

08 a 11 de Outubro de 2018  
Instituto Federal Fluminense  
Búzios - RJ

## ALTERNATIVA DE IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE CONDIÇÕES DE CONTORNO E MATRIZES DE ESTABILIDADE DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS TÉRMICOS EM MATERIAIS ISOTRÓPICOS NO SISTEMA CARTESIANO

**Sergio Cordero Calvimontes**<sup>1</sup> – sergio.cordero.calvimontes@hotmail.com

**Renan Franco Damasceno Lopes**<sup>1</sup> – renanfdlopes@gmail.com

<sup>1</sup> Universidade Federal Fluminense – Volta Redonda, RJ, Brasil

**Resumo.** *Existem problemas físicos cujo comportamento pode ser representado por equações de resolução complexa, ao idealizar estes problemas, objetivando uma modelagem matemática, é necessária a aplicação de métodos que permitam aproximações aceitáveis. O presente trabalho apresenta um método alternativo para a definição, montagem algébrica e visualização de dois itens vinculados com a resolução de problemas térmicos por meios computacionais. Normalmente, para casos uni e bidimensionais a resolução destes problemas é trivial, mas a complexidade aumenta na medida que se idealizam casos tridimensionais ou superiores. O método desenvolvido permite uma forma mais eficiente de determinar a estrutura e coeficientes das matrizes de estabilidade e vetores condição de contorno necessários para a resolução da Equação de Difusão pelo método de diferenças finitas.*

**Keywords:** *Diferenças finitas, Matriz de estabilidade, Vetor condição de contorno, Octave®.*

### 1. INTRODUÇÃO

O modelamento matemático consiste na representação de um sistema de fenômenos, neste caso fenômenos físicos, usando equações, algoritmos e relações lógicas. Quando o modelo matemático consegue reproduzir o comportamento do sistema com uma precisão aceitável, diz-se que o modelo simula o sistema de fenômenos, também conhecido como “processo”.

Normalmente os processos reais são tão complexos que é necessário aplicar técnicas e critérios de simplificação, mesmo assim, em muitos casos o equacionamento matemático e resolução de um modelo simplificado ainda continua sendo difícil de abordar. Por exemplo, existem equações diferenciais que representam processos reais simplificados (processos ideais), que não possuem solução analítica, sendo necessária a procura de métodos alternativos de solução. Isto é característico na abordagem matemática de problemas térmicos, onde é necessária a implementação de recursos computacionais para aproximação de soluções.

Existem ferramentas que permitem a manipulação de equacionamentos complexos, estas ferramentas são normalmente implementações de software que acondicionam uma sequência de técnicas com fundamentos matemáticos. No presente trabalho, se apresenta uma alternativa de implementação computacional no método das diferenças finitas em um problema térmico, para a definição computacional das condições de contorno e das matrizes de estabilidade. Pode-se ressaltar que a implementação alternativa sugerida aplica-se em qualquer sistema de coordenadas e é compatível com qualquer tipo de material, porém com fins práticos, limita-se o problema a um sistema carteciano e a um material de representação isotrópica.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Dado um problema de natureza térmica, a equação que representa este problema é a Equação de Difusão (Yunus A. Cengel, 2009), esta equação diferencial parabólica pode ser aplicada para o modelamento matemático de fenômenos como a própria difusão, algumas reações químicas e a condução de calor entre outros. A equação que representa a difusão de energia térmica através de um material é apresentada na Eq. (1):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -k_x(T) \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -k_y(T) \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -k_z(T) \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z} \right) + g_{(x,y,z,t)} = \rho_{(T)} C_{p(T)} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Os termos  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_z$  representam a condutividade térmica do material em cada eixo do  $\mathbb{R}^3$ , sendo estes variáveis dependentes da temperatura e idênticos em magnitude para o caso isotrópico. A equação pode ser catalogada como uma equação parcial linear de segunda ordem com coeficientes variáveis. O termo  $g$  e o termo forçante por unidade de volume. A densidade  $\rho_{(T)}$  e o calor específico  $C_{p(T)}$  também são variáveis dependentes da temperatura.

Adotando outro tipo de notação, onde o termo  $\bar{x}$  é um vetor coluna que contém os argumentos  $x$ ,  $y$  e  $z$  nesta ordem, pode-se obter a Eq. (2) apresentada a seguir:

$$\rho_{(T)} C_{p(T)} \frac{\partial T(\bar{x},t)}{\partial t} = g(\bar{x},t) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( -K_{(T)} \frac{\partial T(\bar{x},t)}{\partial \bar{x}} \right) \quad \leftarrow \quad G_{(t)} = \int_V g_{(x,t)} dV \quad (2)$$

O termo  $K_{(T)}$  é a condutividade térmica do material isotrópico e o termo forçante  $G_{(t)}$  pode ser expressado como a somatória de todos os termos forçantes por unidade de volume em toda a extensão do volume. Os termos forçantes podem representar fisicamente fontes calor, como por exemplo pontos de geração de calor interno por efeito Joule, ou representar sumidouros como por exemplo pontos que são dissipadores de calor.

É comum que nos problemas térmicos a Temperatura ( $T$ ) seja aplicada como variável independente, mas existem casos especiais onde a Energia Interna ( $U$ ) se torna o foco de análise. Segundo (Calvimontes, 2018), uma simples troca de variáveis pode ser aplicada para tornar o caso geral aplicável em ambos contextos. O raciocínio é resumido na Eq. (3) e (4) a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Temperatura:} \quad & \rho_{(A)} C_{p(A)} \frac{\partial}{\partial t} T(\bar{x},t) = g(\bar{x},t) + K_{(A)} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} T(\bar{x},t) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} T(\bar{x},t) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (K_{(A)}) \\ \text{Energia Interna:} \quad & I \frac{\partial}{\partial t} U(\bar{x},t) = g(\bar{x},t) + \eta_{(A)} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} U(\bar{x},t) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} U(\bar{x},t) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\eta_{(A)}) \\ \therefore \quad & A_{(x,t)} = \begin{Bmatrix} T(x,t) \\ U(x,t) \end{Bmatrix}; \quad D_{(A)} = \begin{Bmatrix} \rho_{(A)} C_{p(A)} \\ I \end{Bmatrix}; \quad C_{(A)} = \begin{Bmatrix} K_{(A)} \\ \eta_{(A)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{(A)} \\ \eta_{(A)} \end{Bmatrix} \rho_{(A)}^{-1} C_{p(A)}^{-1} \\ \text{Caso geral:} \quad & D_{(A)} \frac{\partial}{\partial t} A(\bar{x},t) = g(\bar{x},t) + C_{(A)} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} A(\bar{x},t) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} A(\bar{x},t) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (C_{(A)}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Condição de reciprocidade } U(\bar{x},t) \leftrightarrow T(\bar{x},t): \quad U_{(x,t)} = \int_0^T \rho_{(A)} C_{p(A)} dT \quad (4)$$

O termo  $\eta_{(A)}$  é conhecido como a Disfussividade térmica do material.

