

08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE BLASIUS

Thiago Bissiatte Monteiro¹ - tbissiatte@gmail.com

Alexandre Celestino Leite Almeida² - celestino@ufsj.edu.br

Adécio C. Oliveira² - e-mail adelcio@ufsj.edu.br

¹Programa de Pós Graduação em Física - UNIFAL-MG, UFLA e UFSJ - Ouro Branco, MG, Brazil

² Departamento de Estatística, Física e Matemática, Ouro Branco, MG, Brazil

Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Alto Paraopeba - Ouro Branco, MG, Brazil

Resumo. Neste trabalho é estudada a equação de Blasius. Ela foi originalmente proposta para estudar a espessura da camada limite de um fluido que passa sobre uma superfície sendo que a velocidade relativa entre o fluido e a parede é não nula mas efeitos térmicos são desprezíveis. É uma equação diferencial de terceira ordem não linear que, como será mostrado, faz parte dos modelos de difusão anômala utilizando-se de equações diferenciais de ordem superior. Além disso, mostra-se que usando o método de Otimização de Parâmetros, pode-se obter uma solução numérica precisa para a equação de Blasius, transformando o problema de contorno em um problema de valor inicial.

Palavras-Chave: Equação de Blasius, Difusão, Camada Limite, Método de Otimização de Parâmetros, Equação de Myers

1. INTRODUÇÃO

A difusão anômala é um assunto com crescente interesse e várias abordagens distintas (Tsallis e Lenzi, 2002; Tsallis e Bukman, 1996). Alguns resultados experimentais recentes (Combe et al., 2015; Miramontes et al., 2014; Paiva et al., 2013) apontam na direção de que ela deve ser mais comum do que o termo anômalo deixa subentendido, tendo aplicações em várias áreas tais como estudo de sistemas caóticos, sistemas biológicos e até mesmo na dinâmica econômica (Hidalgo e Tello, 2017; Wegler, 2004; Hughes e Armitage, 2010; Sornette, 2003). Em relação aos processos anômalos aplicados à eletroquímica, Oliveira e colaboradores (Oliveira et al., 2013; Vieira e Oliveira, 2017) mostraram que a abordagem de campo médio é eficaz para reproduzir o comportamento da curva de polarização de uma membrana de transporte iônica, comparando com o modelo PS (Sistat e Pourcelly, 1999), o que fica claro nas observações numéricas, nesse modelo, a anomalia é provocada pela interação das partículas com um campo externo. Também mostraram que uma generalização do modelo PS pode ser facilmente obtida no caso de densidade de carga constante (no tempo) no interior da membrana, mas no estado estacionário a densidade de carga depende da corrente através da membrana. Possivelmente a difusão anômala

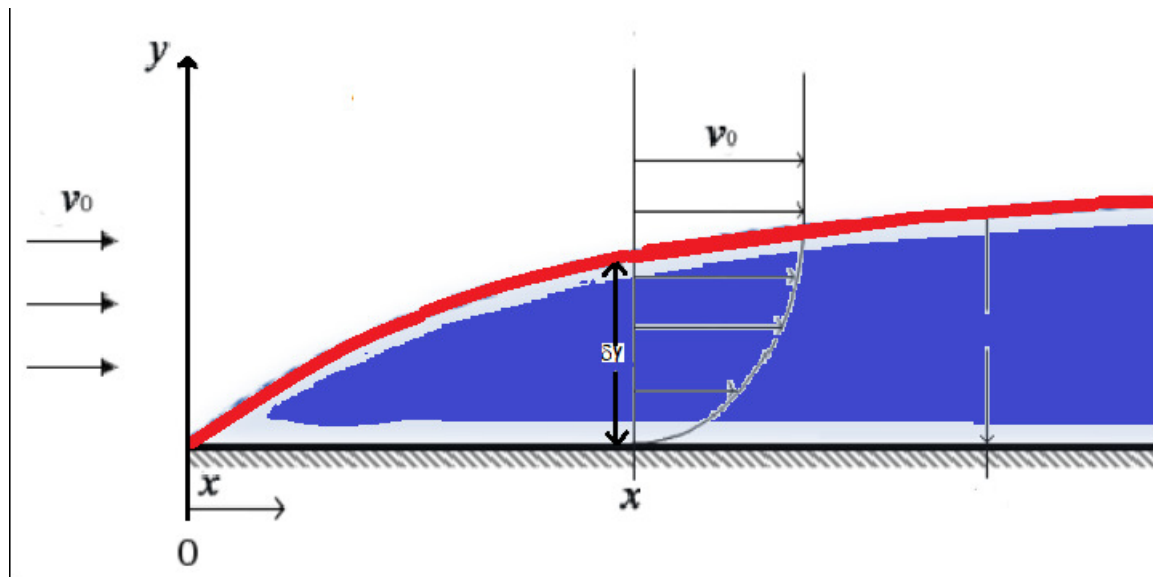


Figura 1- Camada Limite

está associada aos processos quânticos já que estes por sua vez demandam a inclusão de efeitos difusivos para explicar o comportamento aparentemente clássico dos objetos macroscópicos (Oliveira et al., 2006; Oliveira e Amarante-Segundo, 2009).

