XXI ENMC
ENCONTRO NACIONAL DE MODELAGEM COMPUTACIONAL
IX ECTM
ENCONTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS

08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS APLICADO AO ESTUDO NUMÉRICO DE VIBRAÇÕES MECÂNICAS

Jacqueline Jesuina Xavier[1] – jacquejesuina1@hotmail.com
Jéssica de Oliveira Pinto Coelho[1] – jessicaoliveiracoelho1804@gmail.com
Adélcio C. Oliveira[2] – adelcio@ufsj.edu.br
[1] Discente de Engenharia Civil, Universidade Federal de São João Del-Rei - Ouro Branco, MG, Brazil
[2] Departamento de Física e Matemática, Universidade Federal de São João Del-Rei - Ouro Branco, MG, Brazil

Resumo: *Neste trabalho são investigados os modos de vibração de uma asa de aeronave com formato trapezoidal. Através da modelagem matemática, a asa é aproximada ao modelo de viga não linear de Euler Bernoulli. Para modelos onde a viga possui seção constante, já são conhecidos seus modos normais. O propósito do trabalho foi descobrir a solução para problemas com seções variáveis por meio da otimização. O parâmetro* σ *foi utilizado para representar a assimetria da viga e é a razão entre os comprimentos de raiz e ponta da asa.*

Palavras chave: *Otimização de Parâmetros, Modos de Vibrações, Viga Euler Bernoulli.*

1. INTRODUÇÃO

Vibração é qualquer movimento que se repete, regular ou irregularmente, depois de um intervalo de tempo. Seu estudo é extremamente importante para a humanidade, seja para evitar complicações ou para ser utilizada com proveito. Segundo Soares (2008) projetos de máquinas, fundações, estruturas, motores, e outros, exigem que sejam levadas em consideração questões relacionadas a vibrações. A vibração pode causar o afrouxamento de parafusos e desgaste mais rápido de mancais e engrenagens, por exemplo. Mas também pode ser utilizado em ultrassons, esteiras transportadoras e compactadores.

Na matemática os comportamentos oscilatórios dos corpos são estudados através de equações diferenciais que muitas vezes possuem soluções complexas. O interesse nesse tipo de problema se deu pela necessidade de estudar fenômenos recorrentes por meio de equações que descrevem numericamente um sistema por intermédio de variáveis.

Sabendo que em uma análise dinâmica, a asa de avião se comporta como uma viga vibrante, neste artigo aplica-se o Método de Otimização de parâmetros para estudar a dinâmica de vibração de uma asa de aeronave com formato trapezoidal.

Apesar de se tratar de um estudo teórico, o objetivo do trabalho é simplificar a solução de sisstemas dinâmicos e assim gerar ganho de qualidade da manutenção preditiva deste.

2. OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS

O Método de Otimização de Parâmetros consiste em resolver problemas de valores de contorno tratando suas condições como iniciais. Para isso, faz-se a combinação de um método de integração e um método de otimização.

Considerando uma equação diferencial ordinária de variável x, usa-se o vetor $\vec{C}$ de condições de contorno para encontrar o vetor $\vec{B}$ de condições iniciais desejáveis e os parâmetros *z*, os quais são denominados de *parâmetros desconhecidos*. A partir destes, modela-se a função objetivo *Of.*

A ideia do Método de Otimização de Parâmetros é procurar o par de valores, *x e z,* que minimizam *Of* . Sendo assim, o ponto mínimo é a raiz da equação diferencial em estudo e representa, neste caso estudado o modo de vibrar da viga. A Fig. 1 apresenta de forma geral, o fluxograma do Método.

Para cada equação diferencial e problema de valor de contorno existe algum método de integração mais indicado para solução, seja esta, numérica ou analítica. Da mesma forma, existem diversos métodos de otimização que podem ser aplicados em conjunto ou individualmente. Em suma, a precisão númerica da solução encontrada vai depender exclusivamente dos métodos escolhidos.