### 3. METODOLOGIA

A variável de monitoramento ( $A$ ) representa a Temperatura ou a Energia Interna num sistema contínuo. Aplicando o método das diferenças finitas esta variável representará, num sistema discreto, cada ponto no espaço e sua respectiva mudança no tempo. Para isto, se definem os contadores  $i \in [1, n]$ ,  $j \in [1, m]$ , e  $k \in [1, l]$  para os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente, todo valor próximo mas fora destes domínios deve ser considerado como condição de contorno. Os termos  $g$ ,  $D$  e  $C$  também sofrem a mesma discretização espacial do que  $A$ , a Eq. (5) detalha a aproximação dos termos contínuos por termos discretos usando diferenças finitas centralizadas. Na Eq. (6) se resume a substituição dos termos discretos na Eq. (3).

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} A(\bar{x}, t) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} A(\bar{x}, t)}{\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}} \cong \frac{\frac{\partial}{\partial y} A(\bar{x}, t)}{\frac{\partial \bar{x}}{\partial y}} \cong \frac{\frac{\partial}{\partial z} A(\bar{x}, t)}{\frac{\partial \bar{x}}{\partial z}} \cong \frac{\frac{\partial}{\partial x} A(\bar{x}, t)}{\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}} \cong \frac{\partial}{\partial x} A(\bar{x}, t) \cong \frac{\partial}{\partial y} A(\bar{x}, t) \cong \frac{\partial}{\partial z} A(\bar{x}, t) \quad (5)$$

$$D_{(t)j} \frac{d}{dt} A_{(t)j} = g_{(t)j} + \text{Termos Lineares (TL)} + \text{Termos Não Lineares (TNL)} \quad (6)$$

Onde:

$$TL = C_{(t)j} \left( \frac{A_{(t)j}^{i+1} - 2A_{(t)j}^i + A_{(t)j}^{i-1}}{\Delta x^2} + \frac{A_{(t)j}^i - 2A_{(t)j}^j + A_{(t)j}^{j-1}}{\Delta y^2} + \frac{A_{(t)j}^i - 2A_{(t)j}^k + A_{(t)j}^{k-1}}{\Delta z^2} \right);$$

$$TNL = \frac{(A_{(t)j}^{i+1} - A_{(t)j}^{i-1})(C_{(t)j}^{i+1} - C_{(t)j}^{i-1})}{4\Delta x^2} + \frac{(A_{(t)j}^i - A_{(t)j}^{j-1})(C_{(t)j}^{j+1} - C_{(t)j}^{j-1})}{4\Delta y^2} + \frac{(A_{(t)j}^i - A_{(t)j}^{k-1})(C_{(t)j}^{k+1} - C_{(t)j}^{k-1})}{4\Delta z^2}$$

Existem casos especiais onde as diferenças finitas  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  possuem uma magnitude variável no tempo ou no mesmo espaço, gerando malhas mais finas em regiões críticas. No problema matemático a ser abordado, estas distâncias são constantes e não necessariamente iguais uma da outra. Os termos lineares (TL) da Eq. (6) exemplificam a aplicação do método de diferenças finitas de valor centrado. Adicionalmente, se as variáveis dependentes da temperatura fossem um valor constante, note-se que os termos não lineares (TNL) seriam anulados. É necessário ressaltar que a Eq. (6) representa um sistema de equações ordinárias lineares. Aplicando uma discretização no tempo nesta equação, tem-se a Eq. (7) a seguir:

Para:  $p = \begin{cases} n & \rightarrow \text{caso 1D} \\ mn & \rightarrow \text{caso 2D} \\ lmn & \rightarrow \text{caso 3D} \end{cases}; q = \begin{cases} i & \rightarrow \text{caso 1D} \\ i, j & \rightarrow \text{caso 2D} \\ i, j, k & \rightarrow \text{caso 3D} \end{cases}; \frac{d}{dt} A_{(t)q_{p \times 1}} \approx \frac{A_{(t+\Delta t)q_{p \times 1}} - A_{(t)q_{p \times 1}}}{\Delta t}$

$$\therefore A_{(t+\Delta t)q_{p \times 1}} \approx \Delta t \left( I_{p \times p} \cdot D_{(t)q_{p \times 1}} \right)_{p \times p}^{-1} \left( g_{(t)q} + TL_q + TNL_q \right)_{p \times 1} + A_{(t)q_{p \times 1}} \quad (7)$$

Na Eq. (7) pode-se perceber que um valor futuro da variável de monitoramento ( $A_{(t+\Delta t)}$ ) pode ser calculado adicionando ou subtraindo uma certa quantidade a um valor atual ( $A_{(t)}$ ). Esta quantidade em questão deve ser estimada pelo modelo matemático que venha a ser aplicado. O procedimento inverso pode ser realizado, calculando um valor anterior da variável de monitoramento ( $A_{(t-\Delta t)}$ ) baseado num valor atual ( $A_{(t)}$ ), é conhecido como problema inverso ( $-\Delta t$ ), o qual pode ser aplicado como alternativa de solução, porém a resolução se baseia no problema direto ( $+\Delta t$ ). Os índices  $p$  e  $q$  são aplicados para ajudar na simplificação da notação.

É necessário ressaltar que o termo  $I$  é a matriz identidade, cuja única função na Eq. (7) é diagonalizar o vetor  $D$  através de um produto escalar. O mesmo resultado se obtém usando funções de diagonalização próprias da plataforma de programação (ex: `diag()` no Octave®).

Os termos lineares e não lineares apresentados na Eq. (7) devem ser modificados para serem implementados num algoritmo. Esta modificação, que no fundo é uma manipulação algébrica, pode ser feita para o caso unidimensional, a complexidade aumenta para o caso bidimensional, e no caso tridimensional a modificação manual torna-se impraticável, por causa da grande quantidade de termos. A seguir, se apresenta um método alternativo semi-automatizado para a manipulação algébrica da Eq. (7), não necessariamente restrito a três dimensões, posteriormente se apresenta a implementação computacional do algoritmo.

### 3.1 Manipulação algébrica

O método consiste nos seguintes passos: Montar uma tabela para visualização do comportamento dos contadores, e assim identificar as condições de contorno; Projetar a tabela perpendicularmente para assim identificar as matrizes dos termos lineares e não lineares.

