XXI ENMC
ENCONTRO NACIONAL DE MODELAGEM COMPUTACIONAL
IX ECTM
ENCONTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS

08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

USO DO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS PARA RESOLVER EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM CONDIÇÕES DE CONTORNO

Jacqueline Jesuina Xavier[1] – jacquejesuina1@hotmail.com
Jéssica de Oliveira Pinto Coelho[1] – jessicaoliveiracoelho1804@gmail.com
Adélcio C. Oliveira[2] – adelcio@ufsj.edu.br
[1] Discente de Engenharia Civil, Universidade Federal de São João Del-Rei - Ouro Branco, MG, Brazil
[2] Departamento de Física e Matemática , Universidade Federal de São João Del-Rei - Ouro Branco, MG, Brazil

Resumo: *Neste trabalho busca-se resolver um problema de valor de contorno mostrando como é possível transformar esse em um problema de valor inicial. As equações diferenciais resolvidas tratam-se de aplicações do modelo não linear de Euler Bernoulli sobre sistema vibratório de vigas. O método permitiu, através do ponto ótimo da função objetivo, encontrar as frequências naturais do sistema, de maneira consideravelmente simples.*

Palavras chave: *Otimização de Parâmetros, Condições de contorno, Viga Euler Bernoulli.*

1. INTRODUÇÃO

Problemas de otimização, também conhecidos como programação matemática, resumem-se em encontrar a melhor resposta para problemas em que sua qualidade pode ser medida numericamente. A otimização baseia-se em maximizar ou minimizar uma função modelada conforme as restrições do problema, a denominada função objetivo (Chapra, 2008).

Segundo Chapra (2008) a maior parte dos métodos procuram o ponto ótimo resolvendo o problema de raiz da primeira derivada, $f'(x)=0$. De acordo com os teoremas (Stewart, 2004) a segunda derivada $f''(x)$, indica quando o ponto ótimo é um mínimo ou um máximo: se $f''(x)<0$, o ponto é um máximo da função; se $f''(x)>0$, o ponto é um mínimo da função, como exemplifica a Fig. 1.

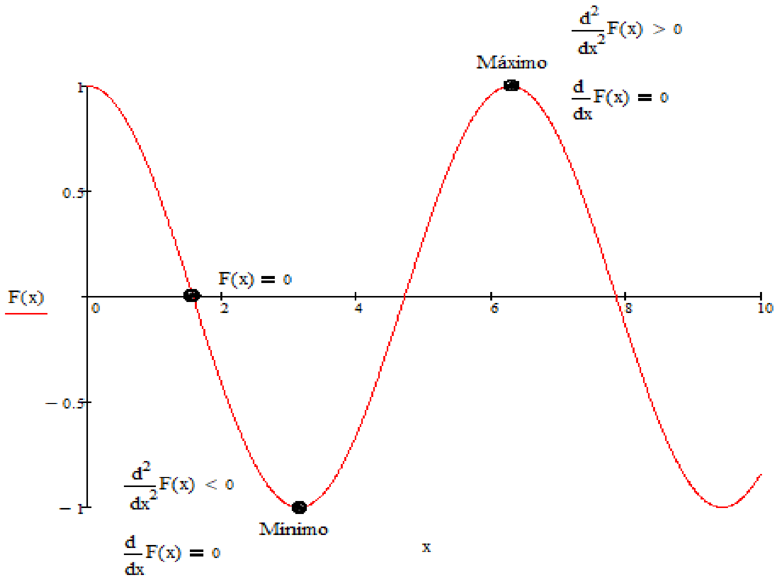

Figura 1- Função de uma única variável (x) ilustrando as raízes extremos.

Existem diversas aplicações de problemas de otimização, especialmente na área de engenharia, onde grande parte dos problemas reais são modelados por Equações Diferenciais, sejam elas ordinárias (EDOs) ou parciais (EDPs) (Lobato, 2008).

Sabe-se que muitos fenômenos físicos podem ser modelados com equações diferenciais, sejam eles problemas de valores iniciais (PVI) ou problemas de valores de contorno (PVC), estejam eles aplicados nas áreas de Biologia, Engenharia, Economia e outros (Oliveira, 2017). No entanto, é muito mais complicado encontrar solução de problemas de valores de contorno quando comparados à problemas de valores iniciais, visto que neste último a diversidade de métodos de resolução é maior.