Figura 1- Fluxograma do Método de Otimização de Parâmetros

3. MODELAGEM MATEMÁTICA: VIGA DE SEÇÃO VARIÁVEL

Neste trabalho, estudou-se a dinâmica de vibração de uma asa de aeronave com formato trapezoidal utilizando o modelo de barras esbeltas de Euler Bernoulli. Na equação governante do movimento, Eq. (1) (Balachandran & Magrab, 2011) leva-se em consideração a energia potencial, a energia cinética e o trabalho realizado no sistema.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\psi - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\psi + k\psi + \rho(x)A(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = f(x,t) \tag{1}$$

Onde, $EI(x)$ é a rigidez flexional da viga, $p(x,t)$ é a força axial de tração, k é a rigidez por área unitária, $\rho(x)A(x)$ é a massa da viga por comprimento unitário, $\psi(x,t)$ representa deformação em relação a linha neutra e $f(x,t)$ é o carregamento transversal externo por comprimento unitário.

Nesta teoria supõe-se que o comprimento longitudinal é predominante em relação a seção transversal da viga. Outra importante hipótese feita é que os planos perpendiculares a linha neutra (que permanece inalterada) permanecem perpendiculares a linha central (formada depois da deformação). Tal teoria permite então determinar as frequências naturais e modos de vibrar das vigas em $0 < x < L$.

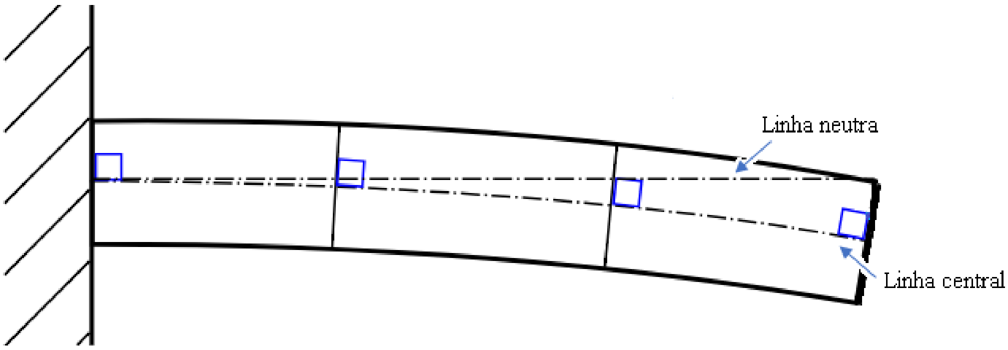

Figura 2 – Deformação de uma viga em balanço

Considerando que a densidade é constante $\rho(x) = \rho$, a rigidez por área unitária $k = 0$, a força externa $f(x,t) = A(x)W(x)g(t)$ e $p(x,t) = 0$, temos que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\psi + \rho(x)A(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = A(x)W(x)g(t) \tag{2}$$

Restrita as seguintes condições iniciais em $x = 0$:

$$\psi(0,t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(0,t) = 0 \tag{3}$$

E em $x = 1$:

$$\psi(1,t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(1,t) = 0 \tag{4}$$

4. SOLUÇÃO ESPACIAL

Resolvendo a Eq.(2) pelo método de separação de variáveis obtém-se a solução espacial e a solução temporal. A solução espacial é dada pela Eq.(5), onde ω é a frequência natural do sistema.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2}{dx^2}W(x)\right]-\rho\omega^2A(x)W(x)=0 \tag{5}$$

Considerando o modelo geométrico representado pela Fig. 3 pode-se definir os seguintes termos.

$$Ir=\frac{a^3*b_0}{12},\ \ Ic=\frac{a^4*\pi}{64},\ \ Ar=b_0*a,\ \ Ac=\frac{a^2*\pi}{4},\ \ Io=Ir+Ic,\ \ Ao=Ar+Ac \tag{6}$$

