



08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDO ESTABILIZADO P-ADAPTATIVO PARA O PROBLEMA DE DARCY

Leonardo F. Mello¹ - leofagundesdemello@gmail.com

Iury Igreja² - iuryigreja@ice.ufjf.br

Abimael F. Loula¹ - aloc@lncc.br

¹Laboratório Nacional de Computação Científica - Petrópolis, RJ, Brasil

²Universidade Federal de Juiz de Fora - Juiz de Fora, MG, Brasil

Resumo. Atualmente a extração de petróleo e gás são problemas abordados numericamente de forma massiva com o intuito de se obter melhor eficácia nos procesos de produção destes compostos. Neste contexto, o presente trabalho mostra resultados de aproximações usando métodos de elementos finitos mistos híbridos estabilizados aliado a técnicas de p-adaptatividade para o problema de Darcy. Os resultados numéricos mostram como o método se comporta em meios heterogêneos ao alcançar aproximações de alta ordem. Além disso, é apresentado um indicador de erro baseado em termos de resíduos em mínimos quadrados que distribuem os graus dos polinômios de interpolação adaptativamente.

Keywords: Problema de Darcy, Elementos finitos, Métodos mistos híbridos, Aproximações de alta ordem, P-adaptatividade

1. INTRODUÇÃO

Diversos métodos numéricos vem sendo desenvolvidos para aproximar problemas de fluidos em meios porosos, uma vez que esta grande área possui aplicações à vida moderna como por exemplo em projetos de extração de petróleo e gás. O modelo que descreve a hidrodinâmica desses fenômenos pode ser descrito pelo problema de Darcy e as aproximações mais utilizadas são com métodos de diferenças finitas, volumes finitos ou elementos finitos. Não importa qual a técnica de resolução, o custo computacional é sempre importante pois está relacionado à precisão mínima desejada.

As técnicas adaptativas buscam otimizar o uso computacional da aproximação possibilitando que o método use estratégias de refinamentos apenas em regiões de maior necessidade como é o caso em meios heterogêneos. Os métodos que empregam refinamento da malha são conhecidos como adaptatividade do tipo h, por outro lado a adaptatividade p está relacionada aos graus dos polinômios de aproximação que alcançam alta ordem nas regiões críticas do domínio. Além disso, ambas as técnicas podem ser usadas simultaneamente gerando metodologias de adaptatividade hp. Referências deste tipo de técnica aplicadas em métodos de elementos finitos

podem ser encontradas nos trabalhos de Chen et al (2016), para problema em meios porosos fraturados, e de Giorgiani et al (2013) que aplica aproximação usando métodos de Galerkin descontínuo híbridos p-adaptativos em problema de propagação de ondas.

No presente trabalho, utilizamos uma formulação de elementos finitos híbridos estabilizadas apresentada por Núñez et al. (2012) para aproximar o problema de Darcy em um meio poroso bidimensional e estudamos o comportamento de uma abordagem p adaptativa associada ao método híbrido. Tal abordagem, incorpora iterativamente a distribuição automática a distribuição polinomial a partir de um indicador de erro baseado nos termos de estabilização propostos em Correa & Loula (2008). Estes termos tornam a formulação incondicionalmente estável com convergência de taxa ótima e são constituídos de resíduos de mínimos quadrados formulados a partir da lei de Darcy, do balanço de massa e do rotacional da Lei de Darcy. A formulação híbrida estabilizada utilizada aqui foi uma das contribuições abordadas em Núñez et al. (2012) e Igreja (2015), onde o multiplicador de Lagrange foi escolhido como o traço da pressão nas interfaces dos elementos. Este método híbrido se difere do usado para o acoplamento Stokes-Darcy apresentado em Igreja & Loula (2018), onde a escolha do multiplicador de Lagrange é a representação do traço da velocidade nas arestas do domínio bidimensional. Tal escolha necessita de um termo de estabilização multiplicada por uma constante β , a magnitude desta constante depende do grau do polinômio de aproximação ocasionando uma dificuldade à p-adaptatividade. O estudo sobre as possibilidades de β em formulações de métodos híbridos pode ser encontrada no trabalho Gopalakrishnan et al (2015), que estuda numericamente a propagação de ondas harmônicas. Uma referência completa sobre os métodos híbridos pode ser encontrada no trabalho de Cockburn et al (2009).

