional do problema de Darcy com condições de contorno de Dirichlet e termo fonte escolhido adequadamente de acordo com a solução exata

$$p = cos(2\pi x) \quad \text{e} \quad u = 2\pi\kappa sin(2\pi x), \tag{15}$$

com $\Omega = (0, 1)$ e $\kappa = 1.0$.

Buscando avaliar os efeitos dos termos de estabilização da Eq. (4) e Eq. (5), experimentos numéricos foram realizados tomando $\beta_0 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$ (Tabela 1), $\beta_0 = 0$, $\delta_1 = 0.5$ e $\delta_2 = 0$ (Tabela 2) e $\beta_0 = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.5$ (Tabela 3). Destaca-se ainda que os experimentos das tabelas (1,2,3) foram gerados utilizando refinamentos de malha com 4, 8, 16, 32 e 64 elementos com diferentes ordens de aproximações polinomiais de Lagrange.

Grau (k,l)	Método			
	HME		GD	
	Ordem u	Ordem p	Ordem u	Ordem p
(1,1)	1.2023	2.1983	1.2124	2.1535
(2,2)	2.0126	3.0085	1.8933	2.9209
(3,3)	2.9948	3.9931	3.0635	4.0334
(4,4)	3.9927	4.9921	3.9493	4.9655
(5,5)	4.9785	5.9896	5.0358	6.0162

Tabela 1- Taxas de convergência para u e p utilizando $\beta_0 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$.

Grau (k,l)	Método			
	HME		GD	
	Ordem u	Ordem p	Ordem u	Ordem p
(1,1)	1.9805	2.0331	0.7265	1.8934
(2,2)	2.1279	2.9926	2.2188	3.0117
(3,3)	3.0288	3.9909	2.8832	3.9401
(4,4)	4.0057	4.9919	4.1265	5.0164
(5,5)	5.0028	6.0000	4.9396	5.9400

Tabela 2- Taxas de convergência para u e p utilizando $\beta_0 = 0$, $\delta_1 = 0.5$ e $\delta_2 = 0$.

De acordo com a Tabela (3), nota-se que as taxas ótimas (para u e p) foram obtidas para ambos os métodos (HME e GD) quando os dois termos de estabilização foram utilizados (inclusive retirando a dependência de β_0). Como mostra a Tabela (2), a utilização de somente um termo de estabilização resulta na obtenção de taxa ótima para p, mas não para u (com exceção do caso linear para o problema unidimensional em questão, onde foi obtido taxa ótima também para a variável u). Resultados semelhantes foram obtidos sem termos de estabilização e tomando $\beta_0 = 1$ (Tabela (1)), entretanto, essa abordagem é considerada menos eficiente pela necessidade de encontrar um valor adequado para β_0 com base no problema a ser resolvido.

Os problemas locais em u e p são solucionáveis para escolhas muito flexíveis de espaços de elementos finitos, incluindo ordem igual para espaços de velocidade e pressão. Após a

Grau (k,l)	Método			
	HME		GD	
	Ordem u	Ordem p	Ordem u	Ordem p
(1,1)	1.9805	2.0331	1.9685	2.1651
(2,2)	2.9868	2.9861	2.9844	3.0070
(3,3)	3.9891	3.9936	3.9890	3.9938
(4,4)	4.9911	5.0010	4.9910	4.9911
(5,5)	6.0013	6.0037	5.9896	5.9785

Tabela 3- Taxas de convergência para u e p utilizando $\beta_0 = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.5$.

condensação estática, uma matriz tridiagonal envolvendo apenas os graus de liberdade do multiplicador é resolvida levando à solução aproximada do multiplicador que é utilizada nos problemas locais para recuperar a aproximação descontínua das variáveis primárias u e p. Além disso, a formulação proposta é facilmente implementada usando a mesma estrutura de dados dos métodos clássicos conformes de elementos finitos. Resultados numéricos envolvendo estudos de convergência mostram taxas ótimas para escolhas muito flexíveis de espaços de aproximação, incluindo ordem igual para todos os campos, além de apresentar uma redução significativa do custo computacional se comparado ao método de Galerkin Descontínuo.

Para efeitos comparativos de custo computacional para a resolução de um sistema linear entre os métodos HME e GD, foi utilizado como métrica a quantidade de graus de liberdade. Com base na Tabela 4, pode-se notar que o método HME apresenta uma redução significativa na ordem da matriz que representa o sistema linear global, quando comparado com o método de GD, principalmente quando são utilizadas aproximações de alta ordem. Além disso, vale ressaltar que o método HME gera matrizes tridiagonais de mesma ordem para todas as ordens polinomiais adotadas enquanto que o método de Galerkin descontínuo apresenta matrizes com largura de banda superior, inclusive para o caso linear ($k = l = 1$).