Atualmente com o avanço tecnológico, a capacidade de resolver modelos matemáticos complexos ganhou uma gama de novas técnicas que aliam conhecimentos multidisciplinares, entre eles a simulação numérica por meio de programações. Desta forma, inúmeros trabalhos já buscam estudar técnicas de otimização e problemas multi-objetivos para resolver de forma rápida os aspectos multidisciplinares em análises subjetivas.

De acordo com Escobar (2007) é possível, em uma fase anterior ao modelo matemático, através da aplicação de ferramentas estatísticas e de otimização numérica, estimar os valores dos parâmetros mais críticos do sistema dentro do espaço experimental de estudo.

Neste artigo apresenta-se o Método de Otimização de Parâmetros para resolução de Problemas de Valores de Contorno (PVC) de uma equação diferencial ordinária aplicado a modelagem de vigas.

1.1. MODELAGEM EULER BERNOULI

Sabe-se que viga é um elemento estrutural bastante comum em problemas de engenharia e apesar de serem mais associadas a edifícios, podem ser aplicadas em asas de aeronaves, máquinas rotativas, cascos de navios, pontes rodoviárias e ferroviárias (Balachandran & Magrab, 2011). As vigas são definidas como elementos lineares em que a flexão é preponderante (NBR 6118, 2003). Para estas finalidades consideram duas principais teorias de estudos, a de Timoshenko e Euler Bernoulli (Andrade, 2009).

Neste trabalho será apresentado como exemplo duas aplicações do Método de Otimização de Parâmetros na modelagem de sistemas vibratórios com baixa frequência. É utilizado a Teoria de Euller Bernoulli para análise das frequências naturais e modos de vibração. Nesse modelo supõe-se que as seções transversais planas permanecem sempre planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da viga após a deflexão (Balachandran & Magrab, 2011).

2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL NÃO LINEAR DE QUARTA ORDEM

Considere a Eq. (1) a equação espacial efetiva de uma viga de Euler Bernoulli em fundações visco-elásticas não-lineares (Oliveira, 2017).

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4} - \Omega^4 v(x) = 0 \tag{1}$$

Onde Ω é a frequência natural do sistema e $v(x)$ é a deformação da linha neutra (Balachandran & Magrab, 2011).

Restrita as seguintes condições:

$$v(0) = 0;\ \frac{dv(0)}{dx};\ v(1) = 0;\ \frac{dv(1)}{dx} = 0 \tag{2}$$

A solução geral pode ser encontrada supondo que $v = e^{rx}$. Isto implica na equação auxiliar $r^4 - \Omega^4 = 0$ que possui as seguintes raízes:

$$r_1 = \Omega\ ;\ r_2 = \Omega i\ ;\ r_3 = -\ \Omega\ ;\ r_4 = -\Omega i \tag{3}$$

Assim, a solução da Eq (1), é:

$$v(x) = c_1 e^{\Omega x} + c_2 e^{\Omega x i} + c_3 e^{-\Omega x} + c_4 e^{-\Omega x i} \tag{4}$$

Logo a solução geral do problema é dada por:

$$v(x) = c_1 \cosh(\Omega x) + c_2 senh(\Omega x) + c_3 \cos(\Omega x) + c_4 sen(\Omega x) \tag{5}$$

Neste caso, utilizar os métodos tradicionais já conhecidos para encontrar a solução do problema de valor inicial seria um processo complexo e demorado, então é viável aplicar o método de otimização de parâmetros.

3. MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS

No Método de Otimização de Parâmetros utiliza-se a combinação de um método de integração e um método de otimização. A ideia do método é procurar o par de valores, *x e z*, que minimizam Of . Sendo assim, o ponto mínimo é a raiz da equação diferencial em estudo e representa, neste caso estudado, o modo de vibrar da viga. A Fig. 2 apresenta de forma geral, o fluxograma do método (Oliveira, 2018)

Figura 2 - Fluxograma do Método de Otimização de Parâmetros

Considerando a equação diferencial ordinária de variável x, Eq. (5), usa-se as condições de contorno, Eq. (2), para encontrar as condições iniciais desejáveis e os parâmetros *z*, os quais são denominados de *parâmetros desconhecidos*. A partir destes modela-se a função objetivo *Of*.

