XXI ENMC
ENCONTRO NACIONAL DE MODELAGEM COMPUTACIONAL
IX ECTM
ENCONTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS

08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO DO CALOR EM UMA CHAPA BIDIMENSIONAL ATRAVÉS DE SÉRIES DE FOURIER

Joedson Pimentel Pereira[1] – joedson.pereira96@gmail.com
Henrique Matheus Ferreira da Silva[2] – ferreirasilva_matheus@hotmail.com
Josecley Fialho Góes[3] – cleymat@gmail.com
[1] Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Engenharia e Geociências – Santarém, PA, Brasil
[2] Universidade Federal do Oeste do Pará, Laboratório de Inteligência Computacional – Santarém, PA, Brasil
[3] Universidade Federal do Oeste do Pará, Laboratório de Modelagem Computacional – Santarém, PA, Brasil

Resumo. *A transferência de calor é um fenômeno frequentemente encontrado dentro da engenharia, uma vez que ocorre em diversas situações, como trocadores de calor, aquecedores, fornos, dentre outros. Tal fenômeno pode ser descrito através de equações diferenciais as quais podem vir a serem complexas para se resolver por métodos comuns, com isto, as séries de Fourier vieram a ser uma importante ferramenta nesse tipo de abordagem. O presente trabalho tem como objetivo apresentar aplicações práticas do método das séries de Fourier, considerando uma chapa quadrada bidimensional com diferentes condições de contorno. As soluções foram encontradas de forma analítica e os resultados apresentados obtiveram comportamento desejado.*

Palavras-chave: *Transferência de Calor, Equações Diferenciais, Séries de Fourier.*

1. INTRODUÇÃO

Matématico e físico francês, Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), teve fundamental importância no estudo de fenômenos periódicos, os quais ocorrem frequentemente dentro de diferentes áreas da ciência. Pode-se apontar, como principal contribuição de Fourier, seus estudos referentes à transferência de calor em corpos sólidos, em especial, a publicação, em Paris, do seu trabalho entitulado *Theórie Analytique de La Chaleur* (1822), onde ele deduziu a equação do calor por meio de equações diferenciais parciais, desenvolveu a solução através de séries trigonométricas e, embora tenha ignorado qualquer hipótese acerca da natureza do calor, descreveu um modelo físico para explicar a propagação do calor (Oliveira, 2016). A partir deste trabalho desenvolvido por Fourier, estudos que envolviam fenômenos periódicos passaram a ter uma nova ferramenta de resolução, tendo em vista a complexidade das funções vinculadas a tais fenômenos.

Dentro da engenharia, o trabalho de Fourier é amplamente aplicado, uma vez que a transferência de calor está presente em diversas situações, como, por exemplo, fornos, caldeiras, coletores de energia solar, conforto térmico, dentre outros; e, ao deparar-se com um problema dessa natureza, encontra-se equações que envolvem derivadas parciais, conhecidas como equações diferenciais. Através de conceitos físicos, é possível verificar que a condução de calor em uma barra, de comprimento *L*, representada pela função $u(x,t)$, que satisfaz a propriedade $u_t = Ku_{xx}$, onde *K* é a constante da difusibilidade do material da barra (Souto, 2015). Além de satisfazer às equações diferenciais, a solução deve também satisfazer a algumas condições chamadas condições iniciais e condições de contorno.

No presente trabalho, buscou-se aplicar o método das séries de Fourier na equação do calor em um corpo bidimensional, definindo-se as condições necessárias para encontrar a função temperatura, para, em seguida, fazer-se a plotagem dos gráficos, com auxílio de ferramenta computacional.

2. SÉRIES DE FOURIER

As séries de Fourier são um importante método de resolução de equações diferenciais, tanto ordinárias quanto parciais, e também quando lida-se com funções periódicas. Ao abordar-se aplicações, encontra-se diversas situações que podem ser descritas matematicamente através dessas últimas. Em Kreyszig (2009), define-se que uma função $f(x)$ é chamada função periódica se $f(x)$ for definida para todo x real e se existir algum número p positivo, denominado período de $f(x)$, tal que

$$f(x) = f(x+p) \tag{1}$$

Funções senoidais são as mais conhecidas que apresentam essa característica. Quando as funções senoidais possuem período igual a 2π, denomina-se sistema trigonométrico, e, ao trabalhar-se com quaisquer funções $f(x)$ que tenham esse mesmo período, pode-se representá-las como uma série trigonométrica, da seguinte forma