**Comportamento dos contadores.** Na Eq. (6) apresentada anteriormente, percebe-se que algumas características padrão não mudam conforme o número de dimensões do sistema. Os padrões que mais ressaltam são os termos vinculados às condições de contorno para os  $TL$  e os  $TNL$ . Estes termos de condição de contorno surgem somente no início e no final do ciclo do contador ( $k$  embutido em  $j$ ,  $j$  embutido em  $i$ ). Para visualizar melhor o comportamento destes padrões, se constrói uma tabela e se sugere usar o software comercial Microsoft Excel®, conforme o modelo da Tabela 1. Posteriormente se apresenta a Fig. 1 que ilustra o raciocínio:

Tabela 1 – Tabela modelo para inferência da estrutura dos vetores condição de contorno

$i$	$j$	$k$	$A_{j,k}^{(t)i+1}$			$-2A_{j,k}^{(t)i}$			$A_{j,k}^{(t)i-1}$			$A_{j+1,k}^{(t)i}$			$-2A_{j,k}^{(t)i}$			$A_{j-1,k}^{(t)i}$			$A_{j,k+1}^{(t)i}$			$-2A_{j,k}^{(t)i}$			$A_{j,k-1}^{(t)i}$					
1	1	1	2	1	1	1	1	1	0	1	1	...																				
1	1	2	2	1	2	1	1	2	0	1	2	...																				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$m$	$l$																														

Figura 1 – Indicação de padrões nos valores subscritos dos contadores nos  $TL$  e  $TNL$ .



Implementando a Tabela 1 no Microsoft Excel®, e aplicando algumas modificações para uma melhor visualização tem-se a Fig. 2 (para  $m = 5$ ,  $n = 5$  e  $l = 5$ ):

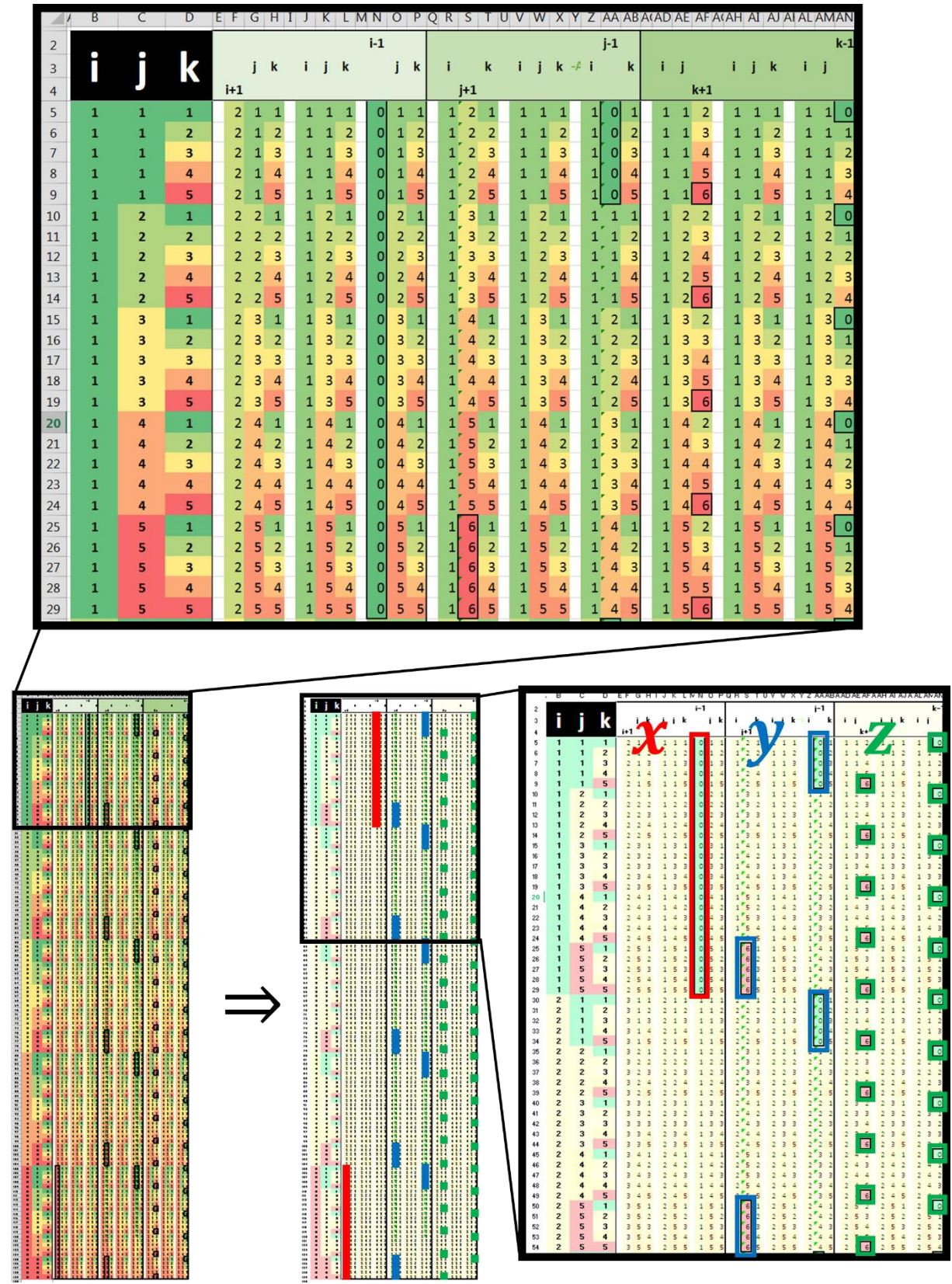


Figura 2 – Implementação da tabela modelo, para  $n = 5$ ,  $m = 5$ , e  $l = 5$ .

Na Fig. 2, no canto esquerdo inferior tem-se a tabela modelo completa com as 125 linhas ( $i \times j \times k = 5 \times 5 \times 5 = 125$ ). Para uma melhor visualização do comportamento dos contadores, se estabeleceu um gradiente na cor das células segundo o valor contido: 1 = ■, 2 = ■, 3 = ■, 4 = ■, 5 = ■; desta forma facilita-se a visualização dos ciclos embutidos. No canto inferior direito, pode-se observar a formação intercalada dos valores das condições de contorno segundo os eixos:  $x: 0]1,5[6$ ;  $y: 0]1,5[6$ ; e  $z: 0]1,5[6$  (valores fora do domínio de cada contador). Deve-se ressaltar que no modelamento matemático, o domínio dos contadores pode ser diferente para cada eixo (dimensão). Fazendo uma analogia entre todos os casos possíveis, é necessário definir os seguintes termos:  $\Phi$  que representa os vetores condição de contorno dos termos lineares segundo cada eixo, e  $\Psi$  que representa os vetores condição de contorno dos termos não lineares segundo cada eixo. Logo, podem-se fazer as seguintes inferências:

- Caso 1D, Fig. 3:

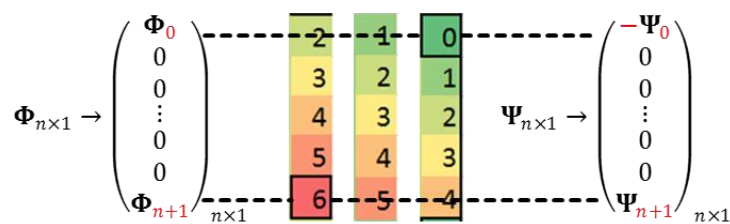


Figura 3 – Identificação dos vetores condição de contorno, caso unidimensional

Assim como se mencionou anteriormente, os termos dos vetores condição de contorno estão definidos somente para o valor inicial ( $i = 0$ ) e o valor final ( $i = n + 1$ ).

