



08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

PROBLEMA INVERSO DE ESTIMATIVA DE FLUXOS DE CALOR COM VARIÇÃO ESPACIAL E TEMPORAL COM REGULARIZAÇÃO POR MEIO DE MARKOV RANDOM FIELDS E MODELO HIERÁRQUICO PARA ESTIMAÇÃO DE HIPERPARÂMETROS

Gabriel Teixeira Soares das Neves^{1,2} - gabriel.neves@iff.edu.br

Luiz Alberto da Silva Abreu¹ - luiz.abreu@iprj.uerj.br

Diego Campos Knupp¹ - diegoknupp@iprj.uerj.br

Antônio J. Silva Neto¹ - ajsneto@iprj.uerj.br

¹Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico - Nova Friburgo, RJ, Brasil

²Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *Campus Quissamã*, Quissamã, RJ, Brasil

Resumo. *Este trabalho aborda o problema de estimativa de fluxo de calor com variações espaciais bidimensionais abruptas e suave no tempo aplicado a uma das superfícies de uma placa metálica. O problema direto é resolvido empregando o método de diferenças finitas. A solução do problema inverso é obtida com o emprego de uma abordagem Bayesiana, utilizando o Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov. Para a regularização do problema inverso é proposta a aplicação das técnicas Total Variation no espaço e Gaussiana Suave no tempo, ambas do tipo Markov Random Fields (MRF). A priori Gaussiana Suave é regularizada automaticamente através de um modelo hierárquico de estimação de hiperparâmetros.*

Palavras-Chave: *Problemas Inversos, Estimativa de Fluxo de Calor, Inferência Bayesiana, Markov Random Fields*

1. INTRODUÇÃO

O fenômeno da miniaturização de componentes eletrônicos, atendendo a demandas cada vez mais exigentes, como, por exemplo, o desenvolvimento de *microchips* e *nanochips*, justifica a investigação de diversas questões envolvidas em sua produção. Problemas de superaquecimento e, conseqüentemente, dissipação de calor são obstáculos enfrentados constantemente nas indústrias (Hetsroni, 2001). Dessa forma, soluções no sentido de identificar com mais precisão e agilidade possíveis fluxos de calor em componentes eletrônicos de tamanho reduzido assumem papel de destaque tanto no ambiente acadêmico quanto no industrial.

O problema de, a partir do conhecimento da física e geometria envolvidas, tentar prever o comportamento da evolução dos campos de temperatura conseqüentes de um possível

fluxo de calor imposto é detalhadamente estudado e registrado na literatura científica, e consiste em um problema direto. Já a estimativa de possíveis fontes térmicas, ou fluxos de calor, a partir de medições de campos de temperatura é caracterizada como um problema inverso e desperta a atenção de pesquisadores de diferentes campos do conhecimento, inicialmente através de abordagens determinísticas como o método de regularização iterada de Alifanov (Silva Neto & Özisik, 1993; Su & Silva Neto, 2001), entre outros. Nos últimos anos, no entanto, a popularização de abordagens Bayesianas, como o Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov (MCMC), permitiu o estudo de novos problemas, igualmente relevantes (Mescolin et al., 2016; Abreu et al, 2013).

Problemas inversos em transferência de calor podem ser divididos em dois tipos: estimativa de parâmetro e estimativa de função (Kaipio & Somersalo, 2004). O segundo caso é o de interesse do presente trabalho, e possui a característica de envolver um custo computacional elevado, em alguns casos, inviável, e as soluções obtidas podem se mostrar pouco regularizadas. A partir de abordagens Bayesianas, encontrar métodos adaptativos e informações *a priori* que ajudem a contornar esses problemas tem sido assunto central em diversos trabalhos no estudo de problemas inversos. Diversas abordagens, com diferentes aspectos, foram apresentadas no decorrer dos anos, como prioris do tipo *Markov Random Fields* (Neves et al., 2016; Watanabe et al, 2018).