Ao final, resultados numéricos são apresentados utilizando o método híbrido p-adaptativo para aproximar problemas em meios porosos heterogêneos, que comprovam a flexibilidade da metodologia proposta em tratar descontinuidades e distribuir de forma eficiente as ordens polinomiais da estratégia p-adaptativa de forma a obter uma mesma precisão numérica em todo o domínio.

Além desta seção introdutória, este trabalho apresenta na Seção 2 o problema modelo de Darcy e algumas definições pertinentes ao método híbrido que é introduzido na Seção 3. Na Seção 4, é apresentada a estratégia de p-adaptatividade adotada neste trabalho. Na Seção 5, resultados numéricos empregando o método híbrido p-adaptativo são apresentados e discutidos. Finalmente, na Seção 6 são apresentadas as conclusões do trabalho.

2. PROBLEMA MODELO

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com contorno Lipschitz contínuo $\Gamma = \partial\Omega$. Podemos definir o problema de Darcy como:

Encontrar a velocidade \mathbf{u} e o potencial hidráulico φ tal que

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\nabla\varphi \quad \text{em } \Omega, \quad (1)$$

$$\text{div}(\mathbf{u}) = f \quad \text{em } \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \quad (3)$$

onde \mathbf{K} denota a condutividade hidráulica e f o termo de fonte

Introduzimos abaixo algumas definições necessárias para a introdução dos métodos de elementos finitos híbridos.

Seja \mathcal{T}_h uma partição regular de elementos finitos definida como

$$\mathcal{T}_h = \{K\} := \text{a união de todos os elementos } K$$

no domínio Ω . Para as arestas e dos elementos K definimos os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{E}_h = \{e; e \text{ é uma aresta de } K \text{ para todo } K \in \mathcal{T}_h\}$$

que denota o conjunto de todas as arestas e de todos os elementos K ,

$$\mathcal{E}_h^0 = \{e \in \mathcal{E}_h; e \text{ é uma aresta interior}\}$$

é o conjunto das arestas interiores, e

$$\mathcal{E}_h^\partial = \{e \in \mathcal{E}_h; e \subset \partial\Omega\}$$

o conjunto de arestas do bordo de Ω .

Assumindo o domínio Ω como um polígono e \mathcal{T}_h uma partição regular de Ω , existe um $c > 0$ tal que $h \leq ch_e$, onde h_e é o diâmetro da aresta $e \in \partial K$ e h , o parâmetro de malha, é o diâmetro do elemento. Para cada aresta e associamos um vetor unitário normal \mathbf{n}_e e para cada elemento K associamos um vetor unitário normal \mathbf{n}_K .

Para introduzir os métodos híbridos, definimos os seguintes espaços de dimensão finita sobre a partição de \mathcal{T}_h

$$\mathcal{V}_h^l = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2; \mathbf{v}_h|_K \in [\mathbb{Q}_l(K)]^2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (4)$$

$$\mathcal{Q}_h^m = \{q \in L^2(\Omega); q_h|_K \in \mathbb{Q}_m(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (5)$$

onde $\mathbb{Q}_j(K)$, $j = l$ ou $j = m$, denota o espaço de funções polinomiais de grau j associado a elementos quadrilaterais. Sobre as arestas $e \in \mathcal{E}_h$ introduzimos os espaços de aproximações referentes aos multiplicadores de Lagrange. Neste caso, consideramos duas possibilidades de espaço de dimensão finita

$$\mathcal{D}_h^n = \{\mu \in L^2(\mathcal{E}_h) : \mu|_e = p_n(e), \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \mu|_e = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial\}, \quad (6)$$

onde $p_n(e)$ expressa o espaço das funções polinomiais descontínuas de grau menor ou igual a n sobre cada aresta e , e para aproximações contínuas do multiplicador definimos o espaço

$$\mathcal{C}_h^n = \{\mu \in C^0(\mathcal{E}_h) : \mu|_e = p_n(e), \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \mu|_e = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial\}. \quad (7)$$