- Caso 2D, Fig. 4:

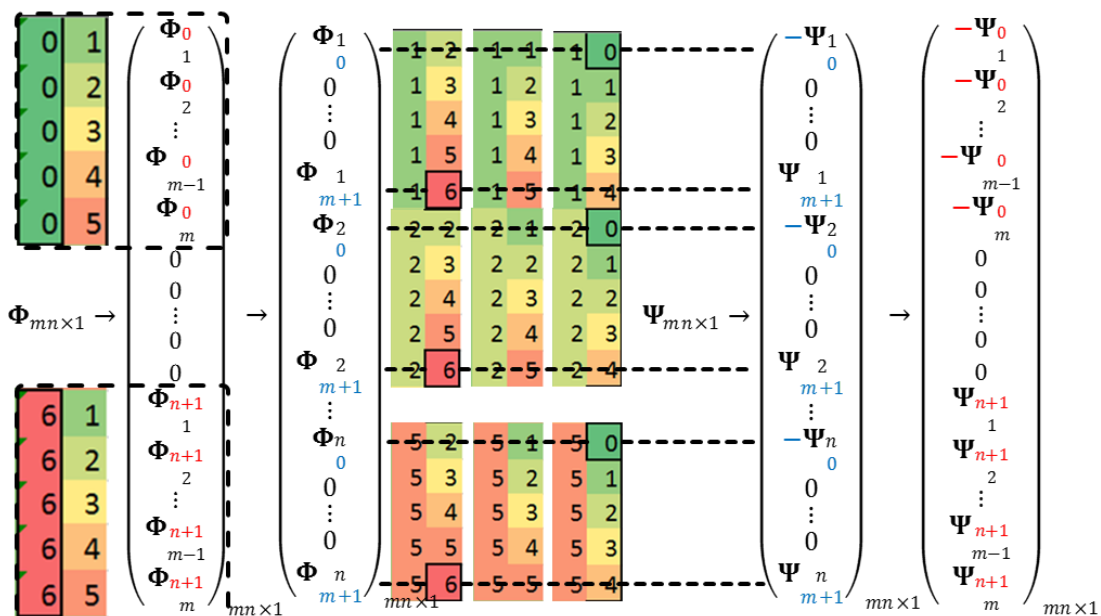


Figura 4 – Identificação dos vetores condição de contorno, caso bidimensional

Pode-se notar que a diferença entre  $\Phi$  e  $\Psi$  está simplesmente no sinal (-) nos primeiros termos de cada ciclo. Para o caso 3D, por simplicidade, somente se apresentará  $\Phi$ .

• Caso 3D, Fig. 5:

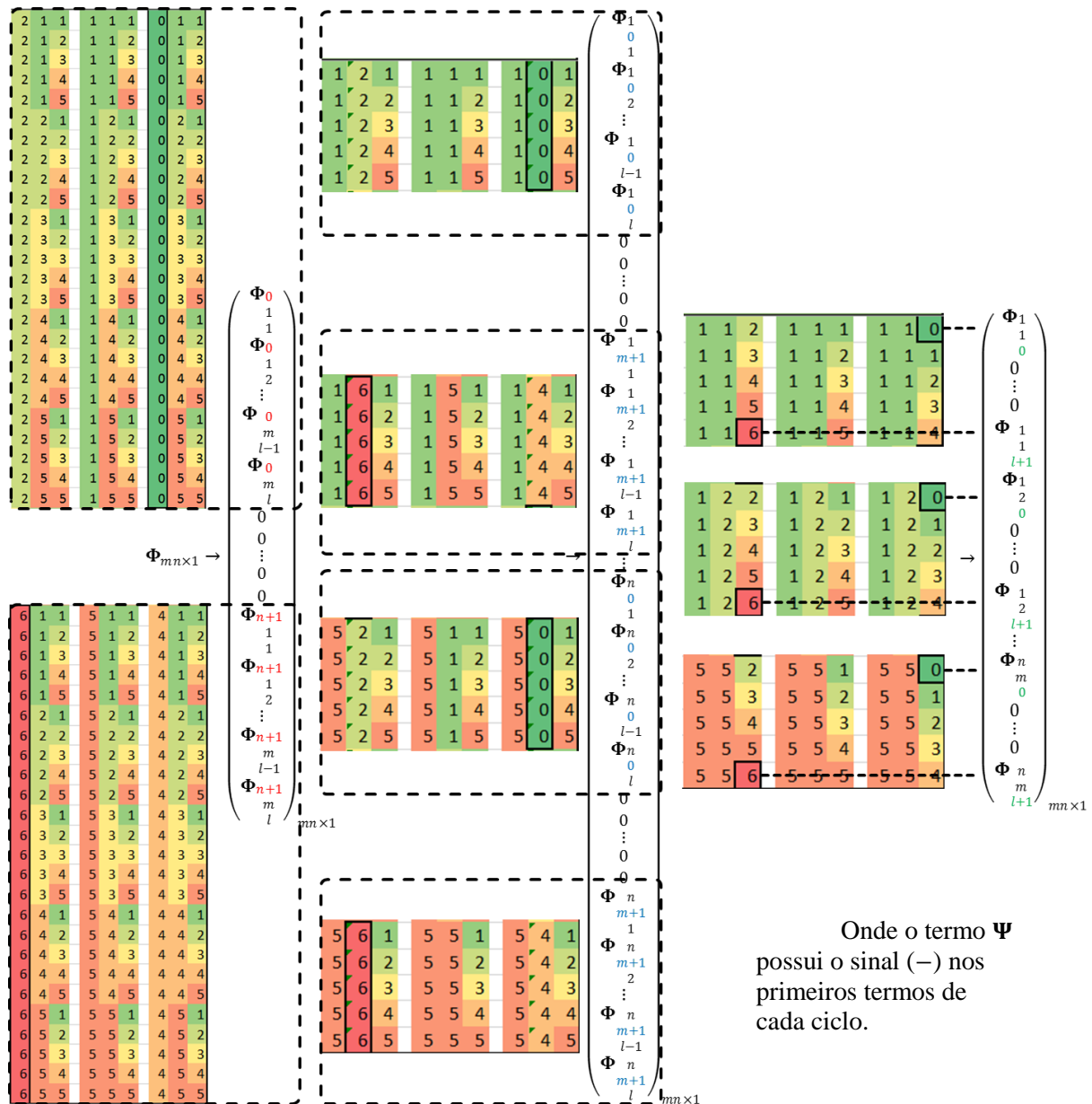


Figura 5 – Identificação dos vetores condição de contorno (somente termos lineares), caso tridimensional

Onde o termo  $\Psi$  possui o sinal (-) nos primeiros termos de cada ciclo.