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \dots + b_1\text{sen}x + b_2\text{sen}2x + \dots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\text{sen}nx) \end{aligned} \tag{2}$$

onde, a_0, a_1, a_2, b_1, b_2... são chamados coeficientes de série, tais que, fazendo com que a série convirja, sua soma será uma função com período 2π. Pode-se conhecer esses coeficientes através das fórmulas de Euler, da seguinte forma

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad (3)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}nxdx$$

sendo $n = 1, 2, 3, 4,...$

3. TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO

A transferência de calor é um fenômeno facilmente encontrado em nosso cotidiano, que ocorre devido à troca de energia entre meios que apresentam diferença de temperatura. Existem diferentes mecanismos para a transferência de calor, sendo: condução, convecção e radiação.

A condução de calor, assim como os outros mecanismos, ocorre devido à diferença de temperatura em um meio ou entre meios que estejam em contato físico direto, sempre do ponto ou meio de maior temperatura para o de menor temperatura. Çengel (2012) define condução como a transferência de energia das partículas mais energéticas de uma substância para partículas vizinhas adjacentes menos energéticas, como resultado da interação entre elas. Podendo ocorrer em diferentes meios, a condução deve-se a diferentes fatores. Em um meio líquido ou gasoso, ela ocorre devido aos movimentos aleatórios das moléculas, que causam colisões e difusões. Nos meios sólidos, a vibração das moléculas e a energia carregada pelos elétrons livres causam a condução.

Fourier, no ano de 1822, foi quem propôs uma equação para relacionar a transferência de calor por condução, que ficou conhecida como Lei de Fourier. Considerando um sistema unidimensional, em regime permanente, a equação possui a seguinte forma

$$q_k = kA\frac{u_1 - u_2}{\Delta x} = -kA\frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad (4)$$

Considerando agora uma variação infinitesimal em x, tal que $\Delta x \to 0$, tem-se a Eq (4) reduzida à forma diferencial

$$q_k = -kA\frac{du}{dx} \qquad (5)$$

onde:

- q_k é o calor transferido por unidade de tempo ($J/s=W$);
- k é a condutividade térmica do material ($W/m.K$);
- A é a área normal à transferência de calor (m^2);
- du/dx é o gradiente de temperatura (K/m).

Os sinais negativos nas Eqs. (4) e (5) devem-se ao fato de que o gradiente de temperatura, no crescimento positivo de x, torna-se negativo com o decrescimento da temperatura, e garante que a quantidade de calor transferida, no sentido positivo de x, seja positiva.

4. EQUAÇÃO GERAL DA CONDUÇÃO DE CALOR

Anteriormente, abordou-se um caso para a condução no qual considerou-se apenas uma direção para o fluxo de calor, assumindo que, nas outras direções, o fluxo era desprezível. No entanto, existem casos em que não é possível fazer essa mesma análise, tendo em vista que o fluxo em todas as direções é relevante. Portanto, desenvolveu-se uma equação para casos dessa natureza.

Conforme Çengel (2012), considera-se um pequeno elemento de volume retangular, com comprimento Δx, largura Δy e altura Δz, mostrado na Fig. 1

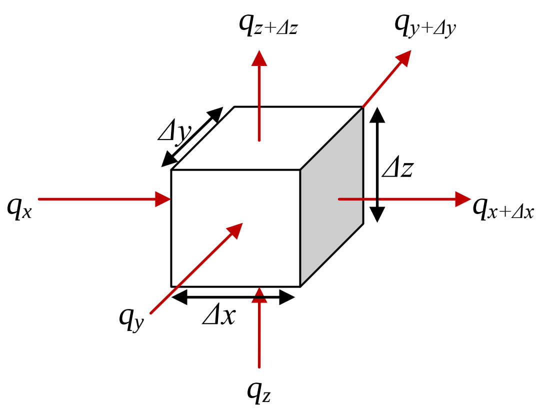

Figura 1 – Condução de calor tridimensional em um elemento de volume.