Este trabalho aborda o caso do problema de estimativa de fluxo de calor que varia abruptamente espacialmente, em duas dimensões, e suavemente no tempo, aplicado a uma placa metálica retangular. É proposta a utilização de técnica do tipo *Markov Random Fields* (MRV), em particular *Total Variation* (TV) no espaço e Gaussiana Suave (GS) no tempo, para regularização do problema. Além disso, o parâmetro de regularização da técnicas GS proposta foi estimado através de um sistema hierárquico em que este é tomado como um hiperparâmetro e estimado como parte do problema de inferência Bayesiana.

A abordagem proposta permitiu a obtenção de resultados regularizados para o caso testado neste trabalho. O fluxo de calor foi reconstruído e regularizado satisfatoriamente e o parâmetro de regularização da priori modelada na forma GS, aqui tratado como um hiperparâmetro, foi estimado como parte do problema inverso de forma bem sucedida.

2. PROBLEMA DIRETO

Considere o problema de condução de calor transiente bidimensional, gerado pela aplicação de um fluxo de calor que varia nas direções x , y e temporalmente (i.e. em t), $q(x, y, t)$, na superfície inferior ($z = 0$) de uma placa termicamente fina, de dimensões $L_x \times L_y \times L_z$, sujeita à condição inicial $T(x, y, z, 0) = T_\infty$, enquanto sua superfície oposta ($z = L_z$) é sujeita à troca de calor por convecção com o ambiente a uma temperatura T_∞ com um coeficiente de troca térmica h (conforme Fig. (1)). Assume-se que a espessura, L_z , da placa é menor o suficiente do que sua largura, L_y , e seu comprimento, L_x , para que as perdas de calor nas extremidades sejam negligenciadas (Orlande et al, 2014).

Considerando que não haja geração de calor volumétrica no interior da placa, este problema físico é modelado com a equação de condução de calor em regime transiente (Eq. (1)). (Incropera et al., 2014):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho c_p \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} \quad (1)$$

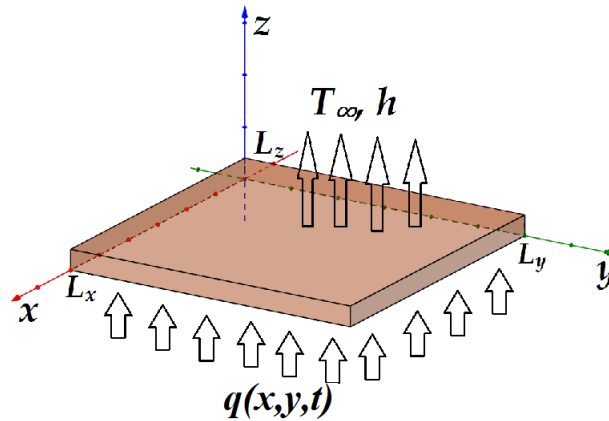


Figura 1- Representação esquemática do problema físico.

onde ρ é a massa específica (kg/m^3), c_p é o calor específico ($J/(kg \cdot K)$), e k é a condutividade térmica ($W/(m \cdot K)$), que é considerada constante. Usando a difusividade térmica, $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$, é possível reescrever a Eq. (1) na seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} \quad (2)$$

As condições de contorno e inicial impostas ao problema são dadas por

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = q(x, y, t) \quad (3)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=L_z} = h (T - T_\infty) \quad (4)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (5)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L_x} = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=L_y} = 0 \quad (6)$$

e

$$T(x, y, z, 0) = T_\infty \quad (7)$$

onde L_x , L_y e L_z são, respectivamente, a largura da placa em x e y , e a espessura em z , e T_∞ representa a temperatura ambiente.