Logo, usando as condições de contorno em *x=0* é possível encontrar os coeficientes desconhecidos, isto é, z_1 e z_2:

$$v(0) = 0 \rightarrow c_1 = -c_3 \rightarrow c_1 = z_1 \tag{6}$$

$$v'(0) = 0 \rightarrow c_2 = -c_4 \rightarrow c_2 = z_2 \tag{7}$$

Aplicando as condições de contorno em *x=1* obtém-se:

$$v(1) = 0 \rightarrow z_1(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega)) + z_2\big(senh(\Omega) - sen(\Omega)\big) = 0 \tag{8}$$

$$v'(1) = 0 \rightarrow [z_1\big(senh(\Omega) + sen(\Omega)\big) + z_2(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega))]\, \Omega = 0 \tag{9}$$

O método nos permite em certos problemas trabalhar com funções multi-objetivos para facilitar o processo de otimização, que nos casos de PVCs consiste em minimizar a função de forma a encontrar os valores desejados para os parâmetros.

A função multi-objetivo, então, será definida como:

$$Of_1(z_1, z_2, \Omega) = (v(1) - 0)^2 \\ = \left[z_1(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega)) + z_2\big(senh(\Omega) - sen(\Omega)\big)\right]^2 \quad (10)$$

$$Of_2(z_1, z_2, \Omega) = (v'(1) - 0)^2 \\ = \{\left[z_1\big(senh(\Omega) + sen(\Omega)\big) + z_2(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega))\right]\Omega\}^2 \quad (11)$$

A partir destas, pode-se encontrar o mínimo da função por meio das seguintes equações:

$$\frac{\partial Of_1}{\partial \Omega} = 2\left[z_1(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega)) + z_2\big(senh(\Omega) - sen(\Omega)\big)\right] \cdot [z_1\big(senh(\Omega) + sen(\Omega)\big) + z_2(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega))] \quad (12)$$

$$\frac{\partial Of_1}{\partial z_1} = 2\left[z_1(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega)) + z_2\big(senh(\Omega) - sen(\Omega)\big)\right] \cdot (\cosh(\Omega) - \cos(\Omega)) \quad (13)$$

$$\frac{\partial Of_1}{\partial z_2} = 2\left[z_1(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega)) + z_2\big(senh(\Omega) - sen(\Omega)\big)\right] \cdot \big(senh(\Omega) - sen(\Omega)\big) \quad (14)$$

$$\frac{\partial Of_2}{\partial \Omega} = \left[z_1\big(senh(\Omega) + sen(\Omega)\big) + z_2(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega))\right]\Omega \cdot \{[z_1(\cosh(\Omega) + \cos(\Omega)) + z_2\big(senh(\Omega) + sen(\Omega)\big)] + z_1\big(senh(\Omega) + sen(\Omega)\big) + z_2(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega) \quad (15)$$

$$\frac{\partial Of_2}{\partial z_1} = 2\left[z_1\big(senh(\Omega) + sen(\Omega)\big) + z_2(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega))\right]\Omega \cdot \big(senh(\Omega) + sen(\Omega)\big)\Omega] \quad (16)$$

$$\frac{\partial Of_2}{\partial z_2} = 2\left[z_1\big(senh(\Omega) + sen(\Omega)\big) + z_2(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega))\right]\Omega \cdot [(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega)\,\Omega \quad (17)$$

Resolvendo o sistema, chegamos em

$$z_1 = \frac{-z_2\big(senh(\Omega) - sen(\Omega)\big)}{(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega))} \text{ e } z_1 = \frac{-z_2(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega))}{\big(senh(\Omega) + sen(\Omega)\big)} \quad (18)$$

Portanto as frequências naturais do sistema são dadas por:

$$\cosh(\Omega)\cos(\Omega) - 1 = 0 \quad (19)$$

Para facilitar a visualização gráfica, definimos a função objetivo como:

$$OF(\Omega) = \frac{(\cosh(\Omega)\cos(\Omega) - 1)^2}{\cosh^2(\Omega)} \quad (20)$$