Processos anômalos têm tantos exemplos de aplicação na ciência básica que obviamente não poderia deixar de estar presente nas aplicações de Engenharia e Medicina (David et al., 2011; Capelas et al., 2011; Loverro, 2004; Peng et al., 1993). Machado e Galhano sugerem que o cálculo fracionário é útil para o projeto de hélices distribuídas na aviação (Machado e Galhano, 2018), a idéia é fazer uma analogia entre o sistema aerodinâmico e um sistema elétrico. Carpinteri, Chiaia, e Cornetti argumentam como a microestrutura de materiais agregados é modelada por fractais em vez de conjuntos inteiros (Carpinteri et al., 2001). Em outra área de aplicação, sabe-se que teoria padrão de lubrificação leva a uma equação parabólica de quarta ordem que não obedece a equação de difusão normal (Myers, 1998, 1996), sendo mais um caso de difusão anômala. Esse tipo de equação está diretamente relacionada com a equação de Landau-Levich (Landau e Levich, 1942). O problema de Blasius (Blasius, 1908) consiste no estudo da camada limite de um fluido que passa próximo a uma superfície plana. A modelagem é por meio de um sistema de equações diferenciais de terceira ordem que é um caso particular da equação para filmes finos de (Myers, 1998), assim, pode-se dizer que é um tipo de equação de difusão anômala.

2. EQUAÇÃO DE BLASIUS

A camada limite é uma região do escoamento próximo a uma parede, na qual os efeitos viscosos são apreciáveis, veja Figura 1.

A placa é considerada plana, portanto a altura da camada limite é uma função de x (Figura 1), e é o objeto de cálculo. Admitindo escoamento em regime permanente, incompressível e laminar, dissipação viscosa desprezível e propriedades do fluido constantes, seguindo de perto (Icropera e DeWitt, 2012), tem-se que

$$u = \frac{dx}{dt}$$
$$v = \frac{dy}{dt},$$

em que u e v são as velocidades na direção x e y respectivamente. Da equação da continuidade, tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

E a equação do momento é

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

em que faz-se $\frac{\partial p}{\partial x} \approx 0$. Usando a equação da energia obtém-se

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (3)$$

já que a força viscosa é desprezível, tem-se

$$\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \approx 0. \quad (4)$$

Para conservação de massa tem-se

$$u \frac{\partial \rho_A}{\partial x} + v \frac{\partial \rho_A}{\partial y} = D_{AB} \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial y^2}. \quad (5)$$

Agora definindo uma nova relação para u e v em termos de um potencial ψ

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{and} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6)$$

tem-se que a equação (1) é automaticamente satisfeita. Agora, definindo uma nova função f na forma

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{u_\infty \nu x}} \quad (7)$$

e

$$\eta = \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} y \quad (8)$$

tem-se portanto que

$$u = u_\infty \frac{df}{d\eta} \quad (9)$$

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_\infty}{xv}} \left(\eta \frac{df}{d\eta} - f \right). \quad (10)$$

Agora usando propriedades da regra da cadeia, tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_\infty}{2x} \sqrt{\frac{u_\infty}{vx}} \frac{d^2 f}{d\eta^2} = -\frac{u_\infty}{2x} \eta \frac{d^2 f}{d\eta^2} \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{vx}} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_\infty^2}{vx} \frac{d^3 f}{d\eta^3}, \quad (13)$$

desta forma chega-se a Equação de Blasius que é

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad (14)$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f'(\infty) = 1. \quad (15)$$

Para a temperatura tem-se que

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + \frac{\text{Pr}}{2} f \frac{dH}{d\eta} = 0 \quad (16)$$

$$H(0) = 0, H(\infty) = 1, \quad (17)$$

sendo

$$H = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty}. \quad (18)$$

Finalmente o sistema é reduzido a

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + \frac{\text{Pr}}{2} f \frac{dH}{d\eta} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad (20)$$

Com as condições de contorno dadas por $H(0) = 0$, $\lim_{\eta \rightarrow \infty} H(\eta) = 1$, $f(0) = \frac{df}{d\eta}(0) = 0$ e $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{df}{d\eta}(\eta) = 1$.