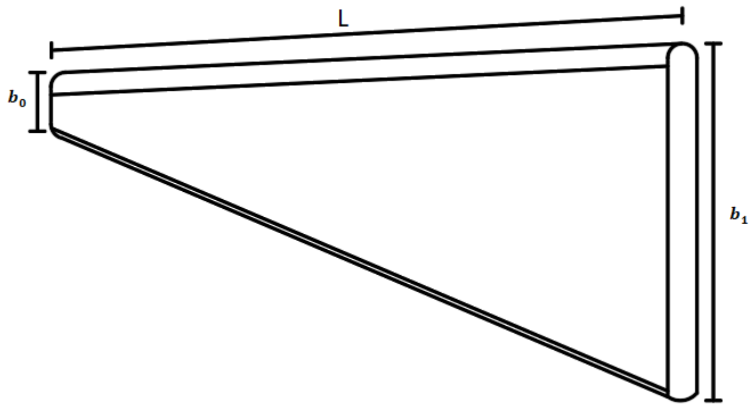

Figura 3 - Modelo geométrico da viga com seção transversal variável no eixo x

Que levam a reescrever a Eq. (5) em termos admensionais, com $\eta=\frac{x}{L}$, conforme demonstrado na Eq. (7).

$$(\alpha\eta+\beta)\frac{d^4}{dx^4}W+2\alpha\frac{d^3}{dx^3}W\ -\ \Omega^4(\gamma\eta+\lambda)W=0 \tag{7}$$

Sendo $\sigma=\frac{b_1}{b_0}$, o parâmetro que quantifica a assimetria da viga, e:

$$\alpha=\frac{Ir}{Io}(1-\sigma)\quad \beta=\frac{\sigma Ir+Ic}{Io}\quad \gamma=\frac{Ar}{Ao}(1-\sigma)\quad \lambda=\frac{\sigma Ar+Ac}{Ao}\quad \Omega^4=\frac{\rho A\omega^2L^4}{EIo} \tag{8}$$

Por otimização de parâmetros a Eq. (7) foi resolvida pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo. Transformando-se em um problema de duas variáveis, a função objetivo pode ser definida como demonstrado na Eq. (9).

$$Of(\Omega,z)=\left(\frac{d}{dx}W(x,\Omega)\right)^2+\left(\frac{d^2}{dx^2}W(x,\Omega)\right)^2 \tag{9}$$

A Fig. 4 representa o gráfico da função objetivo com diferentes valores de assimetria.

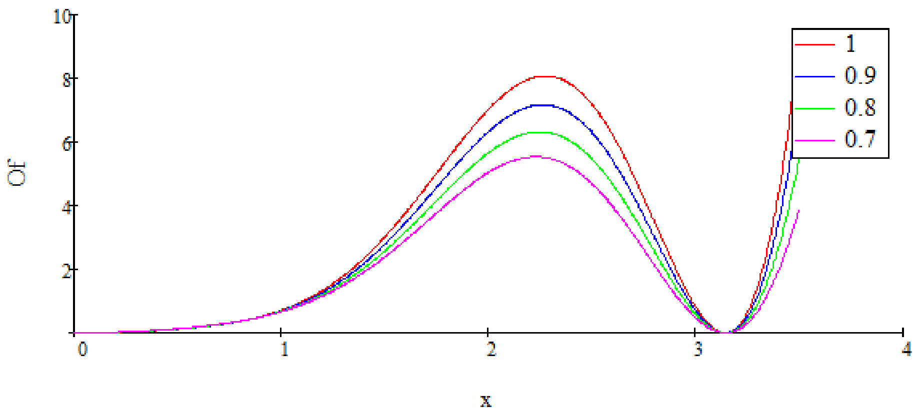

Figura 4 - Função objetivo conforme varição de σ

Utilizando o método do gradiente foram encontrados os seguintes valores para os pontos mínimos da função Of, sendo esses referentes a primeira frequência natural em diferentes assimetrias para a viga. Os pontos encontrados apresentaram grande precisão numérica, visto que os valores significativos na função objetivo foram em torno de $1 * 10^{-15}$.

Tabela 1 - Frequências naturais e parâmetros Z conforme variação de σ

σ	**Ω**	**Z**
1	3,1415926546	1,0000000001
0,95	3,1417911818	1,0083641946
0,90	3,1423995902	1,0173520444
0,85	3,1425075413	1,0272652491
0,80	3,1431658689	1,0380028394
0,75	3,1432526511	1,0499577768
0,70	3,1439047003	1,0630432727

Conforme observado na Tabela 1, a primeira frequência natural de cada sistema esta próxima ao caso em que a seção transversal permanece constante ($\sigma = 1$) , caso este em que conhecemos a solução analítica e numérica. Na Fig. 5 é possível observar melhor a situação descrita.