O fluxo de calor (em W/m^2) imposto na superfície em $z = 0$ é descrito pela Eq. (8) e têm sua forma apresentada na Fig. (2).

$$q(x, y, t) = \begin{cases} 1000 \left| \sin \left(\frac{\pi t}{300} \right) \right| & \text{se } 0,02 \text{ m} \leq x \leq 0,04 \text{ m}; 0 \leq y \leq 0,02 \text{ m} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8)$$

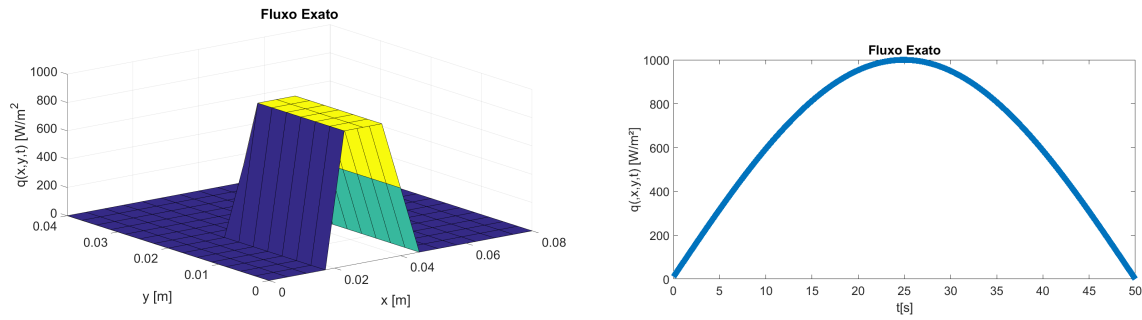


Figura 2- Representação da variação bidimensional do fluxo de calor imposto no problema no tempo $t = 30 \text{ s}$ (a); Variação temporal do fluxo no ponto do espaço $x = 0,03 \text{ m}$ e $y = 0,01 \text{ m}$ (b).

Se o número de Biot calculado considerando a direção z for pequeno o suficiente, é razoável aplicar o método da capacitância global (*Lumped Formulation*) (Incropera et al., 2014). Definindo

$$\bar{T}(x, y, t) = \frac{1}{L_z} \int_0^{L_z} T(x, y, z, t) dz \quad (9)$$

em que \bar{T} é a temperatura média na direção z , aplica-se o operador $\frac{1}{L_z} \int_0^{L_z} (\cdot) dz$ nas condições de contorno e na condição inicial e opera-se então a Eq. (2), obtendo-se

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{1}{L_z} \left(k \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \Big|_{z=L_z} - k \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \Big|_{z=0} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}(x, y, t)}{\partial t} \quad (10)$$

ou ainda

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{1}{L_z} (-h(\bar{T} - T_\infty) + q(x, y, t)) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}(x, y, t)}{\partial t} \quad (11)$$

sendo que, para o que segue, será utilizada a notação T para designar \bar{T} , por motivos de simplificação e clareza na notação.

O problema proposto foi resolvido numericamente aplicando o Método de Diferenças Finitas com o *software MatLab*[®]. Utilizando aproximações de segunda ordem no espaço e de primeira ordem no tempo, a Eq. (11) é aproximada explicitamente por

$$\begin{aligned} T_{i,j}^{k+1} &= T_{i,j}^k (1 - 2(\varphi_x + \varphi_y) - \lambda) + \\ &+ (\varphi_x (T_{i-1,j}^k + T_{i+1,j}^k) + \varphi_y (T_{i,j-1}^k + T_{i,j+1}^k)) + \lambda \left(\frac{q_{i,j}^n}{h} + T_\infty \right) \end{aligned} \quad (12)$$

com $\varphi_x = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$, $\varphi_y = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2}$ e $\lambda = \frac{h \Delta t}{L_z \rho c_p}$.

A convergência da solução do método foi verificada com a solução gerada intrinsecamente pelo *Mathematica*[®] com a rotina *NDSolve*.

3. PROBLEMA INVERSO

A formulação do problema inverso é feita a partir de dados experimentais simulados. Para isso é adicionado ruído à solução do problema direto calculado empregando os valores exatos das incógnitas, fornecendo um total de $D = N_x \times N_y \times N_t$ medidas, sendo $N_x \times N_y$ sensores e N_t medidas obtidas com cada sensor. O vetor de dados experimentais pode ser expresso como

$$\mathbf{Y}^T = (Y_1, Y_2, \dots, Y_D) \quad (13)$$

onde $Y_i, i = 1, 2, \dots, D$, corresponde à medição em uma posição da malha em um determinado instante de tempo.