A solução para a temperatura H pode ser obtida facilmente definindo uma nova variável Θ e uma nova função γ na forma

$$\Theta = \frac{dH}{d\eta}, \quad (21)$$

$$\gamma(\eta) = \int_0^\eta f(u) du. \quad (22)$$

Tanto Θ como H podem agora ser escritos como função de γ e são dados por

$$\Theta(\eta) = \Theta(0) \exp \left[-\frac{\text{Pr}}{2} \gamma(\eta) \right] \quad (23)$$

$$H(\eta) = \int_0^\eta \Theta(0) \exp \left[-\frac{\text{Pr}}{2} \gamma(u) \right] du \quad (24)$$

onde $\Theta(0)$ é

$$\Theta(0) = \frac{1}{\int_0^\infty \exp \left[-\frac{\text{Pr}}{2} \gamma(u) \right] du}. \quad (25)$$

Como o sistema dados pelas equações (19) e (20) é um sistema de contorno não linear com condição no infinito, logo é de difícil solução, tanto numericamente quanto analiticamente. Embora Liao tenha encontrado uma solução analítica via série de Liao (Shijun, 2012), entretanto, a mesma é de complexa análise e portanto de difícil obtenção dos dados assim, utiliza-se e o método de otimização de parâmetros (Oliveira, 2019) para resolver o sistema. A grande vantagem da abordagem de Blasius é que as equação da camada (f) passa a não depender da temperatura (H) mas o gradiente de temperatura é função de camada (f).

3. DIFUSÃO ANÔMALA VIA DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

A tensão superficial na teoria padrão de lubrificação (Myers, 1998) leva a uma equação parabólica não-linear de quarta ordem que é da forma

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ C \frac{h^3}{3} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + f\left(h, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) \right\} \quad (26)$$

em que $h = h(x, t)$ é a altura do filme de fluido. No regime estacionário essa equação se reduz

$$C \frac{h^3}{3} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + f\left(h, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) = K \quad (27)$$

em que K é uma constante. Esta equação tem sido usada para modelar fluxos de fluidos em vários casos, como revestimento, drenagem de espumas entre outros (Myers, 1998, 1996). A difusão com retenção proposta por Bevilacqua e colaboradores (Bevilacqua et al., 2011a, 2013, 2016, 2011b) é um caso particular desse tipo de processo. Entretanto (Almeida e Oliveira, 2018) salientam que esse tipo de processo não é dedutível a partir de um processo com retenção.

Seguindo nesta linha, como caso particular, o problema de modelagem para filmes finos tem sido objeto de estudo.

3.1 Equação de Blasius a partir da Equação de Myers

A equação 26 em seu regime estacionário é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ G(h) \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + f\left(h, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) \right\} = 0. \quad (28)$$

A equação de Blasius é obtida fazendo-se $G(h) = 1$, e $f = \frac{1}{2}h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ e $K = 0$, assim tem-se

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{1}{2}h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0. \quad (29)$$

Como pode-se ver, a equação de Blasius é na verdade um caso particular da equação de Myers e portanto, também pode ser considerada como uma espécie de modelo difusão via derivadas de ordem superior, sendo assim, a primeira equação do tipo.

4. MÉTODOS

Para solução da equação de Blasius utilizamos o método de Otimização de Parâmetros (Oliveira, 2019) para isso, considera-se o estado estacionário regido pela Equação (29), da qual diretamente obtem-se

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{1}{2}h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0. \quad (30)$$

As condições de contorno foram fixadas para $x \in [0, \infty)$, sendo conhecidas $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$ e $h'(\infty) = 1$. E de valor inicial $h''(0)$ é desconhecido. O nosso objetivo é transformar esse problema de contorno em um problema de valor inicial. Assim, reescreve-se a Equação 30 na forma vetorial, fazendo $Y_1(x) = h(x)$, $Y_2(x) = h'(x)$, $Y_3(x) = h''(x)$, e obtem-se sistema:

$$\begin{bmatrix} Y_1' \\ Y_2' \\ Y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ -\alpha Y_1 Y_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

O vetor de condições iniciais é

$$\begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \\ Y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \quad (32)$$

sendo z desconhecido. A constante α é um parâmetro livre sendo que para $\alpha = \frac{1}{2}$ o sistema representa a equação de Blasius original (Blasius, 1908).

