



08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

MODELO UNIDIMENSIONAL APLICADO A DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM GRÃOS ARMAZENADOS EM UM SILO

Francisco Stark¹ - franciscostark@gmail.com

Guilherme Jahnecke Weymar² - guilhermejahnecke@gmail.com

Daniela Buske³ - danielabuske@gmail.com

Régis Sperotto de Quadros⁴ - quadros99@gmail.com

¹Universidade Federal de Pelotas, Centro de Engenharias, RS, Brazil

²Universidade Federal de Pelotas, Centro de Engenharias, RS, Brazil

³Universidade Federal de Pelotas, Departamento de Matemática e Estatística, RS, Brazil

⁴Universidade Federal de Pelotas, Departamento de Matemática e Estatística, RS, Brazil

Resumo. A grande produção de grãos no país necessita, não só de armazenagem, mas também de boas condições de estocagem para garantir a qualidade do produto. Para se ter esse controle, utilizam-se silos, em que um dos principais fatores que devem ser levados em conta é a temperatura com que os grãos ficam armazenados. Desta forma, o principal objetivo deste trabalho é utilização de um modelo matemático para prever o comportamento da temperatura nos grãos armazenados no silo. O trabalho apresenta uma solução semi-analítica para um modelo unidimensional transiente de temperatura, a solução obtida relaciona a temperatura com a altura da massa de grãos. Para resolver o problema proposto são utilizados os métodos da transformada de Laplace e o método da quadratura Gaussiana. O modelo é aplicado a um experimento encontrado na literatura e comparam-se os resultados. A solução encontrada apresenta uma boa concordância com as temperaturas observadas.

Palavras-chave: Transferência de calor, Silo, Grãos de soja, Modelo unidimensional

1. INTRODUÇÃO

A produção de grãos é um dos principais segmentos agrícolas e tem importância fundamental no desenvolvimento econômico e sustentável do Brasil. Segundo a Companhia Nacional de Abastecimento, estima-se para a safra 2017/2018 uma produção de 226 milhões de toneladas. Sendo prevista uma área plantada de 61,06 milhões de hectares, com um crescimento de 0,3% comparada à safra 2016/17 (CONAB, 2018).

Esse aumento da produção de grãos do país, a cada ano, necessita de mais investimentos e tecnologias na área de pós colheita para o processamento e armazenagem da safra. Porém, esses investimentos em armazenagem não vem acompanhando o crescimento da produção, aumentando cada vez mais o déficit de armazenagem (Neutzling, 2016).

Conforme Milman (2002), as unidades armazenadoras de grãos são instalações com o objetivo de receber a produção de grãos, conservá-los em perfeitas condições e redistribuí-los posteriormente. Essas unidades armazenadoras podem ser na forma convencional, no qual o acondicionamento dos grãos é em sacarias. Outra maneira são as unidades de armazenagem a granel, que são as mais adequadas para grandes quantidades, utilizando para a estocagem dos grãos, estruturas como armazéns graneleiros e/ou graneleirizados e os silos, que são estruturas na forma cilíndrica e construídas de chapas metálicas.

Para manter a qualidade dos grãos armazenados, é necessário realizar boas práticas de conservação, pois a qualidade é um dos principais fatores para negociação e comercialização do produto. Dois fatores de extrema importância para a qualidade dos grãos são: a temperatura e a umidade. Quanto as diferenças de temperaturas, estas podem causar migração de umidade resultando em perdas tanto qualitativas quanto quantitativas dos grãos (Goergen, 2010).

Uma maneira de obter a temperatura dos grãos dentro de um silo armazenador é por meio de modelos matemáticos (Moreira et al., 2015). Esses modelos matemáticos podem ser obtidos por diferentes métodos de resolução (analítico ou numérico), com a solução de um modelo matemático é possível prever a temperatura da massa de grãos, e com isso estabelecer uma estratégia para tomar decisões no processo de armazenagem dos grãos..

De acordo com Oliveira (2015), a procura por soluções analíticas referentes a transferência de calor vem aumentando cada vez mais. Por apresentarem resultados mais rápidos, exatos, com uma maior confiança e menor custo computacional em relação as soluções puramente numéricas.

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo aplicar um modelo matemático da transferência de calor por condução, para descrever a variação de temperatura da massa de grãos de soja dentro de um silo armazenador, a solução proposta utiliza os métodos da transformada de Laplace e o método numérico da quadratura Gaussiana. Será realizada uma comparação dos resultados gerados pelo modelo com um experimento encontrado na literatura.

2. DESCRIÇÃO DA MODELAGEM

A equação matemática utilizada para descrever o campo de temperatura em grãos armazenados em um silo é a equação de condução de calor (Özisik, 1990), considera-se a equação em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial^2 T(r, \phi, z, t)}{\partial z^2}. \quad (1)$$

onde T é a temperatura média e α a difusividade térmica do material.