Uma malha com $NP_x \times NP_y$ nós e NP_t passos no tempo, sendo $NP_x < N_x, NP_y < N_y$ e $NP_t < N_t$, é utilizada para estimar o fluxo de calor $q(x, y, t)$, levando a $DP = NP_x \times NP_y \times NP_t$ parâmetros a serem estimados. Observe-se que $DP < D$. O vetor de estimativas para os parâmetros procurados pode ser descrito como

$$\mathbf{P}^T = (q_1, q_2, \dots, q_{DP}) \quad (14)$$

Uma abordagem Bayesiana, especificamente o método de Monte Carlo com Cadeias de Markov (MCMC), foi utilizada para obtenção da solução do problema inverso. A escolha se dá na medida que possibilita combinar informações *a priori* no cálculo das estimativas por meio do teorema de Bayes (Kaipio & Somersalo, 2004). Essa característica é fundamental para a regularização de problemas inversos de grande porte, em que muitos parâmetros são estimados. A solução do problema consiste na determinação da densidade de probabilidade *a posteriori*, expressa por

$$\pi_{post}(\mathbf{P}) = \pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y}) = \frac{\pi_{prior}(\mathbf{P})\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})}{\pi(\mathbf{Y})} \quad (15)$$

onde $\pi_{post}(\mathbf{P})$ representa a distribuição posterior de probabilidade dos parâmetros \mathbf{P} , $\pi_{prior}(\mathbf{P})$ a distribuição de probabilidades dos dados *a priori*, $\pi(\mathbf{Y})$ a distribuição marginal de probabilidade dos dados experimentais, que desempenha papel de constante de normalização e $\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})$, a função de verossimilhança, expressa analiticamente na forma

$$\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}) = (2\pi)^{-D/2}|W|^{-1/2} \times \exp \left[-\frac{1}{2}[\mathbf{Y} - T(\mathbf{P})]^T W^{-1}[\mathbf{Y} - T(\mathbf{P})] \right] \quad (16)$$

em que D é a quantidade de medidas experimentais, W é a matriz de covariâncias dos erros destas medidas e $T(\mathbf{P})$ é o vetor contendo a solução do problema direto dados os valores de \mathbf{P} , nas mesmas posições e instantes no tempo em que são obtidas as medidas experimentais.

A implementação do MCMC é realizada por meio do algoritmo Metropolis-Hastings, descrito detalhadamente por Kaipio & Somersalo (2004), para gerar a amostragem de candidatos para a distribuição *a posteriori*. A implementação se inicia com a seleção de uma densidade de probabilidade de movimentação $p(\mathbf{P}^*, \mathbf{P}^{(t-1)})$, que é utilizada para gerar um candidato (\mathbf{P}^*) para o novo estado da cadeia, dado o estado anterior $\mathbf{P}^{(t-1)}$. Criando assim a sequência $\{\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \dots, \mathbf{P}^n\}$, que deve convergir para a solução procurada.

A regularização é uma etapa importante na solução de problemas inversos, especialmente quando há muitos parâmetros a serem estimados. Para modelar as informações *a priori*, são empregadas abordagens do tipo *Markov Random Fields* (MRF), especificamente o modelo *Total Variation* (TV) no espaço, em duas dimensões, e o modelo Gaussiana Suave (GS) temporalmente (Mescolin et al., 2016), descritas, respectivamente, como

$$\pi(\mathbf{P}) \propto \exp \left[-\frac{\gamma_{tv}}{2} TV(\mathbf{P}) \right] \text{ e } \pi(\mathbf{P}) \propto \exp \left[-\frac{\gamma_{gs}}{2} GS(\mathbf{P}) \right] \quad (17)$$

