



08 a 11 de Outubro de 2018  
Instituto Federal Fluminense  
Búzios - RJ

## UM MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDO COMBINADO COM UM MÉTODO ADI PARA A SOLUÇÃO DE DESLOCAMENTOS MISCÍVEIS

Mateus Teixeira Magalhães<sup>1</sup> - mateusteixeiramagalhaes@ice.ufjf.br

Iury Igreja<sup>2</sup> - iuryigreja@ice.ufjf.br

<sup>1</sup>Universidade Federal de Juiz de Fora, MG, Brazil

<sup>2</sup>Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Ciência da Computação, MG, Brazil

**Resumo.** *O desenvolvimento de modelos matemáticos e computacionais para a simulação de escoamento de fluidos em meios porosos é de grande interesse em diversos campos da engenharia e ciências aplicadas como na exploração de reservatórios. A injeção de traçador é um exemplo de problema nessa área sendo um processo que permite obter informações sobre as características do reservatório. Em geral o traçador injetado não interfere nas propriedades do fluido que ali reside o que leva a um problema de escoamento de fluido miscível incompressível. Esse processo pode ser descrito matematicamente por um sistema de equações diferenciais parciais, formado por um subsistema para velocidade e pressão, composto pela conservação de massa e a lei de Darcy, e por uma equação de difusão/dispersão-convecção transiente, que descreve a concentração do traçador injetado. A proposta deste trabalho é obter uma aproximação numérica precisa para o subsistema da velocidade e pressão utilizando um método de elementos finitos misto híbrido dual estabilizado por termos de mínimos quadrados e acoplar a solução deste subsistema a equação de difusão/dispersão-convecção para obter a concentração do meio utilizando o método da direção implícita alternada (ADI) combinado com uma discretização upwind para estabilizar o termo convectivo. A vantagem da utilização do método híbrido estabilizado é a obtenção de taxas ótimas para o campo de velocidade e o tratamento de descontinuidades características de meios heterogêneos, e a vantagem na utilização do método ADI é o menor custo computacional ao resolver somente sistemas lineares tri-diagonais além do método ser incondicionalmente estável. Simulações computacionais em meios porosos homogêneos e heterogêneos são realizadas a fim de ilustrar a flexibilidade e taxas de convergências dos métodos propostos.*

**Keywords:** *Problema de Darcy, Problema do Transporte, Métodos mistos híbridos, Método ADI, Métodos Estabilizados.*

### 1. Introdução

A modelagem matemática que descreve o fenômeno associado a deslocamentos miscíveis em meios porosos pode ser descrito matematicamente por um sistema de equações diferenciais

parciais, formado por um subsistema para velocidade e pressão, composto pela conservação de massa e a lei de Darcy, e por uma equação de difusão/dispersão-convecção transiente, que descreve a concentração do traçador injetado. Apesar da concentração do traçador ser a variável de maior interesse, daremos uma certa atenção para o campo de velocidade, uma vez que a aproximação da concentração do traçador depende diretamente da aproximação do campo de velocidade, pois o mesmo descreve a trajetória do traçador que se desloca no meio poroso. Métodos de elementos finitos mistos vem sendo muito utilizados nos últimos anos para aproximar o problema de Darcy (Raviart and Thomas, 1977; Brezzi et al., 1985; Brezzi and Fortin, 1991). A ideia principal dos métodos mistos é aproximar simultaneamente o campo de velocidade e de pressão utilizando diferentes espaços de aproximação, porém isso leva à um problema de compatibilidade entre os espaços de aproximações (Brezzi, 1974).

Uma alternativa para se obter uma aproximação para o campo de velocidade é através de um pós-processamento do campo de pressão, que é resolvido pelo problema de Poisson, na Lei de Darcy como descrito nos trabalhos Loula et al. (1995) e Correa and Loula (2007). Por outro lado, uma abordagem para resolver o problema de incompatibilidade dos espaços, são os métodos mistos estabilizados como proposto por Correa and Loula (2008). Em geral essas formulações mistas estabilizadas usam espaços de elementos finitos de Lagrange contínuo para o escoamento de Darcy em meios porosos homogêneos, porém essas formulações não são apropriadas para simulação em meios heterogêneos com propriedades descontínuas. Dessa forma, os métodos híbridos estabilizados surgem como uma alternativa viável para o tratamento de descontinuidades característicos de meios porosos heterogêneos e ao mesmo tempo com a flexibilidade necessária para o emprego de espaços polinomiais de aproximações, inclusive de mesma ordem para a velocidade e pressão, além da propriedade de conservação local, como pode ser visto nos trabalhos Nunez et al. (2012); Núñez et al. (2017).