Para este caso, o balanço de energia para um pequeno intervalo de tempo Δt será

$$q_x + q_y + q_z - q_{x+\Delta x} - q_{y+\Delta y} - q_{z+\Delta z} + E_{ger,\,elem} = \frac{\Delta E_{elem}}{\Delta t} \tag{6}$$

Fazendo o desenvolvimento da Eq. (6), de acordo com a demonstração em Çengel (2012), e denominando a temperatura como $u(x,y,z,t)$, chega-se à equação geral da condução de calor para coordenadas retangulares

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + e_{ger} = \rho\sigma\frac{\partial u}{\partial t} \tag{7}$$

E, ainda, considerando que não há geração de energia ($e_{ger}=0$) e a condutividade térmica k é constante, reduz-se a Eq. (7) à forma da equação de difusão

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)c^2 = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{8}$$

onde $c^2 = k/\rho\sigma$ é a difusividade térmica do material, sendo ρ a massa específica e σ o calor específico do material.

5. PROBLEMA BIDIMENSIONAL ESTACIONÁRIO DE CALOR

Em determinados problemas, a variação com o tempo pode ser nula ou desprezível, a estes dá-se a denominação de estacionário. Nessa situação, o lado direito da Eq. (8) é igual a zero, deixando a equação do calor na forma da equação de Laplace. No entanto, o presente trabalho aborda a equação do calor bidimensional, sendo assim, a equação de Laplace assume a seguinte forma

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)c^2 = 0 \tag{9}$$

Considerando-se uma chapa bidimensional de comprimento *a* e altura *b*, conforme mostra a Fig. 2, onde a temperatura *u(x,y)* nas laterais e na parte inferior são nulas, e na parte superior é representada por uma função *f(x)*, desenvolve-se uma forma de encontrar a temperatura *u(x)*.

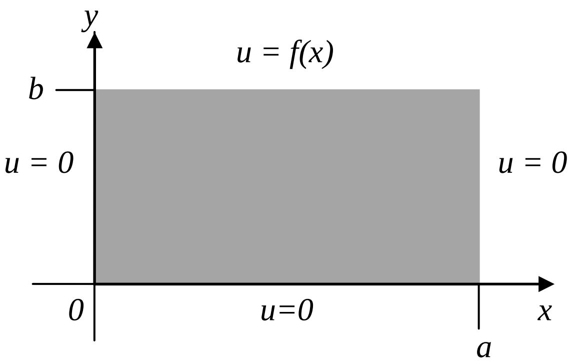

Figura 2 – Representação de uma chapa bidimensional

Para a resolução desse problema, faz-se a demonstração da mesma forma encontrada em Kreyszig (2009). Primeiramente, utilizando-se o método da separação de variáveis, tendo *u(x,y) = F(x)G(y)*, divide-se ambos os lados por *FG* e os iguala a uma constante negativa qualquer, da seguinte forma

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2} = -\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dy^2} = -k \tag{10}$$

Da Eq. (10), tem-se que

$$\frac{d^2F}{dx^2} + kF = 0 \tag{11}$$

Aplicando-se as condições de contorno, $F(0) = 0$ e $F(a) = 0$, na Eq. (11), encontra-se $k = (n\pi/a)^2$ e as soluções não-nulas

$$F(x) = F_n(x) = sen\frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{12}$$

Para G, tendo $k = (n\pi/a)^2$, obtém-se as soluções como

$$G(y) = G_n(y) = A_n e^{n\pi y/a} + B_n e^{-n\pi y/a} \tag{13}$$

Considerando-se a condição de contorno na parte inferior, tem-se que $G_n(0) = 0$, ou seja $G_n(0)=A_n+B_n=0$, chega-se a

$$G_n(y) = A_n(e^{n\pi y/a} - e^{-n\pi y/a}) = 2A_n senh\frac{n\pi y}{a} \tag{14}$$

Agora, encontrando-se as autofunções $u_n(x,y)$, tomando $2A_n=A_n*$ e com $y=b$, obtém-se

$$u(x,y) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n * senh\frac{n\pi b}{a}\right)sen\frac{n\pi x}{a} \tag{15}$$

Visto que os termos entre parênteses são os coeficientes de Fourier, pode-se representar A_n* da seguinte forma

$$A_n* = \frac{2}{asenh(n\pi b/a)}\int_0^a f(x)sen\frac{n\pi x}{a}dx \tag{16}$$

Portanto, a solução para este problema é

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n * sen\frac{n\pi x}{a}senh\frac{n\pi y}{a} \tag{17}$$

6. APLICAÇÃO PRÁTICA E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Considerando-se uma chapa quadrada, de lado *a*, representada na Fig. 3, encontrou-se as soluções permanentes para dois casos diferentes, encontrados nos exercícios em Kreyszig (2009), com condições de contorno específicas, aplicando-se de forma analítica as equações demonstradas anteriormente, para, em seguida, gerar-se as representações gráficas através de código implementado em linguagem Python.