Além disso, definimos o espaço de aproximação que contempla tanto multiplicadores contínuos quanto descontínuos, como segue

$$\mathcal{M}_h^n \in \{\mathcal{D}_h^n, \mathcal{C}_h^n\}. \quad (8)$$

3. FORMULAÇÃO MISTA HÍBRIDA ESTABILIZADA

Restringimos a forma forte mista do problema de Darcy (Equações(1) e (2)) a cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\nabla\varphi \quad \text{em } K, \quad (9)$$

$$\text{div}(\mathbf{u}) = f \quad \text{em } K \quad (10)$$

e incluímos os termos de transmissão entre eles

$$[[\mathbf{u}]] = 0 \quad \text{sobre } \mathcal{E}_h^0, \quad (11)$$

$$[[\varphi]] = 0 \quad \text{sobre } \mathcal{E}_h^0. \quad (12)$$

Definindo a resistividade hidráulica $\mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1}$, a partir das equações (9) e (10) podemos derivar a seguinte formulação mista dual no nível do elemento $K \in \mathcal{T}_h$:

$$\begin{aligned} \int_K \mathbf{A} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_K q_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\mathbf{x} + \int_K \varphi_h (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) ds = 0 \\ - \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h q_h d\mathbf{x} = - \int_K f q_h d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (13)$$

Somando (13) sobre todos os elementos $K \in \mathcal{T}_h$ e incluindo o multiplicador de Lagrange, para impor as condições de transmissão (11)-(12), definido como o traço da pressão $\lambda_h = \varphi_h|_e$ sobre todas as arestas $e \in \mathcal{E}_h$, obtemos:

Achar $[\mathbf{u}_h, \varphi_h] \in \mathcal{V}_h^l \times \mathcal{Q}_h^m$ e o multiplicador de Lagrange $\lambda \in \mathcal{W}_h^n$ tal que para todo $[v_h, q_h] \in \mathcal{V}_h^l \times \mathcal{Q}_h^m$ e para todo $\mu \in \mathcal{M}_h^n$

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{A} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K q_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\mathbf{x} \\ + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \lambda_h (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) ds - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h q_h d\mathbf{x} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f q_h d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_K) \mu_h ds = 0. \quad (15)$$

A equação (15) pode ser incluída a partir da relação de transmissão (11) e é chamada de equação global do multiplicador. Os termos de estabilização de resíduos de mínimos quadrados relacionados a lei de Darcy, ao balanço de massa e ao rotacional da Lei de Darcy propostos por Correa & Loula (2008) são incluídos em (14)-(15), tal que o método denominado SDHM introduzido em Núñez et al. (2012) pode ser definido como:

Encontrar o par $[\mathbf{u}_h, \varphi_h] \in \mathcal{V}_h^l \times \mathcal{Q}_h^m$ e o multiplicador de Lagrange $\lambda_h \in \mathcal{M}_h^n$ tal que, para todo $[v_h, q_h] \in \mathcal{V}_h^l \times \mathcal{Q}_h^m$ e $\mu_h \in \mathcal{M}_h^n$

$$A_{SDHM}([\mathbf{u}_h, \varphi_h, \lambda_h]; [v_h, q_h, \mu_h]) = F_{SDHM}([v_h, q_h]), \quad (16)$$