Neste contexto, este trabalho propõe a solução do problema de deslocamentos miscíveis em duas etapas: primeiro os campos de velocidade e pressão, governados pelo problema de Darcy, são aproximados utilizando o método de elementos finitos misto híbrido dual estabilizado proposto por Nunez et al. (2012); Núñez et al. (2017). A solução aproximada para o campo de velocidade obtida é então utilizada para aproximação da concentração do traçador utilizando um método de diferenças finitas de direções implícitas alternadas (ADI) (Corrêa et al., 2004). Para validar os métodos, estudos de convergência são propostos para ambos os problemas separadamente e ao final são apresentados resultados de injeção contínua em meios porosos homogêneos e heterogêneos.

## 2. Definições matemáticas do problema

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d=2$  ou  $3$ ) um domínio aberto limitado de contorno regular  $\partial\Omega$  e  $T > 0$  um número real fixo. Assim, o escoamento de um fluido newtoniano incompressível em um meio poroso rígido é representado por uma equação do tipo convecção-difusão predominantemente convectiva para a concentração da mistura dos fluidos, denotada por  $c(\mathbf{x}, t)$ , descrita pela equação do transporte

$$\varphi \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c - \operatorname{div}(D \nabla c) + \hat{f}c = g \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

com as seguintes condições iniciais e de contorno

$$x(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega, \quad (2)$$

$$D\nabla c \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0, T). \quad (3)$$

A velocidade de Darcy  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  é dada pela solução do subsistema elíptico:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = f \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, T), \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = -K(\mathbf{x}, c)\nabla\rho \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, T), \quad (5)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma = \partial\Omega \times (0, T), \quad (6)$$

composto pelas equações de conservação de massa (4) e de Darcy (5). Temos que  $\rho$  representa a pressão hidrostática e  $\phi = \phi(\mathbf{x})$  é a porosidade efetiva da rocha. Além disso  $K(\mathbf{x}, c)$  é o tensor de condutividade hidráulica, dado por  $K(\mathbf{x}, c) = \frac{k(\mathbf{x})}{\mu(c)}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  onde  $k(\mathbf{x})$  é o tensor de permeabilidade absoluta e  $\mu(c)$  a viscosidade da mistura dos fluidos. As funções  $\hat{f}$ ,  $f$  e  $g$  representam os termos de fonte e sumidouro e  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  denota a normal exterior à fronteira  $\partial\Omega$ . Além disso o tensor de dispersão é definido por  $D = D(\mathbf{u}) = \alpha_{mol}I + |\mathbf{u}|\{\alpha_l E(\mathbf{u}) + \alpha_t E^\perp(\mathbf{u})\}$  com  $E(\mathbf{u}) = \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ ,  $E^\perp(\mathbf{u}) = I - E(\mathbf{u})$ , onde a norma  $|\mathbf{u}|$  é tal que  $|\mathbf{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_d^2$ ,  $\otimes$  é o produto tensorial e  $\alpha_{mol}$ ,  $\alpha_l$  e  $\alpha_t$  são os coeficientes de difusão molecular e de dispersão longitudinal e transversal, respectivamente. Em geral a dispersão longitudinal ( $\alpha_l$ ) é maior do que a transversal ( $\alpha_t$ ), onde supomos  $0 < \alpha_{mol} \leq \alpha_l$ ;  $\alpha_l \geq \alpha_t > 0$ ; e  $0 \leq \phi \leq 1$ . Seguindo ainda a lei empírica (Settari et al., 1977) para a viscosidade da mistura  $\mu(c) = \mu_{res}[1 - c + M^{\frac{1}{4}}c]^{-4}$ ,  $c \in [0, 1]$  onde  $M$  denota a razão de mobilidade que, para escoamentos miscíveis, é definida como sendo a taxa entre viscosidades do fluido residente ( $\mu_{res}$ ) e a do injetado ( $\mu_{inj}$ ), ( $M = \mu_{res}/\mu_{inj}$ ). Quando  $M \gg 1$  (razão de mobilidade adversa) o fluido injetado é altamente viscoso, o problema estudado torna-se fortemente não-linear e acoplado exigindo métodos numéricos robustos que busquem de forma precisa e com baixo custo computacional resolver os complexos fenômenos físicos envolvidos.