**Projeção perpendicular da tabela modelo.** O método para visualização e determinação da estrutura dos vetores condição de contorno apresentado anteriormente é prático no caso de dimensões superiores (mesmo estas não tendo ainda uma interpretação física), porém para o caso da visualização e determinação das matrizes de estabilidade dos  $TL$  e  $TNL$  é necessária uma extensão deste método. O objetivo é determinar os coeficientes e suas respectivas posições nas matrizes, conhecidas como matriz  $V$  para os termos lineares e  $W$  para os termos não lineares. Se trabalha com uma extensão da Tabela 1 apresentada anteriormente, com uma projeção perpendicular dos contadores  $i, j$  e  $k$ , como se mostra na Tabela 2 a seguir:



Tabela 2 – Projeção perpendicular da tabela modelo.

$i$	$j$	$k$	$A_{(t)}^{i+1}$		$-2A_{(t)}^i$		$A_{(t)}^{i-1}$		$A_{(t)}^i$		$-2A_{(t)}^i$		$A_{(t)}^i$		$-2A_{(t)}^i$		$A_{(t)}^i$		$i$	$1$	$1$	...	$n$	
			$j$	$k$	$j$	$k$	$j$	$k$	$j$	$k$	$j$	$k$	$j$	$k$	$j$	$k$	$j$	$k$						$j$
1	1	1	2	1	1	1	1	1	0	1	1	...												
1	1	2	2	1	2	1	1	2	0	1	2	...												
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮												
$n$	$m$	$l$																						

Por causa da projeção, uma matriz (na cor ‘laranja’ na Tabela 2) é formada. O objetivo é que esta matriz contenha os valores dos coeficientes das matrizes de estabilidade  $V$  e  $W$ .

Para o caso 1D, cujas matrizes são manualmente simples de construir, pode-se notar que a matriz  $V$  é uma matriz tri-diagonal quadrada cujos coeficientes são herdados dos termos lineares. A matriz  $W$  é também uma matriz tri-diagonal quadrada cujos coeficientes são herdados dos termos não lineares, porém com os coeficientes da diagonal principal todos nulos. A inferência é a seguinte: Quando o identificador das colunas é igual ao identificador das linhas, o coeficiente contido é igual ao coeficiente do valor centrado no contador ( $-2$ ) e quando a diferença entre o valor do identificador das colunas e o valor do identificador das linhas é maior que a unidade, então o valor da célula é nulo ( $0$ ); o restante das células contém valores iguais a uma unidade ( $1$ ). De um modo semelhante se estabelece uma inferência sobre os coeficientes das matrizes para dimensões superiores. O desenvolvimento do algoritmo, baseado na observação dos padrões destas matrizes, permite preencher a matriz ‘laranja’ da Tabela 2. O raciocínio é apresentado a seguir:

- A triada  $i, j$  e  $k$ , dentro da sua evolução segundo o ciclo embutido, serve para a identificação das células das matrizes a preencher. Sabendo que uma triada pode gerar  $lmn$  combinações diferentes; as matrizes a preencher têm dimensão  $lmn \times lmn$ , logo, são necessárias duas triadas. Este processo de identificação é análogo à inferência exposta no parágrafo anterior (identificadores de linhas e colunas). Pode-se definir um valor **Ponteiro**(#linha, #coluna), específico para cada célula da matriz a preencher, onde o argumento #linha corresponde à primeira triada de evolução vertical dos contadores  $i, j$  e  $k$  apresentados na Tabela 1; e o argumento #coluna corresponde à segunda triada de evolução horizontal dos mesmos contadores, mostrados na Tabela 2 como “projeção perpendicular”. Então, o valor **Ponteiro** pode representar  $lmn \times lmn$  valores diferentes, cada um específico e referente a uma célula das matrizes a preencher.
- Para cada eixo do sistema, nos  $TL$  tem-se uma fração com três termos no numerador, e nos  $TNL$  tem-se duas frações (uma para  $A_{(t)}$  e outra para  $C_{(t)}$ ) com numeradores que contém a diferença dos dois termos, note-se que para  $A_{(t)}$  ou  $C_{(t)}$  usa-se a mesma matriz  $W$ , ou seja, somente um deles será analisado, sendo o procedimento idêntico para ambos os termos. Sem isolamento dos denominadores  $\Delta x^2$  e  $4\Delta x^2$  para o caso 1D;  $\Delta x^2, 4\Delta x^2, \Delta y^2$  e  $4\Delta y^2$  para o caso 2D; e  $\Delta x^2, 4\Delta x^2, \Delta y^2, 4\Delta y^2, \Delta z^2$  e  $4\Delta z^2$  para o caso 3D, para os numeradores têm-se que:
  - O primeiros termos possuem o coeficiente 1; estes serão definidos como **Coefficientes Adiantados**, pois sempre têm um dos contadores adiantado.
  - Os últimos termos possuem coeficientes 1 e  $-1$  para o caso linear e não linear respectivamente, estes serão definidos como **Coefficientes Atrasados**, pois sempre têm um dos contadores atrasado.
  - Só no caso linear que o segundo termo possui o coeficiente  $-2$ ; o qual pode ser definido como **Coefficiente Centralizado**.



- Analisando os índices gerados pela Tabela 1, pode se perceber que o seguinte fato é independente do número de eixos (dimensões) do problema:
  - A triada dos índices do termo determina o argumento *#coluna*, sendo que esta triada é consequência do adiantamento, centralização ou atraso de um argumento *#linha*.
  - Considerando uma matriz inicial nula com dimensões  $lmn \times lmn$ , o coeficiente correspondente a triada de índices, deve ser adicionado ao valor já contido na célula denominada **Ponteiro**(*#linha*, *#coluna*) pertencente a esta matriz.
  - Nota-se que os termos lineares contribuirão com coeficientes 1 ou  $-2$  (vinculados a diferentes denominadores) e os termos não lineares contribuirão com 1 e  $-1$ .