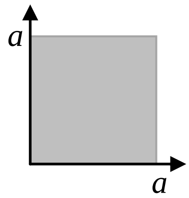

Figura 3 – Chapa bidimensional quadrada

Para o primeiro caso, considerou-se $a = 2$ e as condições de contorno aplicadas foram: $u = sen\pi x$ no lado superior, e *0* nos demais lados. Utilizando-se a Eq. (17), tem-se

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n * sen\frac{n\pi x}{2} senh\frac{n\pi y}{2}$$

Onde

$$A_n * = \frac{1}{senh(n\pi)} \int_0^2 sen\pi x sen\frac{n\pi x}{2} dx$$

Analisando-se a integral à parte, considerou-se a propriedade da ortonormalidade das funções, na qual, para $m = p$, tem-se o resultado da integração igual a *1*. No entanto, para que isso seja verdadeiro, o único valor que *n* poderá assumir é *2*. Sendo assim

$$\int_0^2 sen^2 \pi x dx = 1$$

Com isto, para o primeiro caso, tem-se a solução única

$$u(x,y) = \frac{sen\pi x senh\pi y}{senh2\pi}$$

Aplicando-se a solução no código implementado em linguagem Python, gerou-se o gráfico

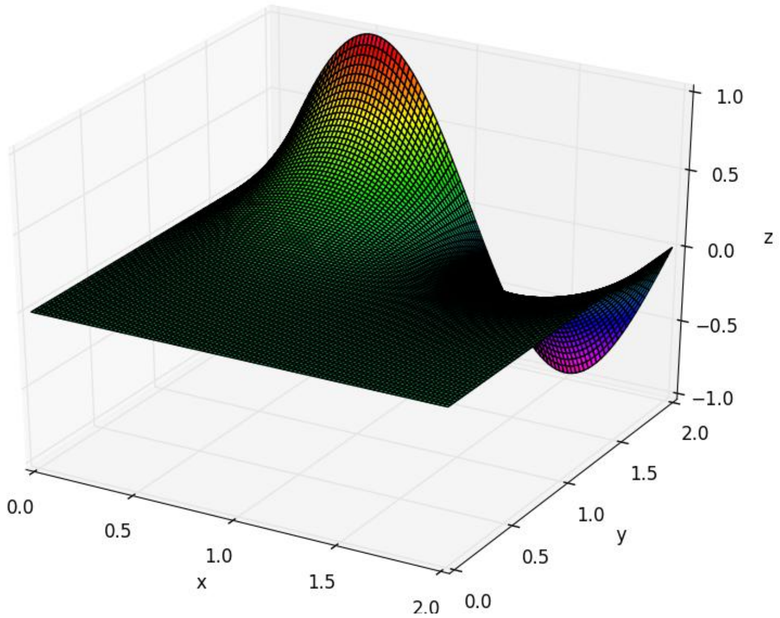

Figura 4 – Gráfico do comportamento da temperatura na chapa para o primeiro caso

Na Fig. 4, observa-se que o comportamento da temperatura foi dentro do esperado, uma vez que a condição de contorno é dada por uma função senoidal. Devido à condição de contorno apresentar temperaturas negativas e positivas na fronteira superior, a variação da temperatura no interior da placa é baixa, o que está de acordo com a solução obtida.

Para o segundo caso, considerou-se $a = 24$ e as condições de contorno aplicadas foram: *20ºC* no lado superior, e *0ºC* nos demais lados. Para encontrar *u(x,y)*, utilizou-se a Eq. (17), onde a função *f(x)* é constante (*f(x) = 20ºC*), e A_n* ficou da seguinte forma

$$A_n* = \frac{1}{12senh(n\pi)} \int_0^{24} 20sen\frac{n\pi x}{24}dx$$

Fazendo a resolução, chegou-se à seguinte solução para *u(x,y)*

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-40[\cos(n\pi)-1]}{n\pi senh(n\pi)} sen\frac{n\pi x}{24} senh\frac{n\pi y}{24}$$

Aplicando-se a solução encontrada no código implementado em linguagem Python, obteve-se o gráfico mostrado na Fig. 5