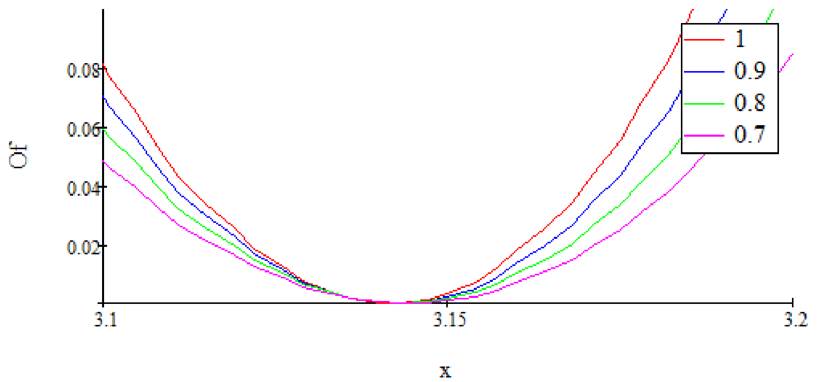

Figura 5 - Ponto da raiz das funções objetivos

5. CONCLUSÃO

Estudando o caso da viga vibrante é possivel afirmar que as Equações Diferenciais são ferramentas indispensáveis na modelagem matemática. Além disso, o problema de vibração tratado é de suma importância no campo da mecânica, visto que os modos de vibrar do sistema interfere no seu funcionamento. Neste projeto o Método de Otimização de Parâmetros apresentou-se eficiente para encontrar soluções numéricas de uma viga com assimetria considerável. Analizando os dados obtidos com relação a primeira frenquência natural pode-se dizer que as condições iniciais para uma viga com pouca assimetria mudam pouco com relação a uma viga com seção constante.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e o Programa Institucional de Desenvolvimento Acadêmico nas ações afirmativas (PIDAC-AF/UFSJ) pelo apoio financeiro.

7. REFERÊNCIAS

Ribeiro, Lilian.; Oliveira, A. C. (2014), *"Estudo análitico dos modos vibracionais transversais de vigas com seção variável: Um modelo simplificado de asa de aeronave".*

Balachandran, B. and Magrab, E. B. "*Vibrações mecânicas".* Cengage Learning, 2011.

Oliveira, A. C. (2018), "*Using the Parameter Optimization Method for Solving Differential Equations with Contour Conditions"*, Manuscript submitted for publication.

Seon, M. Han; Haym, Benaroya; Timothy Wei (1999), *"Dynamics of Transversely Vibrating Beams using four Engineering Theories"*. Academic Press. final version.

Soeiro, Newton S. (2008), *"Curso de fundamentos de vibrações e balanceamento de rotores"*.

Rodrigues, Bruna P.; Souza, Taciana O. "*Equações Diferenciais Odinárias: do Beisebol à Eletricidade".* Faculdade de Engenharia Mecânica- UFU.

Ribeiro, Lilian.; Soares, Gilson V.; Almeida, Alexandre C. L.; Oliveira, Adélcio C. (2018), *"Dynamics of a Non-uniform Euler-bernoulli Beam: Sensitivity Study in the Parameter Space".* Journal of Applied Nonlinear Dynamics, v. 7, p. 205-221

USING THE PARAMETER OPTIMIZATION METHOD FOR SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONTOUR CONITIONS.

Abstract: *The normal vibration modes of a Euler-Bernoulli beam was investigated. The beam is a Simplified model of an airplane wing. It is a variable section beam, along with the length direction. It was used the Parameter Optimization Method in order to obtain the normal vibration modes. The method consists in transform a boundary problem in differential equation into an optimization problem. The main advantage is that the integration becomes simpler, and any integration method can be used.*

Keywords: *Parameter Optimization, Vibration modes, Euler Bernoulli beam.*