com

$$\begin{aligned} A_{SDHM}([\mathbf{u}_h, \varphi_h, \lambda_h]; [v_h, q_h, \mu_h]) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \mathbf{A} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_K \varphi_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\mathbf{x} \right. \\ \left. + \int_{\partial K} \lambda_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K) ds + \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_K) \mu_h ds \right. \\ \left. - \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h q_h d\mathbf{x} + \delta_1 \int_K (\operatorname{div} \mathbf{u}_h)(\operatorname{div} \mathbf{v}_h) d\mathbf{x} \right. \\ \left. + \delta_2 \int_K (\mathbf{u}_h + \nabla \varphi_h) \cdot (\mathbf{v}_h + \nabla q_h) d\mathbf{x} + \delta_3 \int_K \operatorname{rot} \mathbf{u}_h \operatorname{rot} \mathbf{v}_h d\mathbf{x} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

e

$$F_{SDHM}([\mathbf{v}_h, q_h]) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\delta_1 \int_K f (\operatorname{div} \mathbf{v}_h) d\mathbf{x} - \int_K f q_h d\mathbf{x} \right]. \quad (18)$$

Os parâmetros adimensionais de estabilização δ_1 , δ_2 e δ_3 estão relacionados às formas residuais do tipo de mínimos quadrados definidos no interior de cada elemento K .

4. P-ADAPTATIVIDADE

Buscando encontrar uma estratégia p -adaptativa capaz de capturar de forma eficiente as variações de erro geradas pela aproximação do método SDHM, desenvolvemos um indicador baseado nos resíduos de mínimos quadrados definidos no elemento $K \in \mathcal{T}_h$ e no multiplicado de Lagrange sobre a aresta $e \in \mathcal{E}_h$, onde obtemos dados locais sobre a variação das propriedades do meio e da aproximação:

$$\begin{aligned} err_K(\varphi_h, \mathbf{u}_h, \lambda_h)^2 &= \int_K (\operatorname{div} \mathbf{u}_h - f)^2 dx \\ &+ \int_K (\mathbf{u}_h + \nabla \varphi_h)^2 dx + \int_K (\operatorname{rot} \mathbf{u}_h)^2 dx \\ &+ \int_{\partial K} h(\lambda_h - \varphi_h)^2 ds, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \end{aligned} \quad (19)$$

onde h é inserido com o intuito de balancear a ordem de grandeza do sistema. Os três primeiros termos do indicador decorrem naturalmente das estabilizações de mínimos quadrados locais, enquanto que o último termo mede o salto na interface dos elementos.

O cálculo da expressão (19) é realizado em cada elemento K , e avaliado de maneira que respeite uma tolerância ε pré-estabelecida. Enquanto $|err_K(\varphi_h, \mathbf{u}_h, \lambda_h)| > \varepsilon$ a ordem do polinômio que interpola as variáveis locais aumentam em uma unidade ($l = l + 1$ e $m = m + 1$).

Sobre as arestas, o grau do polinômio dos multiplicadores n é determinado pela maior ordem das variáveis locais, ou seja, para dois elementos que compartilham uma aresta, o grau do polinômio desta aresta está associado ao maior grau dos dois elementos.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção apresentamos resultados numéricos que visam demonstrar a flexibilidade do método híbrido misto estabilizado proposto (16) utilizando multiplicadores contínuos (SDHM-C) e multiplicadores descontínuos (SDHM-D). Utilizamos a estratégia p -adaptativa, apresentada na Seção 4, com o intuito de obter soluções precisas e estáveis em domínios que possuem matrizes porosas heterogêneas. Além disso, o método híbrido com a estratégia p -adaptativa é testada em malhas estruturadas uniformes e não-estruturadas. Assim, para um estudo numérico de convergência, consideramos um domínio $\Omega = [-2.0, 2.0] \times [-2.0, 2.0]$ a seguinte solução analítica

$$\mathbf{u}_x = -2.0\pi \cos(\pi x) \sin(\pi y) \quad (20)$$

$$\mathbf{u}_y = -2.0\pi \cos(\pi x) \cos(\pi y) \quad (21)$$

$$\varphi = 2.0\pi \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (22)$$

e um quadrado no meio do domínio com a solução dada por

$$\mathbf{u}_x = -\pi(2.0\cos(\pi x)\sen(\pi y) + \sen(\pi x)\cos(\pi y)) \quad (23)$$