Agora, define-se a função objetivo a ser minimizada na forma:

$$Obj(z) = [Y_2(z, \eta_\infty) - 1]^2 + [Y_3(z, \eta_\infty)]^2 \quad (33)$$

em que $Y_i(z, x)$ é a solução em x do problema de valor inicial dado pelas equações (31) e (32) observados os valores de (z, η_∞) . A variável η_∞ é o limite de integração usado para representar infinito.

O método consiste, então, em achar uma solução para o seguinte problema de otimização:

$$(z^*, \eta_\infty^*) = \arg \min_{z, \eta_\infty} Obj(z, \eta_\infty). \quad (34)$$

Os valores (z^*, η_∞^*) completam a parte desconhecida do PVI em questão, e uma solução pode ser encontrada. Em princípio, η_∞ deveria ser infinito, entretanto, a solução pode ser encontrada para $\eta_\infty \gg 1$ sendo que a solução converge para valores relativamente pequenos de η_∞ . O método de otimização utilizado neste trabalho foi o método do gradiente, mas qualquer método pode ser usado.

α	Otimização		Fazio	
	$F''(0)$	Obj_n	$F''(0)$	Obj_n
1/2	0.3320573362156	$\ll 1E-20$	0.332057336215	8.79E-13
1	0.4695999883613	$\ll 1E-20$	0.469599988361	3.09E-13

Tabela 1- Comparação entre os resultados encontrados via otimização de parâmetros e os resultados encontrados por (Fazio, 1992).

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção mostra-se nossos resultados numéricos e compara-se com os encontrados por (Fazio, 1992). Como pode-se ver na Tabela 1, os resultados encontrados pelo método de otimização de parâmetros e o resultados encontrados por (Fazio, 1992) estão em perfeito acordo.

Os resultados encontrados via otimização apresentam uma pequena precisão maior que o resultado de (Fazio, 1992) (apenas uma casa decimal a mais), entretanto, a função objetivo é bem menor, está no limite da precisão do método usado. entretanto, os resultados ainda podem ser melhorados caso seja usado um passo menor na integração, no nosso caso, usando $\Delta x = 10^{-5}$.

6. CONCLUSÃO

Os resultados numéricos obtidos mostram claramente que o Método de Otimização de Parâmetros é eficaz para solução da equação de Blasius. A sua implementação é simples e apenas inclui um método de otimização padrão. Como isso, demanda baixo recurso computacional e pouco treinamento do usuário. Além disso, pode-se ver que a equação de Blasius é um caso particular da equação de Myers e portanto já carrega na sua modelagem o componente anômalo.

Agradecimentos

Os autores agradecem a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), através do termo APQ-01366-16.

REFERÊNCIAS

- Almeida, A. C. L. & Oliveira, A. C. .Diffusion processes modeled with higher order differential terms. Far East Journal of Applied Mathematics, V. 100, N.1, 2018, Pages 1-10.
- Bevilacqua, L., Galeão, A. C., and Costa, F. P. A new analytical formulation of retention effects on particle diffusion processes. *Anais da Academia Brasileira de Ciências* 83 12 , 1443 – 1464 (2011a).
- Bevilacqua, L., Galeão, A. C. N. R., and Costa, F. P. On the significance of higher order differential terms in diffusion processes. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 33 , 166 – 175 (2011b).
- Bevilacqua, L., Galeão, A. C. N. R., Simas, J. G., and Doce, A. P. R. A new theory for anomalous diffusion with a bimodal flux distribution. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 35, 4 (Nov 2013), 431–440.
- Bevilacqua, L., Jiang, M., Silva Neto, A., and Galeão, A. C. R. N. An evolutionary model of bi-flux diffusion processes. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 38, 5 (Jun 2016), 1421–1432.
- Blasius, H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 56:1-37; 60: 397-398 (1908). Engl. transl. in NACA TM 1256.