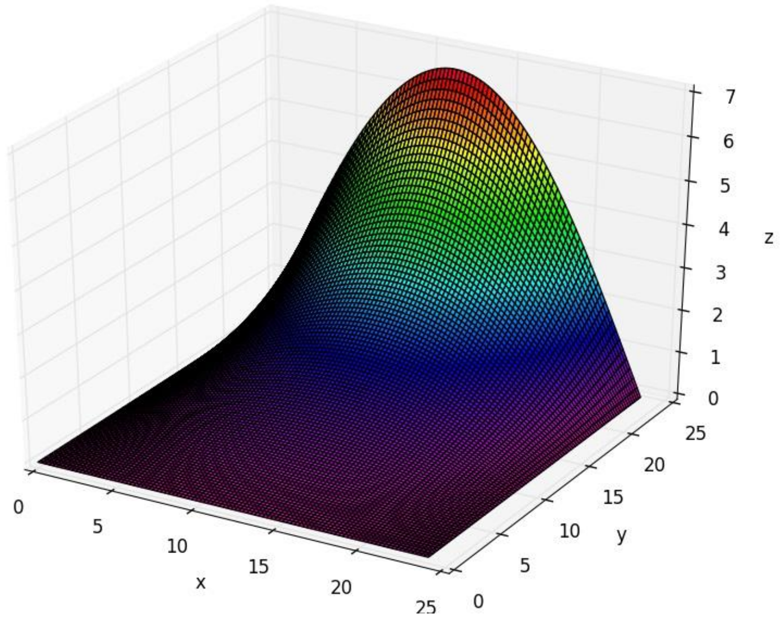

Figura 5 – Gráfico do comportamento da temperatura na chapa para o segundo caso

O comportamento foi dentro do esperado, pois, uma vez que uma das fronteiras está com temperatura constante e maior que zero, tem-se a difusão do calor na chapa de forma uniforme e estável, partindo da fronteira de maior temperatura. Recktenwald (2004) afirma que, para todos os problemas com valores de fronteira constantes, as soluções decaem de um estado inicial para uma condição de estado estacionário, com isto, pode-se validar o resultado gráfico obtido.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, aplicou-se o método das séries de Fourier em uma chapa quadrada, mudando-se somente as condições de contorno. Para o primeiro caso, a temperatura na fronteira superior foi dada por uma função senoidal, para o segundo caso, a temperatura na mesma fronteira foi dada por uma constante, sendo que nas outras fronteiras, considerou-se a temperatura igual a zero para os dois casos. As soluções para ambos os problemas apresentaram-se dentro do esperado, uma vez que, para o primeiro caso, demonstrou-se que a difusão do calor na chapa apresenta comportamento senoidal, o que está de acordo com a condição de contorno aplicada. Para o segundo caso, o comportamento apresentou-se uniforme e estável, sendo assim o resultado obtido foi compatível com Reckenwald (2004), validando o método proposto no trabalho, servindo de base para trabalhos futuros na área de transferência de calor.

REFERÊNCIAS

Çengel, Y. A., Ghajar, A. J. (2012), "Transferência de Calor e Massa: Uma Aboradagem Prática", S.I., 4ª Ed., AMGH.
Kreyszig, E. (2009), "Matemática Superior Para Engenharia", S.I., 9ª Ed., LTC.

Oliveira, A. A. R. de (2016), "Modelagem Computacional do Problema de Condução de Calor", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará - UFPA, Belém.

Souto, F. F. (2015), "A Equação do Calor e as Séries de Fourier", *XXVII Congresso de Iniciação Científica da Unesp*, Atibaia.

Recktenwald, G. W. (2004), "*Finite-Difference Approximations to the Heat Equation*", Mechanical Engineering Department Portland State University, Portland, Oregon.

APPLICATION OF HEAT EQUATION IN A TWO-DIMENSIONAL PLATE THROUGH FOURIER SERIES

Abstract. *Heat transfer is a phenomenon often encountered within engineering, since it occurs in a variety of situations, such as heat exchangers, heaters, furnaces, among others. Such phenomena can be described through differential equations which may be complex to solve by common methods, the Fourier series have become an important tool in this type of approach. This paper aims to show practical applications of the Fourier series method, considering a two - dimensional square plate with different boundary conditions. The solutions were found analytically and the presented results obtained desired behavior..*

Keywords: *Heat Transfer, Differential Equations, Fourier Series.*