$$\mathbf{u}_y = -\pi(\cos(\pi x)\sen(\pi y) + 2.0\sen(\pi x)\cos(\pi y)) \quad (24)$$

$$\varphi = \sin(\pi x)\sin(\pi y) \quad (25)$$

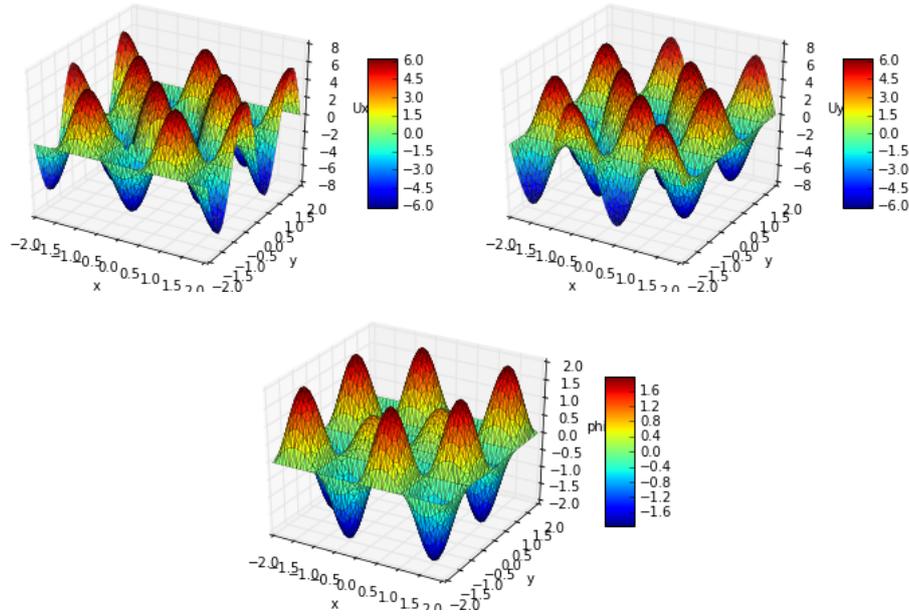


Figura 1- Solução analítica

Os parâmetros utilizados na aproximação são $\delta_1 = 0.5$, $\delta_2 = 0.5$ e $\delta_3 = -0.5$, a convergência alcança uma ordem máxima de $m = l = 6$ e $n = 6$: O método SDHM convergiu para

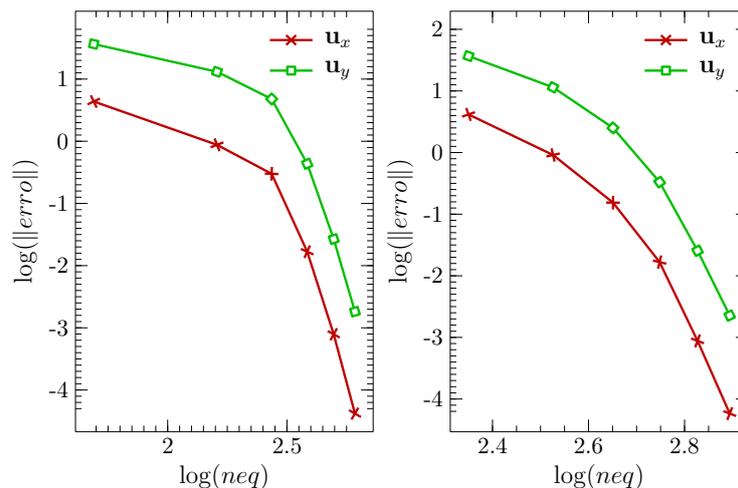


Figura 2- Aproximação com o método SDHM: multiplicadores contínuos a esquerda e descontínuos a direita

o problema proposto, a comparação entre a precisão quando atinge alta ordem com o método de

multiplicadores de Lagrange contínuos com descontínuos mostra suas semelhanças. Embora, o método com multiplicadores contínuos utilize menos graus de liberdade que descontínuos.