### 3. Método de elementos finitos misto híbrido dual estabilizado - Problema de Darcy

Para aproximar o campo de velocidade definido pelo problema de Darcy (4)-(6) utilizaremos um método de elementos finitos misto híbrido dual estabilizado. A seguir apresentamos a formulação para o problema de Darcy, como apresentado nos trabalhos Nunez et al. (2012); Núñez et al. (2017). Essa formulação consiste de um conjunto de problemas locais, definidos no nível de cada elemento  $\mathcal{K}$  da discretização de elementos finitos de uma malha  $\mathcal{T}_h$ , acoplado a um sistema global composto pelos graus de liberdade referente aos multiplicadores de Lagrange, definidos como sendo a pressão  $\rho$  na interface  $e$  dos elementos ( $\lambda = \rho|_e$ ). Termos de estabilização são adicionados para gerar uma formulação adjunta consistente e simétrica possibilitando flexibilidade na escolha de funções base dos espaços de aproximação.

Seja  $\mathcal{T}_h$  uma malha regular de elementos finitos no domínio  $\Omega$  ( $\Omega = \bigcup \mathcal{K}$ ). Seja o conjunto de todas as arestas dos elementos  $\mathcal{K}$  da malha definido como  $\mathcal{E}_h = \{e : e \text{ uma aresta de } \mathcal{K} : \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h\}$  e  $\mathcal{E}_h^0 = \{e \in \mathcal{E}_h \text{ com } e \text{ sendo uma aresta interior}\}$  o conjunto de arestas interiores. Neste contexto, definindo os espaços de funções quebradas

$$U_h^m = \{\mathbf{v} \in [L^2(\mathcal{K})]^2 : \mathbf{v}|_{\mathcal{K}} \in \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^m \quad \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h\}$$

$$Q_h^l = \{q \in L^2(\mathcal{K}) : q|_{\mathcal{K}} \in \mathcal{R}^l \quad \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h\}$$

$$M_h^n = \{\mu \in L^2(\mathcal{E}_h) : \mu|_e \in \mathcal{P}^n \quad \forall e \in \mathcal{E}_h\}$$

onde  $m$ ,  $l$  e  $n$  são os graus dos polinômios utilizados para aproximar  $\mathbf{u}_h$ ,  $\rho_h$  e  $\lambda_h$  utilizando aproximação por elementos finitos. Sendo

**Problema:** achar  $\mathbf{u}_h \in U_h^m$ ,  $\rho_h \in Q_h^l$  e o multiplicador de lagrange  $\lambda_h \in M_h^n$ , tal que:

$$\sum_{\mathcal{K}} \left[ (K^{-1}\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{K}} - (\rho_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_{\mathcal{K}} + \int_{\partial\mathcal{K}} \lambda_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}}) ds + \delta_1 (\operatorname{div} \mathbf{u}_h - f, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_{\mathcal{K}} \right. \\ \left. + \delta_2 (K^{-1}\mathbf{u}_h + \nabla \rho_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{K}} + \delta_3 (\nabla \times \mathbf{u}_h, \nabla \times \mathbf{v}_h)_{\mathcal{K}} \right] = 0, \forall \mathbf{v}_h \in U_h^m, \quad (7)$$

$$\sum_{\mathcal{K}} \left[ - (\operatorname{div} \mathbf{u}_h, q_h)_{\mathcal{K}} + (f, q_h)_{\mathcal{K}} + \delta_2 (K^{-1}\mathbf{u}_h + \nabla \rho_h, \nabla q_h)_{\mathcal{K}} \right. \\ \left. + \int_{\partial\mathcal{K}} \beta (\rho_h - \lambda_h) q_h ds \right] = 0, \forall q_h \in Q_h^l, \quad (8)$$

$$\sum_{\mathcal{K}} \int_{\partial\mathcal{K}} \left[ (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}}) \mu ds + \int_{\partial\mathcal{K}} \beta (\lambda_h - \rho_h) \mu ds \right] = 0, \forall \mu \in M_h^n. \quad (9)$$

O problema (7)-(9) é resolvido utilizando a estratégia de condensação estática, que consiste em separar o problema em 2 etapas. Na primeira etapa um sistema global é montado para resolver o multiplicador de Lagrange. Conhecido o valor do multiplicador, na segunda etapa é possível calcular a variável de interesse (velocidade  $\mathbf{u}$  e pressão  $\rho$ ) em cada elemento  $\mathcal{K}$  da malha  $\mathcal{T}_h$ . A grande vantagem dessa abordagem é que a dimensão do sistema global montado depende somente dos graus de liberdade associados aos multiplicadores, levando a um menor custo computacional, uma vez que o custo para solução dos sistemas locais é desprezível em relação ao custo para solução dos sistemas locais (Igreja and Loula, 2018).