### 3.2 Implementação do algoritmo

O raciocínio descrito anteriormente é implementado na forma de algoritmo usando uma tabela feita no software comercial Microsoft Excel<sup>1</sup>. A Fig. 6 e 7, a seguir, exemplificam a implementação do algoritmo:



Figura 6 – Implementação do algoritmo de determinação da matriz de estabilidade *V*

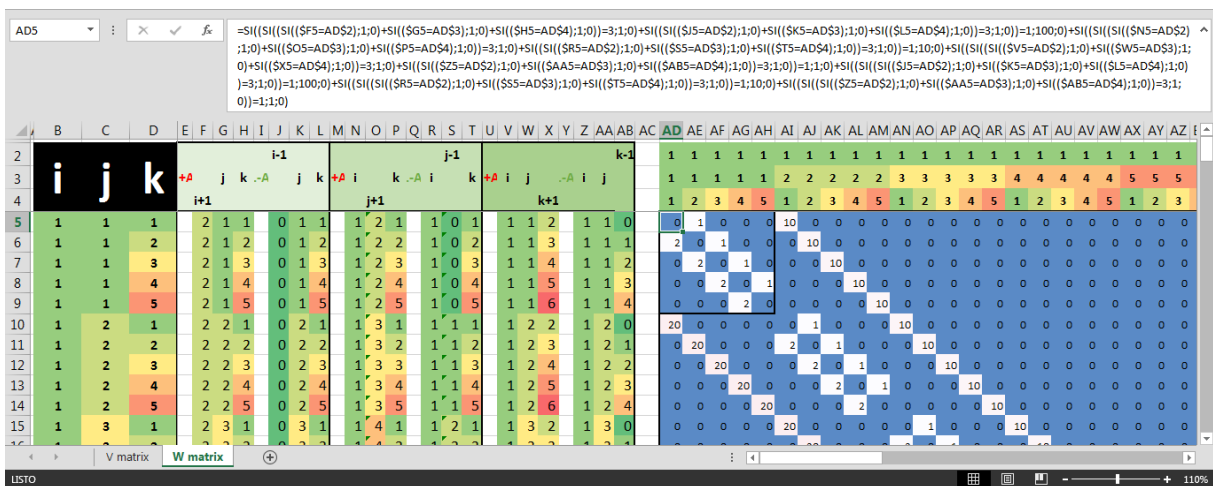


Figura 7 – Implementação do algoritmo de determinação da matriz de estabilidade *W*

<sup>1</sup> O Microsoft Excel<sup>®</sup> das figuras está em espanhol. Para versões em inglês deve-se substituir o SI pelo IF.  
 Anais do XXI ENMC – Encontro Nacional de Modelagem Computacional e IX ECTM – Encontro de Ciências e Tecnologia de Materiais.  
 Búzios, RJ – 08 a 11 Outubro 2018

Para poder ressaltar a visualização das matrizes de estabilidade na tabela do programa e na Fig. 6 e 7, se atribui valores simbólicos em relação aos valores dos coeficientes. A Tabela 3 resume estas equivalências para os casos uni, bi e tridimensional:

Tabela 3 – Projecção perpendicular da tabela modelo.

Valores Simbólicos:	Matriz de estabilidade $V$				Matriz de estabilidade $W$					
	1	10	100	111	1	2	10	20	100	200
<b>Caso 3D:</b>	$\frac{1}{\Delta z^2}$	$\frac{1}{\Delta y^2}$	$\frac{1}{\Delta x^2}$	$\frac{-2}{\Delta x^2} + \frac{-2}{\Delta y^2} + \frac{-2}{\Delta z^2}$	$\frac{1}{4\Delta z^2}$	$\frac{-1}{4\Delta z^2}$	$\frac{1}{4\Delta y^2}$	$\frac{-1}{4\Delta y^2}$	$\frac{1}{4\Delta x^2}$	$\frac{-1}{4\Delta x^2}$
<b>Caso 2D:</b>	$\frac{1}{\Delta y^2}$	$\frac{1}{\Delta x^2}$	0	$\frac{-2}{\Delta x^2} + \frac{-2}{\Delta y^2} + 0$	$\frac{1}{4\Delta y^2}$	$\frac{-1}{4\Delta y^2}$	$\frac{1}{4\Delta x^2}$	$\frac{-1}{4\Delta x^2}$	0	0
<b>Caso 1D:</b>	$\frac{1}{\Delta x^2}$	0	0	$\frac{-2}{\Delta x^2} + 0 + 0$	$\frac{1}{4\Delta x^2}$	$\frac{-1}{4\Delta x^2}$	0	0	0	0

## 4. RESULTADOS

A abordagem deste trabalho permite a definição e visualização dos vetores condição de contorno e das matrizes de estabilidade para qualquer dimensão do sistema a ser analisado. Conhecendo a estrutura e aplicação algébrica de ambos os itens é possível uma implementação computacional, objetivando facilitar a montagem destes num código destinado para modelamento matemático. Para citar um exemplo, se mostra uma linha de código na plataforma Octave®, para o caso unidimensional, que permite a montagem das matrizes  $V$  e  $W$  dada a quantidade de elementos finitos  $n$ :

```
>V=(zeros(n,n)+(-2)*eye(n)+diag(ones(n-1,1),1)+diag(ones(n-1,1),-1));
>W=(zeros(n,n)+diag(ones(n-1,1),1)-diag(ones(n-1,1),-1));
```

De uma maneira semelhante se pode proceder com dimensões superiores. O APÊNDICE A, no final deste documento, apresenta os resultados alcançados.

## 5. CONCLUSÃO

Pode-se perceber a grande utilidade dos recursos computacionais na resolução de problemas numéricos. O conhecimento da estrutura e propriedades algébricas dos termos a serem implementados computacionalmente em algum tipo de modelamento matemático, permitem o uso e otimização de algoritmos, objetivando códigos mais eficientes e rotinas de resolução com menor tempo computacional. O método alternativo apresentado neste trabalho permite visualizar desde um ponto de vista diferente a montagem algébrica dos termos envolvidos numa equação de governo.

## 6. TRABALHOS FUTUROS

O desenvolvimento desta pesquisa faz parte de um processo de re-engenharia de modelos matemáticos para problemas térmicos. Em futuros trabalhos pretende-se implementar computacionalmente a Eq. (7) aplicando os resultados alcançados neste trabalho.

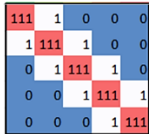
## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Calvimontes, S. C. (Julho de 2018). Modelamento matemático do perfil de temperatura no processo de solda Flash-Butt nos aços DP600. *Dissertação de Mestrado*. Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil: Universidade Federal Fluminense.
- Yunus A. Cengel. (2009). *Heat Transfer; A Practical Approach*. Reno: University of Nevada.