Neste trabalho, apresenta-se uma investigação do comportamento da temperatura em uma dimensão no interior do silo, propõe-se analisar ao longo da altura (z) do silo. Assim, tem-se:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2}. \quad (2)$$

Um fator importante na modelagem, são as condições de contorno e que devem trazer a realidade do problema. Desta forma, considera-se um silo submetido a uma troca de calor por convecção em $z = H_s$ e em $z = 0$ tem-se uma temperatura fixa, conforme experimento utilizado. A seguir, são mostradas as condições de contorno:

$$T(0, t) = T_a, \quad (3)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=H_s} = -h(T(H_s, t) - T_a), \quad (4)$$

a condição inicial utilizada é:

$$T(z, 0) = T_0, \quad (5)$$

onde T_0 é uma temperatura fixa, H_s é a altura do silo e T_a é a temperatura ambiente.

A Figura 3 é uma ilustração do problema que será trabalhado:

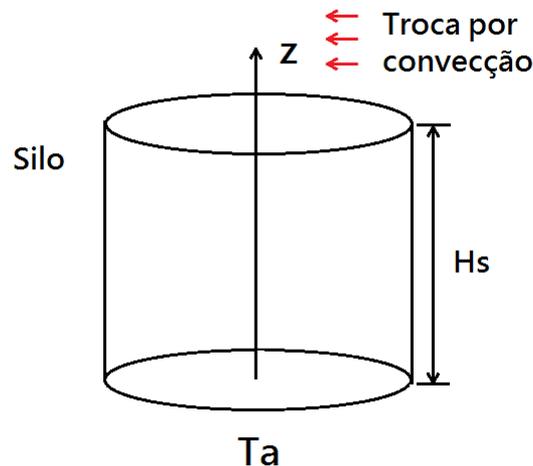


Figura 1- Ilustração do problema unidimensional.

2.1 Solução proposta para o modelo

Para resolver a Eq. (2), inicialmente aplica-se a transformada de Laplace na variável temporal (t), ou seja, $\mathcal{L}(T(z, t); t \rightarrow s) = \bar{T}(z, s)$:

$$\frac{1}{\alpha} \left(s\bar{T}(z, s) - T(z, 0) \right) = \frac{d^2 \bar{T}}{dz^2}. \quad (6)$$

A Eq. (6) é uma equação diferencial ordinária (EDO) não-homogênea. Assim, tem-se para a solução geral:

$$\bar{T}(z, s) = \bar{T}_h(z, s) + \bar{T}_p(z, s). \quad (7)$$

Utilizando o método dos coeficientes indeterminados (Boyce & Diprima, 2015), obtém-se para a solução particular a função: $\bar{T}_p(z, s) = \frac{T_0}{s}$.

A solução homogênea é obtida resolvendo a EDO homogênea associada, representada pela equação:

$$0 = \frac{d^2 \bar{T}}{dz^2} - \frac{s}{\alpha} \bar{T}(z, s). \quad (8)$$

A solução para a Eq. (8) pode ser encontrada em (Boyce & Diprima, 2015), obtém-se:

$$\bar{T}_h(z, s) = A(s)e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}z} + B(s)e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}z}. \quad (9)$$

Portanto, a solução geral da EDO não-homogênea (6) é:

$$\bar{T}(z, s) = A(s)e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}z} + B(s)e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}z} + \frac{T_0}{s}. \quad (10)$$

Para determinar os coeficientes $A(s)$ e $B(s)$, utilizam-se as condições de contorno do problema, para isso determina-se $\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = A\sqrt{\frac{s}{\alpha}}e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}z} - B\sqrt{\frac{s}{\alpha}}e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}z}, \quad (11)$$

e aplica-se a transformada de Laplace nas condições de contorno (3) e (4), obtendo o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} A + B + \frac{T_0}{s} &= \mathcal{L}\{T_a\} \\ Ae^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}H_s} \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} + h \right) + Be^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}H_s} \left(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} + h \right) &= -\frac{hT_0}{ks} + \frac{h\mathcal{L}\{T_a\}}{k} \end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}\{T_a\}$ é a transformada de Laplace de T_a . Resolvendo o sistema, determina-se os coeficientes A e B . Pelo fato das expressões serem muito grandes, não serão apresentadas aqui.

Assim, $\bar{T}(z, s)$ está bem determinado e para obter a solução final, $T(z, t)$, aplica-se a transformada inversa de Laplace, este procedimento resulta:

$$T(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \bar{T}(z, s) ds. \quad (12)$$

Para resolver analiticamente a integral (12), deve-se utilizar o teorema de resíduos (Brown & Churchill, 2015), porém é impossível determinar as singularidades do integrando. Assim, será utilizada uma solução aproximada da integral (12), através de uma inversão numérica. A inversão numérica é feita utilizando o método de quadratura Gaussiana (Stroud & Secrest, 1966).

3. EXPERIMENTO E RESULTADOS NUMÉRICOS

Para uma análise do modelo proposto, aplica-se a metodologia deste trabalho no experimento realizado em (Enck et al., 2005). O problema térmico estudado é definido por um tubo contendo grãos (simulando um silo), o experimento utilizou grãos de soja aquecidos uniformemente em uma estufa, foram colocados num tubo PVC de 150 mm de diâmetro, com uma coluna de grãos de 0,60m e um sensor foi instalado a uma altura de 0,15m.