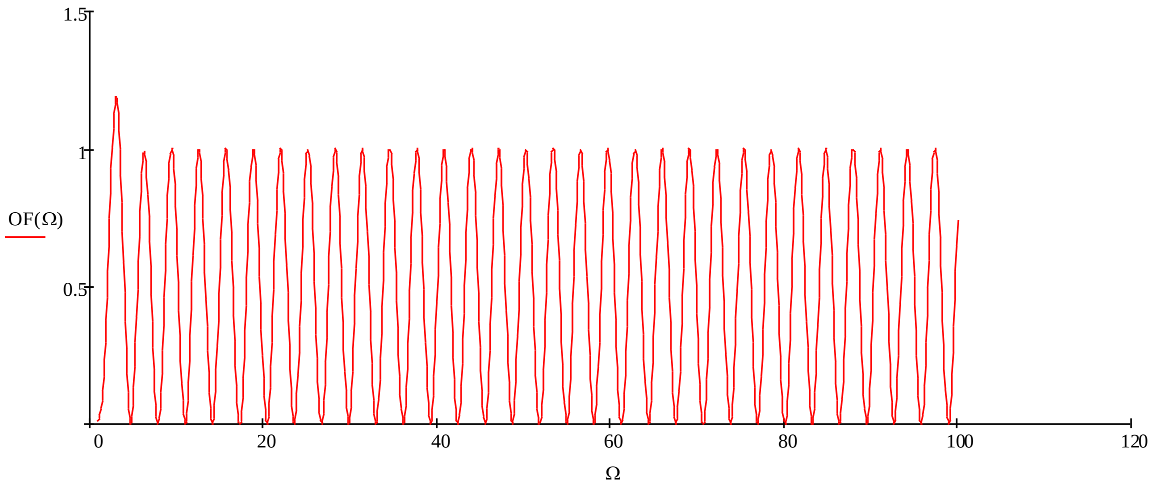

Figura 3 – Função Objetivo (OF) em função de frequência natural de vibração Ω.

Assim a função *OF* não cresce indefinidamente com Ω . Na Fig. 3, vemos o gráfico de *OF*, como função de Ω. Os zeros da função objetivo correspondem aos modos normais de vibração da viga.

4. CASO GERAL

O Método de Otimização de Parâmetros, aqui apresentado, consiste em resolver Equações Diferenciais Ordinárias tratando suas condições de contorno, como condições iniciais. De forma que, transformando um PVC em PVI facilita-se a compreensão do problema, especialmente para aplicação de técnicas computacionais.

Usa-se as condições de contorno para identificar os parâmetros *z* para assim encontrar a função objetivo. O processo de otimização é então realizado com as raízes da derivada da função objetivo, em relação a suas variáveis livres.

5. CONCLUSÃO

Como observação geral, pode-se dizer que o Método de Otimização de Parâmetro é útil e eficiente para resolver equações diferenciais numericamente e analiticamente com condições de contorno. O método é baseado em uma combinação simples de um método de integração e um método de otimização, assim, a precisão numérica depende da escolha dos métodos. A convergência, em termos práticos, depende da equação diferencial. Nesse trabalho, investigamos um caso analiticamente solúvel e portanto não há problema de convergência.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e o Programa Institucional de Desenvolvimento Acadêmico nas ações afirmativas (PIDAC-AF/UFSJ) pelo apoio financeiro.

7. REFERÊNCIAS

Chapra, Steven C.; Canale, Raymond P. (2011), *"Métodos numéricos para engenharia"*, 5° ed, AMGH, Porto Alegre.

Stewart, James. (2004), *"Cálculo vol 2"*, 4° ed, Thompson, São Paulo.

Lobato, Fran Sérgio. (2008), *"Otimização Muti-objetivo para o projeto de Sistemas de Engenharia"* , Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação, UFU, Minas Gerais.

Andrade, Vinicius S. (2009), *"Análise dinâmica de uma viga engastada excitada por uma fonte não ideal"*, Tese de doutorado, USP, São Paulo.

Balachandran, B. and Magrab, E. B. "*Vibrações mecânicas".* Cengae Learning, 2011.

Oliveira, A. C. (2018), "*Using the Parameter Optimization Method for Solving Differential Equations with Contour Conditions"*, Manuscript submitted for publication.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2003

USING THE PARAMETER OPTIMIZATION METHOD FOR SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONTOUR CONITIONS.

Abstract: *In this contribution, we show how to use the parameter optimization method to solve an Euller Bernoulli beam problem. This method transform a contour problem into a optimization problem. The main advantage is that one can use all optimization technique and also any integration procedure.*

Keywords: *Parameter Optimization, Contour Conditions, Euler Bernoulli beam*