sendo γ_{tv} e γ_{gs} os parâmetros de regularização e onde, para o caso estudado,

$$TV(\mathbf{P}) = \sum_{i=2}^{NP_x-1} \sum_{j=2}^{NP_y-1} \sum_{k=1}^{NP_t} \Delta x \left[|q_{i,j}^k - q_{i+1,j}^k| + |q_{i,j}^k - q_{i-1,j}^k| \right] + \Delta y \left[|q_{i,j}^k - q_{i,j+1}^k| + |q_{i,j}^k - q_{i,j-1}^k| \right] \quad (18)$$

e

$$GS(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{NP_x} \sum_{j=1}^{NP_y} \sum_{k=1}^{NP_t-1} [q_{i,j}^{k+1} - q_{i,j}^k]^2 \quad (19)$$

O parâmetro γ_{gs} que aparece na Eq. (17) é tratado, neste trabalho, como um hiperparâmetro. Sendo assim, com um modelo hierárquico, é possível estimá-lo como parte do problema de inferência Bayesiana. As propostas do hiperparâmetro são geradas através de uma hiperpriori, aqui modelada na forma de uma distribuição uniforme. Considerando a combinação das duas prioris escolhidas, sendo a TV para a regularização espacial e a GS para a regularização temporal, a priori é modelada da seguinte forma (Kaipio & Somersalo, 2004; Abreu et al, 2013):

$$\pi(\mathbf{P}) \propto \gamma_{gs} \exp \left[-\frac{\gamma_{tv}}{2} \sum_{i=2}^{NP_x-1} \sum_{j=2}^{NP_y-1} \sum_{k=1}^{NP_t} \Delta x \left[|q_{i,j}^k - q_{i+1,j}^k| + |q_{i,j}^k - q_{i-1,j}^k| \right] + \Delta y \left[|q_{i,j}^k - q_{i,j+1}^k| + |q_{i,j}^k - q_{i,j-1}^k| \right] - \frac{\gamma_{gs}}{2} \sum_{i=1}^{NP_x} \sum_{j=1}^{NP_y} \sum_{k=1}^{NP_t-1} [q_{i,j}^{k+1} - q_{i,j}^k]^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_{gs}}{\gamma_{gs0}} \right)^2 \right] \quad (20)$$

onde $\gamma_{gs0} > 0$ é o centro da distribuição de Rayleigh.

4. RESULTADOS

Neste trabalho, foi considerado o caso de uma placa retangular, com dimensões $0,08 m \times 0,04 m$ e $0,002 m$ de espessura. A simulação teve duração de 50 segundos e as propriedades do material simulado são próximas àquelas dos utilizados na manufatura de *chips* eletrônicos, com $k = 0,2 W/mK$ e $\rho c_p = 960.400 J/m^3 K$. O coeficiente de transferência de calor por convecção escolhido foi de $h = 12 W/m^2 K$, com $T_\infty = 20^\circ C$. O fluxo, em W/m^2 , que pretende-se estimar é o descrito pela Eq. (8), que consiste em uma função com variações abruptas no espaço e suave no tempo.

A malha utilizada para estimação do fluxo possui $15 \times 15 \times 50$ nós, o que leva a 11.250 parâmetros a serem estimados, q_{ij}^k , com $i, j = 1, 2, \dots, 15$ e $k = 1, 2, \dots, 50$, que são organizados conforme representado na Eq. (14), com $DP = 11.250$. Os dados experimentais foram simulados adicionando um ruído com distribuição Gaussiana, média zero e desvio padrão $\sigma = 0,0001^\circ C$ à solução convergida do problema direto calculada via diferenças finitas. As propostas para as estimativas do fluxo de calor a serem utilizadas no MCMC são distribuições normais com desvio padrão $\sigma = 0,05 W/m^2$. Foram calculados 1.000.000 estados na cadeia de Markov, sendo os 200.000 primeiros descartados.