#### 4. Método da direção implícita alternada (ADI) - Equação de transporte do traçador

Para solução da concentração  $c(\mathbf{x}, t)$ , dado por (1)-(3) será utilizado uma aproximação pelo método de diferenças finitas de direção implícita alternada (ADI, do inglês *alternate direction implicit*) como feito por Corrêa et al. (2004). Expandindo os termos convectivos  $\mathbf{u} \cdot \nabla c$  e difusivo  $\operatorname{div}(D(\mathbf{u})\nabla c)$  para o problema definido em duas dimensões, temos:

$$\operatorname{div}(D(\mathbf{u})\nabla c) = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{11} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{22} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{12} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{21} \frac{\partial c}{\partial x} \right) \quad (10)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla c = u_x \frac{\partial c}{\partial x} + u_y \frac{\partial c}{\partial y} \quad (11)$$

Para aproximação das derivadas do termo difusivo (10), temos os seguintes operadores:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial c}{\partial x} \right) \approx \delta_x (a \delta_x) [c_{i,j}] = \frac{1}{h^2} \{ a(i+1/2, j) c_{i+1,j} - [a(i+1/2, j) + a(i-1/2, j)] c_{i,j} \\ + a(i-1/2, j) c_{i-1,j} \} \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a \frac{\partial c}{\partial y} \right) \approx \delta_y (a \delta_y) [c_{i,j}] = \frac{1}{h^2} \{ a(i, j+1/2) c_{i,j+1} - [a(i, j+1/2) + a(i, j-1/2)] c_{i,j} \\ + a(i, j-1/2) c_{i,j-1} \} \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial c}{\partial y} \right) \approx \delta_x (a \delta_y) [c_{i,j}] = \frac{1}{4h^2} \{ a(i+1, j) c_{i+1, j+1} - a(i+1, j) c_{i+1, j-1} - a(i-1, j) c_{i-1, j+1} + a(i-1, j) c_{i-1, j-1} \} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a \frac{\partial c}{\partial x} \right) \approx \delta_y (a \delta_x) [c_{i,j}] = \frac{1}{4h^2} \{ a(i, j+1) c_{i+1, j+1} - a(i, j+1) c_{i-1, j+1} - a(i, j-1) c_{i+1, j-1} + a(i, j-1) c_{i-1, j-1} \} \quad (15)$$

Visando estabilizar os efeitos das oscilações espúrias característicos de problemas predominantemente convectivos, onde o número de *Peclet* é alto, utilizamos um esquema upwind para aproximar o termo convectivo (11):

$$u_x \frac{\partial c}{\partial x} \approx u_x \delta_x [c_{i,j}] = \begin{cases} u_x(i, j) \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h} & \text{se } u_x(i, j) > 0 \\ u_x(i, j) \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h} & \text{se } u_x(i, j) \leq 0 \end{cases} \quad (16)$$

$$u_y \frac{\partial c}{\partial y} \approx u_y \delta_y [c_{i,j}] = \begin{cases} u_y(i, j) \frac{c_{i,j} - c_{i,j-1}}{h} & \text{se } u_y(i, j) > 0 \\ u_y(i, j) \frac{c_{i,j+1} - c_{i,j}}{h} & \text{se } u_y(i, j) \leq 0 \end{cases} \quad (17)$$

A ideia do método ADI é achar uma aproximação em cada instante de tempo em dois passos. No primeiro passo as derivadas na direção  $x$  são aproximadas de forma implícita e os demais termos de forma explícita. No segundo passo as derivadas na direção  $y$  são aproximadas de forma implícita e os demais termos de forma implícita. Dessa forma para a equação de transporte (1)-(3) o método é definido como:

**Primeiro Passo** (Implícito em  $x$ )

$$\varphi \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j}^n}{\Delta t/2} + u_x \delta_x [c_{i,j}^{n+1/2}] + u_y \delta_y [c_{i,j}^n] - \delta_x (D_{11} \delta_x) [c_{i,j}^{n+1/2}] - \delta_y (D_{22} \delta_y) [c_{i,j}^n] - \delta_x (D_{12} \delta_y) [c_{i,j}^n] - \delta_y (D_{21} \delta_x) [c_{i,j}^n] = g_{i,j}^n \quad (18)$$

**Segundo Passo** (Implícito em  $y$ )

$$\varphi \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} + u_x \delta_x [c_{i,j}^{n+1/2}] + u_y \delta_y [c_{i,j}^{n+1}] - \delta_x (D_{11} \delta_x) [c_{i,j}^{n+1/2}] - \delta_y (D_{22} \delta_y) [c_{i,j}^{n+1}] - \delta_x (D_{12} \delta_y) [c_{i,j}^{n+1/2}] - \delta_y (D_{21} \delta_x) [c_{i,j}^{n+1/2}] = g_{i,j}^{n+1/2} \quad (19)$$

A vantagem do método ADI em relação aos métodos tradicionais de diferenças finitas está no custo computacional, uma vez que em cada passo um sistema linear  $Ax = b$  é montado de forma que  $A$  é sempre uma matriz tri-diagonal. Além do custo computacional o método é incondicionalmente estável e de segunda ordem no tempo e primeira ordem no espaço devido à discretização do termo convectivo utilizando o esquema upwind de primeira ordem.