Aplicando a técnica de p-adaptatividade proposta, impondo uma tolerância $\varepsilon = 10^{-3}$, testamos a convergência para o mesmo problema. No método SDHM com multiplicadores des-

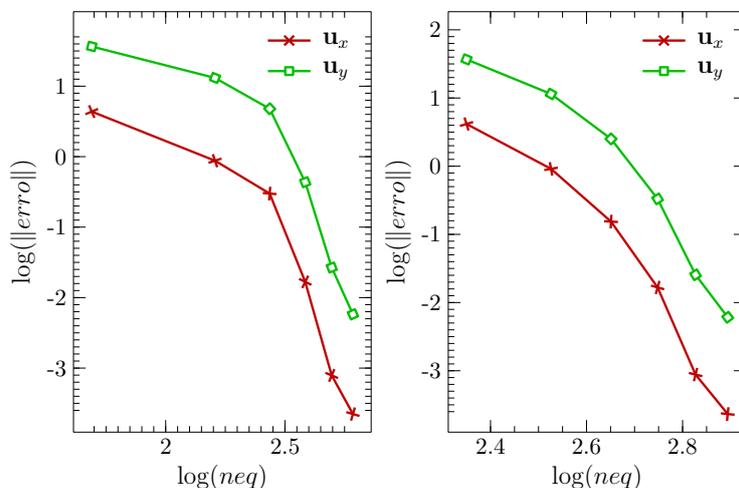


Figura 3- Aproximação com o método SDHM p-adaptativo: multiplicadores contínuos a esquerda e descontínuos a direita

contínuos, gráfico da direita da Figura 3, podemos observar um comportamento do erro, entretanto, a distribuição polinomial foi idêntica ao método com multiplicador contínuo. Na Figura 4 ressaltamos a configuração que a estratégia p-adaptativa, mostramos a localização a região crítica que foi igual em ambos os casos (SDHM-C e SDHM-D). Esta equivalência assegura que o SDHM de multiplicadores contínuos alcançou a mesma precisão com menos graus de liberdade.

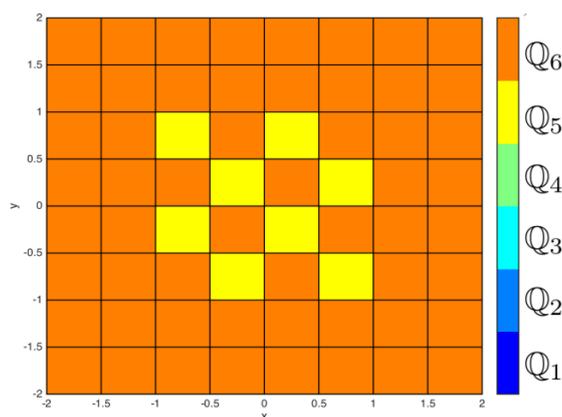


Figura 4- Aproximação com o método SDHM p-adaptativo com variação no material do meio poroso

Diante desta configuração idêntica para SDHM-C e SDHM-D vamos usar um domínio retangular com um círculo no centro. Faremos com que dentro do círculo o material seja diferente do restante para que exista graus mais elevados nesta região. Além disso, usamos uma malha não-estruturada para aproximar este meio heterogêneo.