Método	Ordem polinomial				
	$k = l = 1$	$k = l = 2$	$k = l = 3$	$k = l = 4$	$k = l = 5$
	$\#gdl$	$\#gdl$	$\#gdl$	$\#gdl$	$\#gdl$
HME	1023	1023	1023	1023	1023
GD	4094	6142	8190	10238	12286

Tabela 4- Graus de Liberdade (*#gdl*) em uma malha unidimensional com 1024 elementos.

5. CONCLUSÕES

O método HME mostrou-se computacionalmente eficiente com uma formulação flexível que permite obtenção de taxas ótimas de convergência para u e p, a partir de escolhas específicas para os coeficientes de estabilização, utilizando a mesma ordem de interpolação para os polinômios de aproximação de Lagrange. Além das taxas ótimas obtidas, o método HME não necessita do termo de estabilização governado pelo coeficiente β nas arestas dos elementos quando incorporado resíduos de mínimos quadrados à formulação, fato que torna o método mais robusto, uma vez que a dependência desse parâmetro em uma formulação pode torná-la menos eficiente pela dificuldade de se encontrar um β_0 adequado de acordo com o problema a ser resolvido.

No tocante ao custo computacional, destaca-se que a quantidade de graus de liberdade presentes na resolução do problema com a metodologia híbrida, é bem menor quando comparado com o método de Galerkin descontínuo. Quando aplicado em problemas unidimensionais, o método HME gera sempre uma matriz tridiagonal para a obtenção do multiplicador, possibilitando a resolução do problema no nível do elemento. Esse fato reduz muito o custo computacional do método HME, demonstrando uma grande vantagem em relação aos métodos de GD dentro deste cenário.

Referências Bibliográficas

Antonietti, P. F. and Heltai, L. (2007). Numerical validation of a class of mixed discontinuous galerkin methods for darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(45-48):4505–4520.

Arnold, D. N. and Brezzi, F. (1985). Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 19(1):7–32.

Babuška, I. (1971). Error-bounds for finite element method. *Numerische Mathematik*, 16(4):322–333.

Badia, S. and Codina, R. (2010). Stabilized continuous and discontinuous galerkin techniques for darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(25-28):1654–1667.

Brezzi, F. (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, 8(R2):129–151.

Brezzi, F., Douglas, J., and Marini, L. D. (1985). Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems. *Numerische Mathematik*, 47(2):217–235.

Brezzi, F. and Fortin, M. (1991). Mixed and hybrid finite element methods, no. 15 in springer series in computational mathematics.

Brezzi, F. and Fortin, M. (2001). A minimal stabilisation procedure for mixed finite element methods. *Numerische Mathematik*, 89(3):457–491.

Brezzi, F., Hughes, T. J., Marini, L. D., and Masud, A. (2005). Mixed discontinuous galerkin methods for darcy flow. *Journal of Scientific Computing*, 22(1-3):119–145.

Cockburn, B. and Gopalakrishnan, J. (2005). New hybridization techniques. *GAMM-Mitteilungen*, 28(2):154–182.

Correa, M. and Loula, A. (2008). Unconditionally stable mixed finite element methods for darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(17-18):1525–1540.

Fix, G. M. (1976). Hybrid finite element methods. *SIAM review*, 18(3):460–484.

Fraeijs de Veubeke, B. (1965). Displacement and equilibrium models in the finite element method. *Stress analysis*, pages chapter–9.

Hughes, T. J., Masud, A., and Wan, J. (2006). A stabilized mixed discontinuous galerkin method for darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(25-28):3347–3381.

Igreja, I. and Loula, A. F. (2017). Stabilized velocity and pressure mixed hybrid dgfem for the stokes problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 112(7):603–628.

Jones, R. E. (1964). A generalization of the direct-stiffness method of structural analysis. *AIAA Journal*, 2(5):821–826.

Masud, A. and Hughes, T. J. (2002). A stabilized mixed finite element method for darcy flow. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191(39-40):4341–4370.

Pian, T. H. (1964). Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions. *AIAA journal*, 2(7):1333–1336.

Raviart, P.-A. and Thomas, J.-M. (1977). A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. In *Mathematical aspects of finite element methods*, pages 292–315. Springer.

COMPARISON OF HYBRID FINITE ELEMENT METHODS WITH DISCONTINUOUS GALERKIN FOR MIXED PROBLEMS

Abstract. *With the objective of solving mixed problems through high polynomial order approximations with reduced computational cost, this work presents a study of a finite element method called Stabilized Hybrid Mixed (SHM). This approach is characterized by the introduction of a Lagrange multiplier to weakly imposes the continuity at the element interfaces and by the stabilization employing least square terms that ensure the approximation spaces campatibility allowing polynomial interpolations of the same order to the problem variables. Frequently, Discontinuous Galerkin methods (DG) are applied at the problem resolution, once they are consolidated in the literature. Thus, this work includes the comparison between the SHM and DG methods in terms of convergence, efficiency and computational cost, especially when high order polynomial interpolations are used.*