## 4.1 Estudo de Convergência

Para analisar a taxa de convergência do método de elementos finitos híbrido dual estabilizado (7)-(9) foi considerado a solução analítica  $p = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ . Foi utilizado uma malha de elementos finitos quadrados de  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$ ,  $32 \times 32$  e  $64 \times 64$  elementos, os termos de estabilização  $\delta_1 = 0.5$ ,  $\delta_2 = -0.5$ ,  $\delta_3 = 0.5$  e  $\beta = 0$ . De acordo com a Figura 1, adotando polinômio de primeira ordem para a velocidade e pressão, observamos taxa ótima para a aproximação da velocidade na norma  $L^2(\Omega)$ .

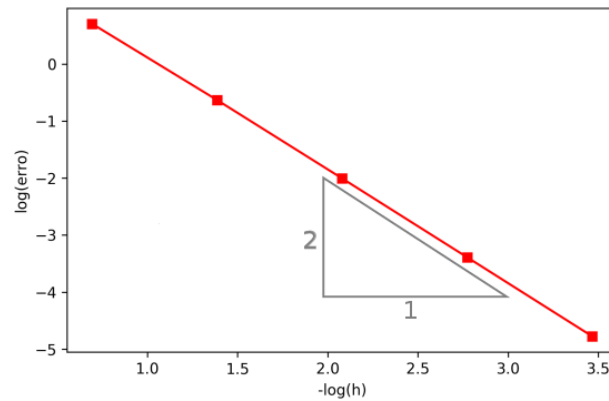


Figura 1- Gráfico de erro da velocidade  $u$  para cada malha.

Para analisar a taxa de convergência do método ADI, assumimos um domínio  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  com  $T = [0, 3]$ ,  $D = 0.01$  e  $\mathbf{u}(x, y) = (-4y, 4x)$ , satisfazendo a seguinte solução analítica:

$$c(x, y, t) = \frac{2\gamma^2}{2\gamma^2 + 4Dt} \exp \left[ -\frac{(\bar{x} - x_c)^2 + (\bar{y} - y_c)^2}{2\gamma^2 + 4Dt} \right] \quad (20)$$

com  $\bar{x} = x \cos(4t) + y \sin(4t)$ ,  $\bar{y} = -x \sin(4t) + y \cos(4t)$ ,  $x_c = 0.2$ ,  $y_c = 0.0$  e  $\gamma = 0.1$ .

Empregando as mesmas malhas do estudo anterior, calculamos o erro na norma do máximo gerado pelo método ADI no tempo  $t = 3$ . A Figura 2 apresenta a taxa de convergência do método que é de primeira ordem devido o uso da aproximação *upwind* para a convecção.

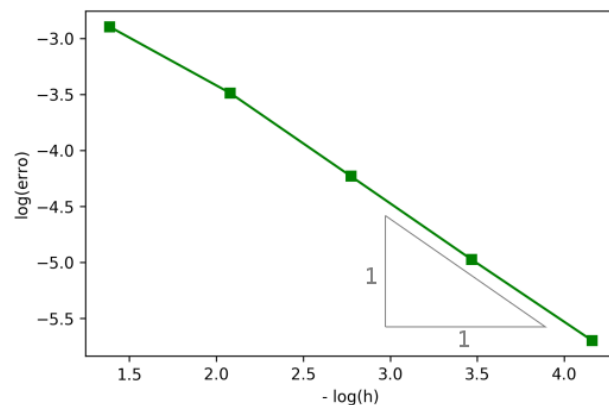


Figura 2- Gráfico de erro da concentração para diferentes malhas.

## 5. Problema *five-spot*

O problema *five-spot* consiste em uma célula quadrada com poços produtores nos vértices e um poço injetor no centro geométrico (ou vice-versa). No poço produtor é injetado o traçador que se mistura com o fluido residente e o empurra até os poços produtores. Apesar de ser necessária uma malha dessas células para simular uma extração, por conta das condições de simetria, podemos considerar apenas um quadrante de uma célula e repetir esse comportamento no espaço, desde que haja condição de contorno de fluxo nulo entre as retas que separam os

quadrantes (de Almeida Quintino and Neto, 2014). Para o experimento foi utilizado um quadrante de lado  $L = 1000 \text{ ft}$  onde a célula de injeção está localizado no canto inferior esquerdo ( $x = y = 0$ ) e a célula produtora no canto superior direito ( $x = y = L$ ).