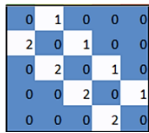
## APÊNDICE A

A seguir, se apresenta os resultados alcançados pela implementação do método alternativo:

- Caso 1D, Fig. 8:

$$V_{n \times n} \rightarrow n = 5 \quad \dots \quad 111 = \frac{-2}{\Delta x^2}; 1 = \frac{1}{\Delta x^2}$$


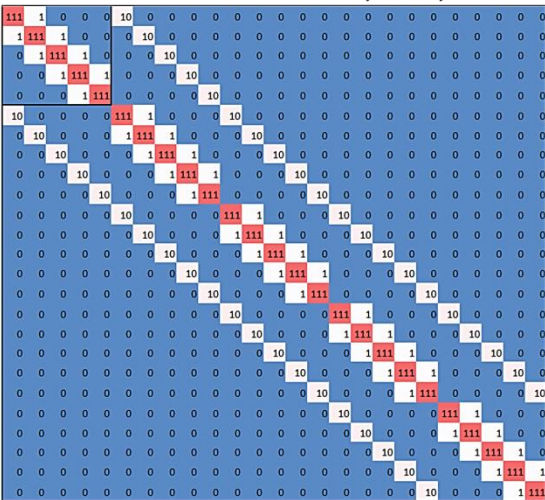
$$V_{n \times n} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{n \times n}$$
  

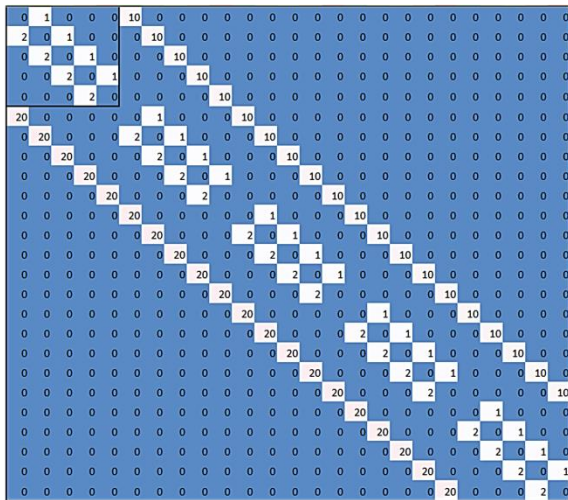
$$W_{n \times n} \rightarrow n = 5 \quad \dots \quad 1 = \frac{1}{4\Delta x^2}; 2 = \frac{-1}{4\Delta x^2}$$


$$W_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Figura 8 –Matrizes dos termos lineares  $V$  e não lineares  $W$ , caso unidimensional

- Caso 2D, Fig. 9:

$$V_{m \times m \times m \times m} \rightarrow m = 5, n = 5 \quad \dots \quad 1111 = -\frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2}; 1 = \frac{1}{\Delta y^2}; 10 = \frac{1}{\Delta x^2}$$


$$W_{m \times m \times m \times m} \rightarrow m = 5, n = 5 \quad \dots \quad 1 = \frac{1}{4\Delta x^2}; 2 = \frac{-1}{4\Delta y^2}; 10 = \frac{1}{4\Delta x^2}; 20 = \frac{-1}{4\Delta x^2}$$

  

$$V_{m \times m \times m \times m} = \frac{Vx_{m \times m \times m \times m}}{\Delta x^2} + \frac{Vy_{m \times m \times m \times m}}{\Delta y^2}$$

$$Vx_{m \times m \times m \times m} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & -2 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & -2 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & 1 & 0 & \dots & -2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 & -2 \end{bmatrix}_{m \times m \times m \times m}$$

$$Vy_{m \times m \times m \times m} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & -2 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times m \times m \times m}$$
  

$$W_{m \times m \times m \times m} = \frac{Wx_{m \times m \times m \times m}}{4\Delta x^2} + \frac{Wy_{m \times m \times m \times m}}{4\Delta y^2}$$

$$Wx_{m \times m \times m \times m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -1 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times m \times m \times m}$$

$$Wy_{m \times m \times m \times m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{m \times m \times m \times m}$$

Figura 9 –Matrizes dos termos lineares  $V$  e não lineares  $W$ , caso bidimensional



- Caso 3D Termos lineares, Fig. 10:

$$\mathbf{V}\mathbf{x}_{lmn \times lmn} + \mathbf{V}\mathbf{y}_{lmn \times lmn} + \mathbf{V}\mathbf{z}_{lmn \times lmn} = \mathbf{V}_{lmn \times lmn}$$

$$l = 5, m = 5, n = 5$$

$$111 = \frac{-2}{\Delta x^2} + \frac{-2}{\Delta y^2} + \frac{-2}{\Delta z^2}; 1 = \frac{1}{\Delta z^2}; 10 = \frac{1}{\Delta y^2}; 100 = \frac{1}{\Delta x^2}$$