Devido ao elevado número de parâmetros a serem determinados, faz-se necessário o uso de técnicas de regularização para o problema, na forma de informação *a priori*, do tipo *Markov Random Fields*. Para a regularização espacial, que apresenta variações abruptas no valor do fluxo, foi utilizada a formulação *Total Variation* e para a regularização temporal, com variação suave dos valores apresentados pelo fluxo térmico, foi utilizada a formulação Gaussiana Suave.

Nas Figs. (3a-c) é possível ver o traçado sobreposto de cortes do fluxo exato e estimado, respectivamente, nas direções x , y e no tempo. É possível notar que o fluxo térmico estimado aproxima o traçado do fluxo térmico exato em todos os cortes apresentados.

A Fig. (3d), por sua vez, apresenta o resíduo deixado entre as soluções do problema direto resolvido com o fluxo exato e estimado. Nota-se que os valores calculados variam entre $-0,4^\circ C$ e $0,2^\circ C$.

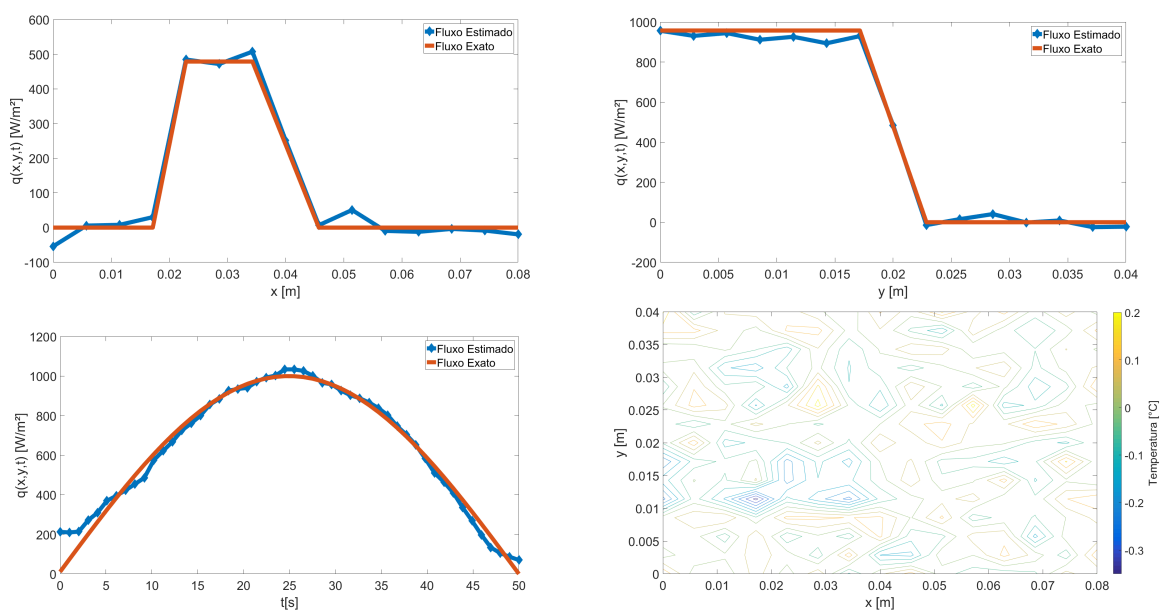


Figura 3- Comparativo entre fluxo exato e estimado nas direções x , em $q(x, 0, 01, 30)$ (a), y , em $q(0, 03, y, 30)$, e na evolução temporal, em $q(0, 03, 0, 01, t)$ (c); e resíduo entre as soluções do problema direto resolvido com fluxo térmico exato e estimado (d).

A convergência das cadeias de Markov para diferentes pontos da malha pode ser conferida nas Figs. (4a), num ponto onde $q(x, y, t) = 0$ e (4b), num ponto onde $q(x, y, t) = 1000 W/m^2$. Em ambos os casos é possível notar que as cadeias convergiram para os valores esperados de acordo com o modelo utilizado para a simulação dos dados experimentais.