A simulação foi feita para um meio poroso homogêneo de permeabilidade constante  $k(\mathbf{x}) = k = 1000mD$ , porosidade  $\varphi = 0.1$ , difusão molecular  $\alpha_{mol} = 0$ , dispersão longitudinal  $\alpha_l = 1 \text{ ft}$  e dispersão transversal  $\alpha_t = 0 \text{ ft}$ . Viscosidade do fluido residente  $\mu = 1cP$  e a taxa de injeção do traçador de  $200 \text{ ft}^2$  por dia de forma contínua ao longo de 2000 dias. Para aproximação do campo de velocidade (4)-(6) foi utilizado uma malha de  $80 \times 80$  elementos finitos quadrados utilizando funções base com polinômios de primeira ordem tanto para a velocidade  $\mathbf{u}$  quanto para a pressão  $\rho$  e constantes dos termos de estabilização  $\delta_1 = 0.5$ ,  $\delta_2 = -0.5$ ,  $\delta_3 = 0.5$  e  $\beta = 0$ . A Figura 3 apresenta o campo de velocidade para este caso particular. Para a aproximação da concentração foi utilizada uma malha de  $81 \times 1$  pontos com  $\Delta t = 2.5$  dias e o campo de velocidades aproximado pelo método híbrido é dado como dado de entrada. A Figura 4 apresenta o comportamento do campo de concentração para este experimento.

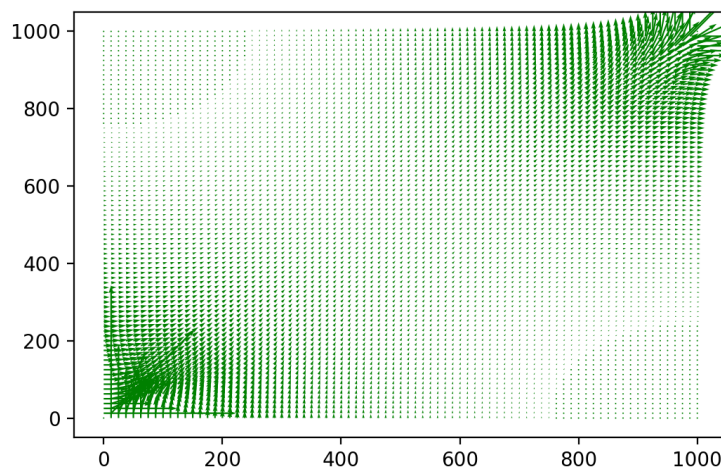


Figura 3- Campo de velocidade para o problema five-spot em meio poroso homogêneo

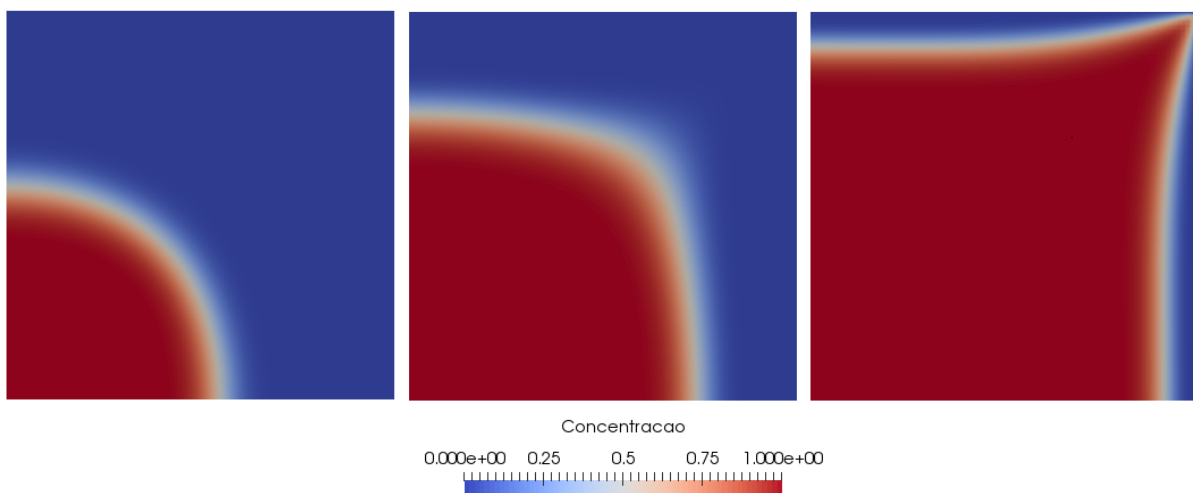


Figura 4- Solução numérica obtida para concentração do traçador em 125, 250 e 500 dias.