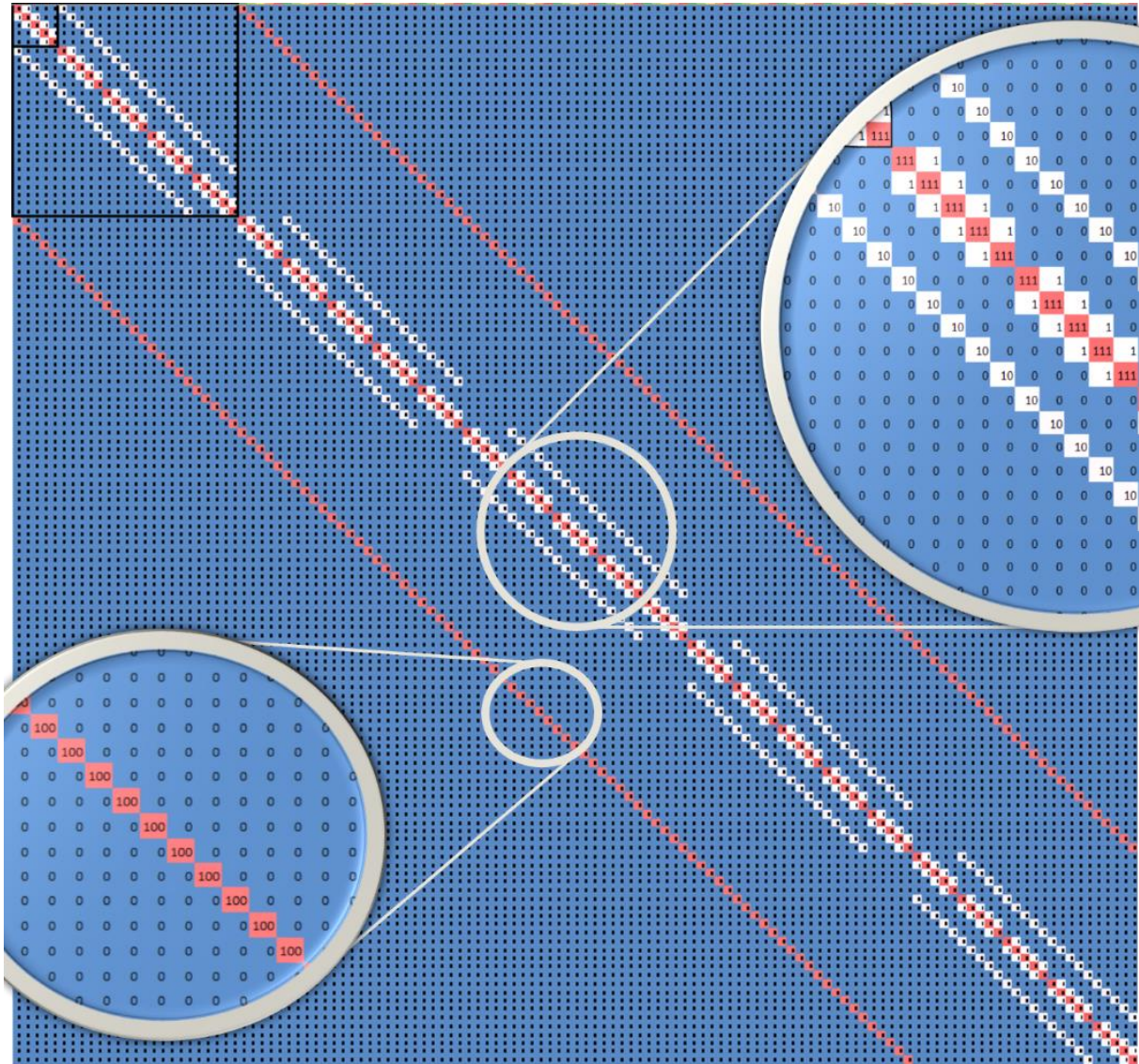


Figura 10 – Matrizes dos termos lineares  $\mathbf{V}$ , caso tridimensional

Nota-se que desta forma a compatibilidade entre os casos uni, bi e tridimensional é satisfatoriamente mantida, a tal ponto que as matrizes de dimensões superiores contém as matrizes de dimensões inferiores. Este padrão se repete para todas as dimensões superiores.



- Caso 3D Termos não lineares, Fig. 11:

$$\mathbf{W}\mathbf{x}_{lmn \times lmn} + \mathbf{W}\mathbf{y}_{lmn \times lmn} + \mathbf{W}\mathbf{z}_{lmn \times lmn} = \mathbf{W}_{lmn \times lmn}$$

$$l = 5, m = 5, n = 5$$

$$1 = \frac{1}{4\Delta z^2}; 2 = \frac{-1}{4\Delta z^2}; 10 = \frac{1}{4\Delta y^2}; 20 = \frac{-1}{4\Delta y^2}; 100 = \frac{1}{4\Delta x^2}; 200 = \frac{-1}{4\Delta x^2}$$

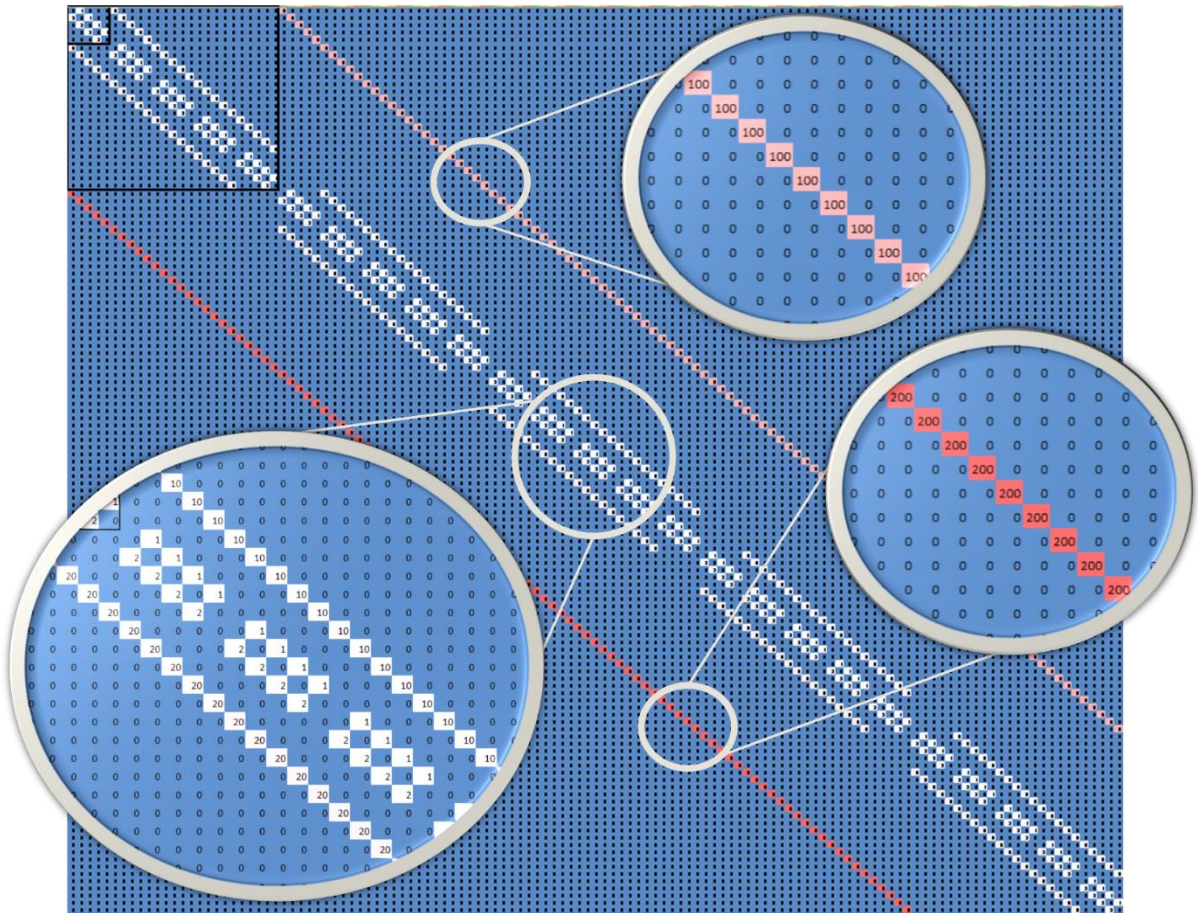


Figura 11 –Matrizes dos termos não lineares  $\mathbf{W}$ , caso tridimensional

## STABILITY MATRIX AND BOUNDARY CONDITION COMPUTATIONAL IMPLEMENTATION ALTERNATIVE TO THE FINITE DIFFERENCES METHOD FOR CARTESIAN THERMAL PROBLEMS RESOLUTION INVOLVING ISOTROPIC MATERIALS

**Sergio Cordero Calvimontes**<sup>1</sup> – sergio.cordero.calvimontes@hotmail.com

**Renan Franco Damasceno Lopes**<sup>1</sup> – renanfdlopes@gmail.com

<sup>1</sup> Universidade Federal Fluminense – Volta Redonda, RJ, Brasil

**Abstract.** *Complex resolution equations can represent some physical problems; when idealizing these problems; in order to apply a mathematical modelling, it is necessary to apply alternative methods, which allow acceptable approximations. This work presents an alternative method to define, algebraically mount and visualize two items vinculated with thermal problems resolution by computational tools. Actually, for mono and bidimensional cases, the resolution is trivial, but when tri or higher dimensions are idealized, the problem is much more complex. The developed method allows a relatively easy way to determine the structure and coefficients of stability matrix and boundary condition vectors, needed for the Diffusion Equation resolution using the finite element method.*

**Keywords:** *Finite Differences, Stability Matrix, Boundary Condition Vector, Octave®.*