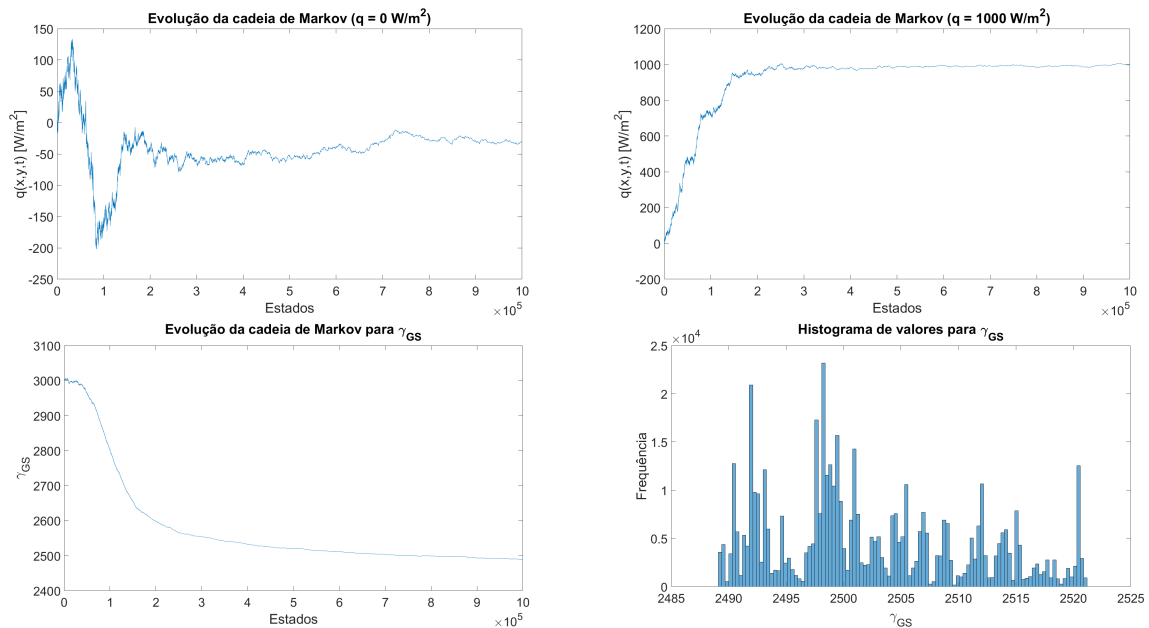


Figura 4- Evolução das Cadeias de Markov para fluxo $q(x, y, t) = 0$ (a); Evolução das Cadeias de Markov para fluxo $q(x, y, t) = 1000 \text{ W/m}^2$ (b); Evolução das Cadeias de Markov para estimativa do hiperparâmetro γ_{gs} (c); e histograma da estimativa do hiperparâmetro γ_{gs} (d).

Na Fig. (4c) é apresentada a evolução de estados da cadeia de Markov para a estimativa do hiperparâmetro γ_{gs} . É possível observar a convergência dos estados para valores próximos a 2500. Esse fato é melhor ilustrado com o histograma apresentado na Fig. (4d). O centro da moda para a distribuição de Rayleigh foi $\gamma_{gs0} = 3000$ e passo $\sigma_{\gamma_{gs}} = 0,01$ na geração de candidatos na cadeia de Markov.

5. CONCLUSÕES

Neste estudo foi apresentada uma abordagem eficaz para a solução do problema de reconstrução de um fluxo de calor com variação espacial bidimensional e temporal. Os resultados obtidos mostram que a solução obtida representa uma boa aproximação para o fluxo térmico exato. Além disso, a solução do problema inverso foi automaticamente regularizada em sua evolução temporal com um algoritmo hierárquico que se mostrou capaz de estimar o hiperparâmetro de regularização da priori na forma Gaussiana Suave.

Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte financeiro da FAPERJ, do CNPq e da CAPES. O primeiro autor agradece o suporte financeiro do Instituto Federal Fluminense, instituição na qual é professor.