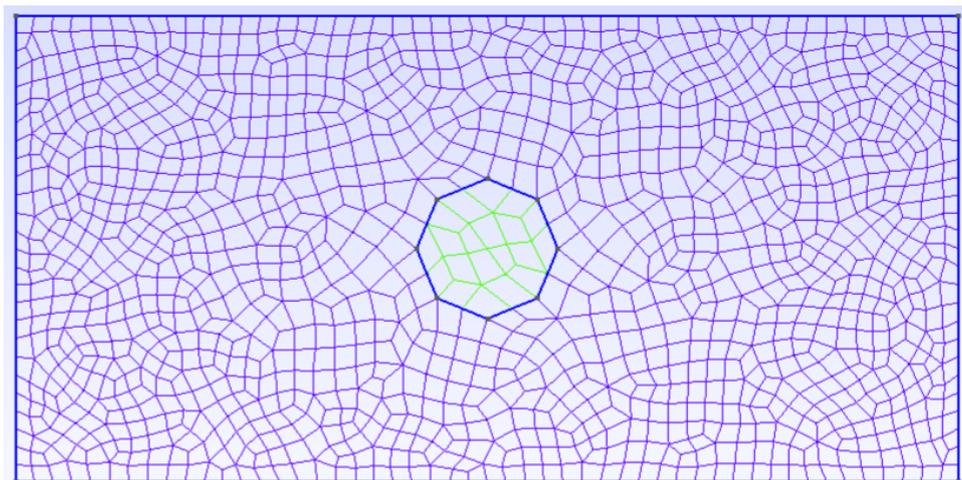


Figura 5- Domínio bidimensional $\Omega = [-2.0, 2.0] \times [-1.0, 1.0]$ gerado no software GMSH com malha não-estruturada de 1282 elementos

Este experimento numérico mostrou como a técnica p -adaptativa no SDHM-C e SDHM-D capta a diferença entre os materiais e amplia a ordem também de acordo com o tamanho do elemento.

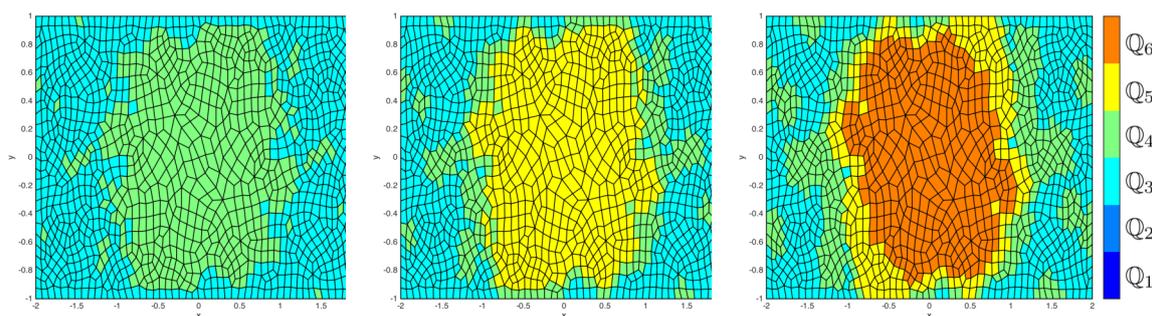


Figura 6- Três últimas iterações na evolução do processo p -adaptativo e mapa polinomial para o método SDHM-C em uma malha não-estruturada de 1282 elementos.

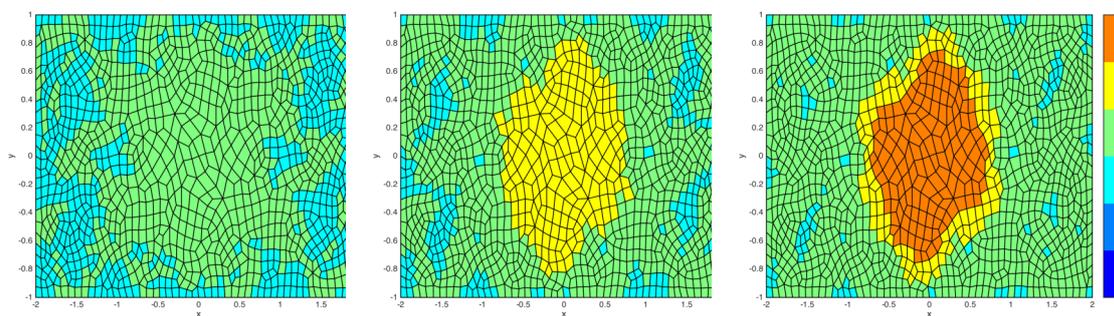


Figura 7- Três últimas iterações na evolução do processo p -adaptativo e mapa polinomial para o método SDHM-C em uma malha não-estruturada de 1282 elementos.