Outro experimento computacional foi realizado com os mesmos parâmetros do experimento anterior, porém agora adotamos um meio heterogêneo gerado por um quadrado de dimensão

$300\text{ft}^2$  localizado em  $x = 500\text{ft}$  e  $y = 250\text{ft}$  com permeabilidade  $k = 10\text{mD}$ . A Figura 5 mostra o campo de velocidades para este caso. Podemos observar que a região de menor permeabilidade apresenta um campo de velocidade proporcional e descontinuidades na componente tangencial da velocidade que são capturadas pelo método híbrido. Além disso, este comportamento é melhor visualizado nos resultados para o campo de concentração, Fig. 6, onde a região de menor permeabilidade age como uma barreira para a concentração do traçador.

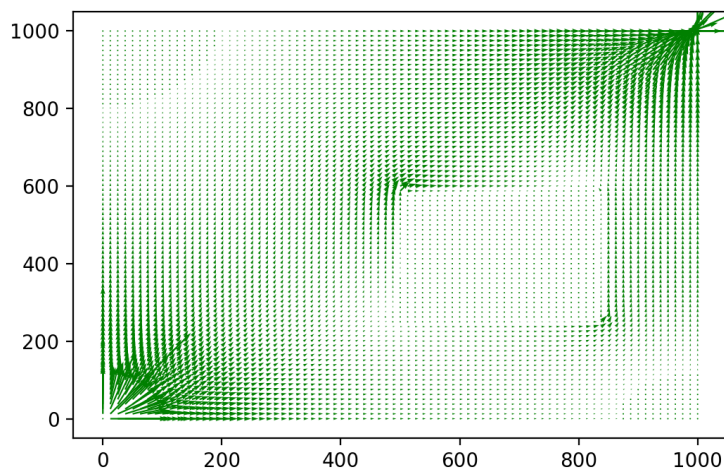


Figura 5- Campo de velocidade para o problema five-spot em meio poroso com obstáculo.

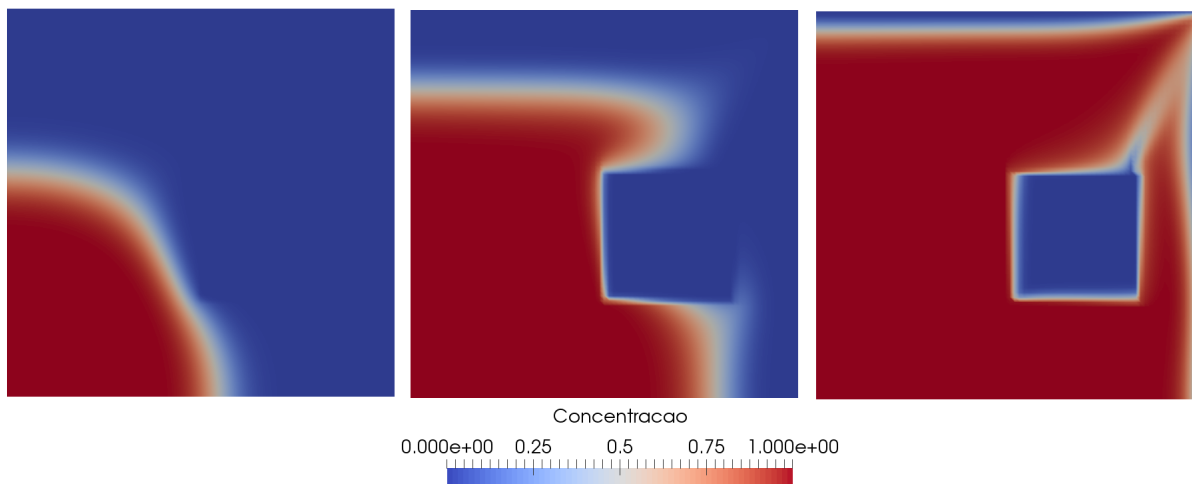


Figura 6- Solução numérica obtida para concentração do traçador em 125, 250 e 500 dias.