REFERÊNCIAS

- Abreu, L. A. S., Orlande, H. R. B., Colaço, M. J. (2017), “Gaussian Hypermodel Applied to Failure Analysis of Laminated Composites”. *Proceedings of the 7th International Conference on Mechanics and Materials in Design*, Albufeira, Portugal.
- Condat, L. (2013), A Direct Algorithm for 1D Total Variation Denoising. *IEEE Signal Processing Letters*, 20, 1054-1057.
- Hetsroni, G., Mosyak, A., Segal, Z. (2001), Nonuniform Temperature Distribution in Electronic Devices Cooled by Flow in Parallel Microchannels. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, vol. 24, no. 1, pp. 16-23.
- Incropera, F. P., Dewitt, D. P., Bergman, T. L., and Lavine, A. S. (2014), “*Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*”, 7ª ed., LTC Editora.
- Kaipio, J., and Somersalo E. (2004), “*Statistical and Computational Inverse Problems*”, Springer, USA.
- Knupp, D. C.; Abreu, L. A. S. (2016), Explicit Boundary Heat Flux Reconstruction Employing Temperature Measurements Regularized via Truncated Eigenfunction Expansions. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 78, 241-252.
- Mescolin, M. F., Abreu, L. A. S., Knupp, D. C. e Silva Neto, A. J. (2016), “Estimation of Spatially and Time Varying Heat Flux via Markov chain Monte Carlo Method and Integral Transforms”, *Proceedings of ENCIT (Encit 2016)*, Vitória.
- Neves, G. T. S., Abreu, L. A. S., Knupp, D. C. e Silva Neto, A. J. (2016), “Estimativa de Fluxo de Calor Bidimensional com Variação Temporal Empregando o Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov”, *Proceedings Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, São José dos Campos.
- Orlande, H. R. B.; Dulikravich, G. S.; Neumayer, M.; Watzgenig, D.; Colaço, M. J. (2014), Accelerated Bayesian Inference for the Estimation of Spatially Varying Heat Flux in a Heat Conduction Problem. *Numerical Heat Transfer Part A-Applications*, 65:1, 1-25.
- Rudin, L. I.; Osher, S.; Fatemi, E. (1992), Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Physica D*, 60, 259-268.
- Silva Neto, A. J.; M. N. Özisik (1993), Simultaneous Estimation of Location and Timewise-Varying Strength of a Plane Heat Source. *Numerical Heat Transfer Part A-Applications*, 24, 467-477.
- Su, J.; Silva Neto A. J. (2001), Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem of Source Strength Estimation in Cylindrical Rods. *Applied Mathematical Modelling*, 25, 861-872.
- Watanabe, E.; Neves, G. T. S., Abreu, L. A. S., Knupp, D. C. e Silva Neto, A. J. (2018), Aplicação da Técnica Total Variation Denoising (TVD) na Regularização de um Problema Inverso de Estimativa de Fluxo de Calor, *CEREUS*, vol. 10, no. 2, pp. 180-192.

INVERSE PROBLEM OF HEAT FLUX ESTIMATION WITH SPACE AND TEMPORAL VARIATION WITH REGULARIZATION BY MARKOV RANDOM FIELDS AND HIERARCHICAL MODEL FOR HYPERPARAMETER ESTIMATION

Abstract. *This work addresses the problem of heat flux estimation with abrupt two-dimensional spatial and smooth temporal variations applied to one of the surfaces of a stainless steel plate. The direct problem is solved using the finite difference method. The solution of the inverse problem is obtained using a Bayesian approach, using the Monte Carlo with Markov Chains Method. For the regularization of the inverse problem it is proposed the application of the techniques Total Variation in space and Gaussian Smoothness in time, both Markov Random Fields (MRF) priors. The Gaussian Smoothness prior is regularized automatically through a hierarchical model of estimation of hyperparameters.*

Keywords: *Inverse Problems, Heat Flux Estimation, Bayesian Inference, Markov Random Fields*