Os três mapas da aproximação com o SDHM-D, mostrado na Figura 7, estabelece uma configuração na distribuição dos graus de forma semelhante ao método SDHM-C. Entretanto,

existe uma melhor dissipação das ordens mais elevadas que com o SDHM-C. Com esta diferença entre os métodos, podemos extrair informações de forma mais refinada entre os métodos usados, isto é, como o último termo do indicador (19) mede o salto na interface dos elementos diferentemente.

6. CONCLUSÕES

Apresentamos neste trabalho um método elementos finitos misto híbrido estabilizado aliado a uma técnica p -adaptativa com duas opções de escolhas para os multiplicadores de Lagrange para resolver o problema de Darcy em meios heterogêneos. O uso de interpolações de alta ordem na forma adaptativa para capturar o comportamento do fluxo no meio poroso foi a abordagem principal. Sobre cada elemento e interface aplicamos bases lagrangeanas onde o grau do polinômio é escolhido através de um estimador de erro que leva em conta o cálculo do erro da aproximação nos elementos e nas arestas.

Realizamos uma série de estudos numéricos buscando comprovar a flexibilidade e precisão do método proposto e da estratégia p -adaptativa adotada. Os resultados foram obtidos utilizando malhas estruturadas e não-estruturadas. O comportamento do método híbrido com o algoritmo p -adaptativo empregando multiplicadores contínuos ou descontínuos se mostraram bastante semelhantes quando aplicados a malhas estruturadas. Porém, o método com multiplicador contínuo se mostrou menos custoso nesses casos.

Podemos concluir que o método SDHM p -adaptativo converge para o fenômeno fluxo em meios poroso. Além disso, se mostra robusto quando as interfaces são descontínuas e dependendo do multiplicador de Lagrange, o uso de interfaces contínuas pode ser uma boa alternativa para se obter uma boa precisão com menor custo computacional.

REFERÊNCIAS

- Chen, H., Salama, A., Sun, S., (2016), "Adaptive mixed finite element methods for Darcy flow in fractured porous media", *Water Resources Research*, 52(10), 7851-7868.
- Giorgiani, G., Fernández-Méndez, S., e Uerta, A. (2013), "Hybridizable discontinuous Galerkin p -adaptivity for wave propagation problems", *Int. J. Numer. Fluids*, 00,1-22.
- Correa, M.R., e Loula, A.F.P. (2008), "Unconditionally stable mixed finite element methods for Darcy flow", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197, 1525-1540.
- Núñez, Y. R., Faria, C. O., Loula, A. F. D., e Malta, S. M. C., (2012). "A mixed-hybrid finite element method applied to tracer injection processes". *International Journal of Modeling and Simulation for the Petroleum Industry*, 6(1),51-59.
- Igreja, I.H. (2015), "Métodos de Elementos Finitos Híbridos Estabilizados para Escoamentos de Stokes, Darcy e Stokes-Darcy Acoplados". Tese de doutorado.
- Igreja, I.H. e Loula, A.F.P. (2018), "A stabilized hybrid mixed DGFEM naturally coupling Stokes-Darcy flows", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 339, 739-768.
- Gopalakrishnan, J., Lanteri, S., Olivares, N., Perrussel, R. (2015). "Stabilization in relation to wavenumber in HDG methods", *Adv. Model ans Simul. in Eng. Sci.*, SpringerOpen Journal, 2:13.
- Cockburn B., Gopalakrishnan J., Lazarov R. (2009), "Unified hybridization of discontinuous Galerkin, mixed", and continuous Galerkin methods for second order elliptic problems. *SIAM J Numer Anal* 47(2):1319–1365.