- E. C. de Oliveira and J. A. T. Machado, A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral, *Mathematical Problems in Engineering*, vol 2014, (2014), Article ID 238459, doi 10.1155/2014/238459
- Carpinteri, A., Chiaia, B., Cornetti, P.; Static-Kinematic duality and the principle of virtual work in the mechanics of fractal media, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191 (2001) 3-19.
- Gaël Combe, Vincent Richefeu, Marta Stasiak, and Allbens P.F. Atman, *Phys. Rev. Lett.* 115, 238301, (2015).
- S.A. David and J.L. Linares and E.M.J.A. Pallone, Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications, *Rev. Bras. Ensino Fís.* vol.33 no.4 São Paulo Oct./Dec. (2011), <http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172011000400002>
- R. Fazio, The Blasius problem formulated as a free boundary value problem, *Acta Mechanica* 95, 1-7 (1992).
- Hidalgo, A. & Tello, L., Numerical simulation of a porous medium-type atherosclerosis initiation model, *Computers and Fluids* (2017), doi:10.1016/j.compfluid.2017.07.019
- Hughes, A. L. H. & Armitage, P; J., Particle Transport in Evolving Protoplanetary Disks: Implications for Results from Stardust, *The Astrophysical Journal*, Volume 719, Number 2 (2010).
- Incropera, F. P. & DeWitt, D. P. (2002). *Fundamentals of heat and mass transfer*. New York: J. Wiley.
- Landau, L. & Levich, B., Dragging of a Liquid by a Moving Plate, *Acta Physicochimica URSS*, Vol. 17, No. 42, pp. 42-54 (1942).
- Adam Loverro, *Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer*, Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556, U.S.A., May 8, (2004)
- Machado, J. T. & Galhano, A. M., A fractional calculus perspective of distributed propeller design, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* **55** (2018) 174–182
- Miramontes, O. De Souza, O. Paiva, L. R., and Marins, A. e Orozco, S., *Plos One*, v. 9, p. e111183, (2014).
- Myers, T. G., *Thin Films with High Surface Tension*, Society for Industrial and Applied Mathematics Vol. 40, No. 3, pp. 441-462 (1998).
- Myres, T.G., *Surface tension driven thin film flows*, in *The Mechanics of Thin Film Coatings*, Wiley, (1996).
- Oliveira, A. C.; Amarante-Segundo, G. S. Tunnel effect as a hidden variable theory test. *Physica A*, v. 388, p. 1413-1418, 2009.
- Oliveira, A. C. de; J. G. Peixoto de Faria; Nemes, M. C. Quantum Classical Transition of the open quartic oscillator: The role of the environment. *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids and Related Interdisciplinary Topics*, v. 73, p. 46207, 2006.
- Oliveira, A. C., Using the Parameter Optimization Method for Solving Differential Equations with Contour Conditions, Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. to appear in (2019).
- Oliveira, A. C.; Amado, F. D. R. and Moura, R. C. A. Steady state of ion transport in homopolar ion-exchange membrane: a theoretical study. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, (2016),38, 1165-1170.
- Paiva, L.R; Silva, H. S.; Ferreira, S. C.; Martins, M. L., *Physical Biology (Online)*, v. 10, p. 025005, (2013).
- Paiva, L. R., Binny, C., Ferreira Jr., S. C., and Martins, M. L., A Multiscale Mathematical Model for Oncolytic Virotherapy, *Cancer Res*, 69. (3). February 1, (2009) p. 1205.
- Peng, C.K. et al. Long-range anticorrelations and non-Gaussian behavior of the heartbeat. *Phys. Rev. Lett.*, v. 70, p. 1343–1346, 1993.
- Liao, S.J. (2012), *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*, Berlin e Beijing: Springer e Higher Education Press.
- Sistat, P. & Pourcelly, G., (1999). *Jour. Elec Chem.*, **460**, 53.
- Sornette, D., *Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial System*, Princeton University Press, (2003).
- Tsallis, C. & Lenzi, E. K., *Chemical Physics* 284 (2002) 341–347.
- Tsallis, C. & Bukman, D. J., *Phys. Rev. E* 54, R2197(R) – (1996).
- Vlahos, L., Isliker, H., *Normal and Anomalous Diffusion: A Tutorial*, arXiv:0805.0419 [nlin.CD] (2008).
- Vieira, Igor Pereira; Oliveira, A. C. *Study of Diffusion Applied to Electrodialysis: Three-Dimensional Model in Cylindrical Coordinates*. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, (2016).
- Wegler, U., Diffusion of seismic waves in a thick layer: Theory and application to Vesuvius volcano, *Journal of Geophysical Research*, VOL. 109, B07303, (2004) doi:10.1029/2004JB003048.

NUMERICAL SOLUTION OF THE BLASIUS EQUATION

Abstract. *In this work the numerical solution of Blasius equation is studied. The proposal of (Blasius, 1908) was to study the boundary layer thickness of a fluid that passes by a fixed plane surface, the thermal changes are neglected. The Blasius equation is a nonlinear differential equation and as we show, it can represent anomalous diffusion process as a particular case of Myers equation (Myers, 1998). In addition, it is shown that using the parameter optimization method, it can be a precise solution for the Blasius equation, where a contour problem is shifted into an initial value problem.*

Keywords: Blasius Equation, Diffusion, Thin Films, Stationary Regime, Parameters Optimization Method