## 6. Conclusões

Neste trabalho apresentamos uma combinação do método de elementos finitos híbridos misto dual, para resolver o problema de Darcy, com o método de diferenças finitas ADI, para aproximar a concentração de um traçador, com o intuito de simular deslocamentos miscíveis em meios porosos homogêneos e heterogêneos. Os resultados numéricos obtidos mostraram que o método híbrido converge com taxa ótima e o método ADI com taxa sub-ótima afetada pela discretização de primeira ordem *upwind* para o termo convectivo, que tem por finalidade estabilizar as oscilações espúrias geradas por problemas predominantemente convectivos. Os métodos, híbrido e ADI, combinados foram aplicados para a simulação de um problema de injeção contínua, que demonstrou que o acoplamento dos métodos é capaz de gerar resultados com perfis de acordo com o esperado para o problema *five-spot*, e com reduzido custo computacional, uma vez que o método híbrido apresenta o problema global com a dimensão dos graus de liberdade associados apenas aos multiplicadores de Lagrange, que neste caso estão associados ao campo de pressão nas arestas dos elementos, e o método ADI que gera somente matrizes tri-diagonais que apresentam baixo custo de resolução.

## REFERÊNCIAS

- Brezzi, F. (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, 8(R2):129–151.
- Brezzi, F., Douglas, J., and Marini, L. D. (1985). Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems. *Numerische Mathematik*, 47(2):217–235.
- Brezzi, F. and Fortin, M. (1991). Mixed and hybrid finite element methods, no. 15 in springer series in computational mathematics.
- Correa, M. and Loula, A. (2007). Stabilized velocity post-processings for darcy flow in heterogeneous porous media. *Communications in numerical methods in engineering*, 23(6):461–489.
- Correa, M. and Loula, A. (2008). Unconditionally stable mixed finite element methods for darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(17-18):1525–1540.
- Corrêa, M., Loula, A., and Garcia, E. (2004). Métodos de diferenças finitas de direções alternadas implícitos para modelagem de águas subterrâneas. *Trends in Applied and Computational Mathematics*, 5(1):65–76.
- de Almeida Quintino, E. F. and Neto, L. H. C. (2014). Aplicação de simulação numérica e análise de sensibilidade para tomada de decisão na exploração de reservatórios de petróleo produzidos por malhas five-spot de injeção de água. *Blucher Marine Engineering Proceedings*, 1(1):768–779.
- Igreja, I. and Loula, A. F. (2018). A stabilized hybrid mixed dgfem naturally coupling stokes-darcy flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- Loula, A. F., Rochinha, F. A., and Murad, M. A. (1995). Higher-order gradient post-processings for second-order elliptic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 128(3-4):361–381.
- Núñez, Y., Faria, C., Loula, A., and Malta, S. (2017). Um método híbrido de elementos finitos aplicado a deslocamentos miscíveis em meios porosos heterogêneos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 33(1-2):45–51.

- Nunez, Y. R., Faria, C. O., Loula, A. F., and Malta, S. M. (2012). A mixed-hybrid finite element method applied to tracer injection processes. *International Journal of Modeling and Simulation for the Petroleum Industry*, 6(1).
- Raviart, P.-A. and Thomas, J.-M. (1977). A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. In *Mathematical aspects of finite element methods*, pages 292–315. Springer.
- Settari, A., Price, H., Dupont, T., et al. (1977). Development and application of variational methods for simulation of miscible displacement in porous media. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 17(03):228–246.

## A HYBRID FINITE ELEMENT METHOD COMBINED WITH AN ADI METHOD FOR SOLUTION OF MISCIBLE DISPLACEMENTS

**Abstract.** *The development of mathematical and computational models for the simulation of fluid flow in porous media have been great interest in several fields of engineering and applied sciences as in the exploration of reservoirs. The tracer injection is an example of a problem in this area being a process that allows to obtain information about the characteristics of the reservoir. In general the injected tracer does not interfere with the properties of the fluid therein which leads to an incompressible miscible fluid flow problem. This process can be mathematically described by a system of partial differential equations, formed by a subsystem for velocity and pressure, composed by mass conservation and Darcy's law, and by a transient diffusion / dispersion-convection equation, which describes the concentration of the injected tracer. The purpose of this work is to obtain a precise numerical approximation for the velocity and pressure subsystem using a dual hybrid mixed finite element method stabilized by least squares terms and to couple the solution of this subsystem to the diffusion / dispersion-convection equation to obtain the concentration of the medium using the Alternate Direction Implicit (ADI) method combined with an upwind discretization to stabilize the convective term. The advantage of the stabilized hybrid method is to obtain optimal convergence rates for the velocity field and the treatment of the heterogeneous media discontinuities, and the advantage of the ADI method is the lowest computational cost when solving only tri-diagonal linear systems besides the method being unconditionally stable. Computational simulations in homogeneous and heterogeneous porous media are performed to illustrate the flexibility and convergence rates of the proposed methods.*

**Keywords:** *Darcy problem, Transport equation, Hybrid finite element methods, alternate direction implicit method, Stabilized methods.*