Para as parametrizações termofísicas dos grãos de soja foram utilizadas as seguintes:

Tabela 1- Propriedades termofísicas do grão de soja (Borges et al., 2009; Ito et al., 2003)

Difusividade térmica - α ($m^2 s^{-1}$)	1, 2210 ⁻⁷
Condutividade térmica - k ($W m^{-1} o C^{-1}$)	0, 178

essas propriedades podem ser encontradas em Borges et al. (2009) e Ito et al. (2003).

Para a simulação utilizou-se a solução dada em (12), os parâmetros apresentados na Tabela 1 e os dados do experimento, cabe salientar que as medições de temperatura no experimento

foram feitas nos instantes de $t = 0\text{ s}$; 1020 s ; 3000 s ; 5040 s e $t = 7200\text{ s}$ e a implementação foi feita em SCILAB.

Para a temperatura ambiente (T_a) utilizou-se a seguinte função:

$$T_a(t) = 50 * e^{-0.000278349t - 0.787682} + 28.1212, \quad (13)$$

a função (13) foi obtida através de um ajuste de curvas com as temperaturas observadas, utilizou-se o método dos mínimos quadrados para este ajuste. A aproximação (linha vermelha) pode ser vista na Figura 2, com as temperaturas observadas (pontos em azul):

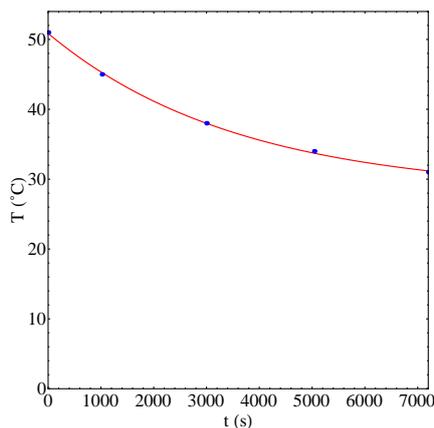


Figura 2- Função temperatura ambiente obtida com o método dos mínimos quadrados.

Apresenta-se na Figura 3, os resultados obtidos pelo modelo e as temperaturas observadas (medidas pelo sensor nos instantes de $t = 0\text{ s}$; 1020 s ; 3000 s ; 5040 s e $t = 7200\text{ s}$).

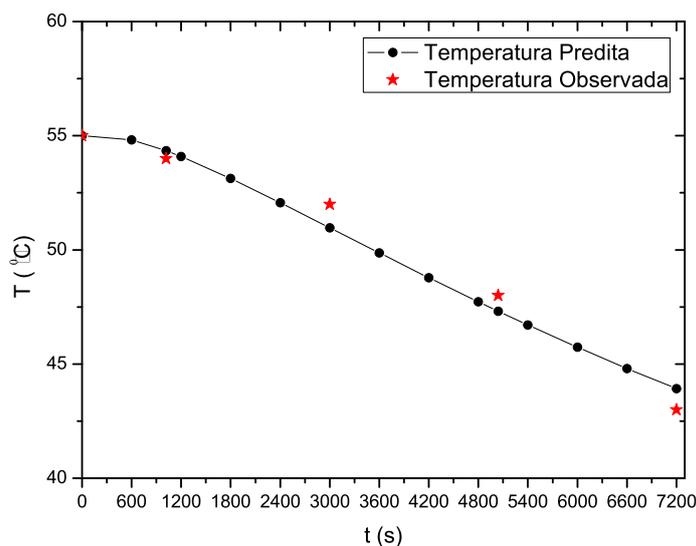


Figura 3- Comparação entre as temperaturas observadas e as previstas.

Através da Figura 3, pode-se notar que as temperaturas preditas estão bem próximas das observadas, mostrando que o modelo proposto tem uma boa concordância com os dados experimentais.

A seguir apresentam-se na Tabela 2 os erros absolutos e relativos percentuais:

Tabela 2- Erros absolutos e relativos percentuais.

Medição	$E_{abs} = T_o - T_p * 100$	$E_{rel} = \frac{ T_o - T_p }{ T_o } * 100$
$t = 0 s$	0,000	0
$t = 1020 s$	34,369	0,636
$t = 3000 s$	103,180	1,984
$t = 5040 s$	68,711	1,431
$t = 7200 s$	91,616	2,131

Pelos resultados obtidos nos erros absolutos percebe-se que o modelo tem previsões com variações de um grau, quando comparado com os dados experimentais. Já com os erros relativos, que leva em conta a ordem da grandeza analisada, nota-se que o erro cometido não é grande, o erro médio é de 1,23%. As diferenças encontradas entre os valores obtidos pelo modelo e os experimentais podem ser justificadas pelas aproximações utilizadas nos parâmetros físicos e também pelo truncamento utilizado para inversão numérica na Eq. (12). Para trabalhos futuros pretende-se investigar a influência dessas aproximações nos resultados do modelo.

Na Figura 4, apresenta-se a evolução da temperatura no tempo, ao longo da coluna de grãos de soja.

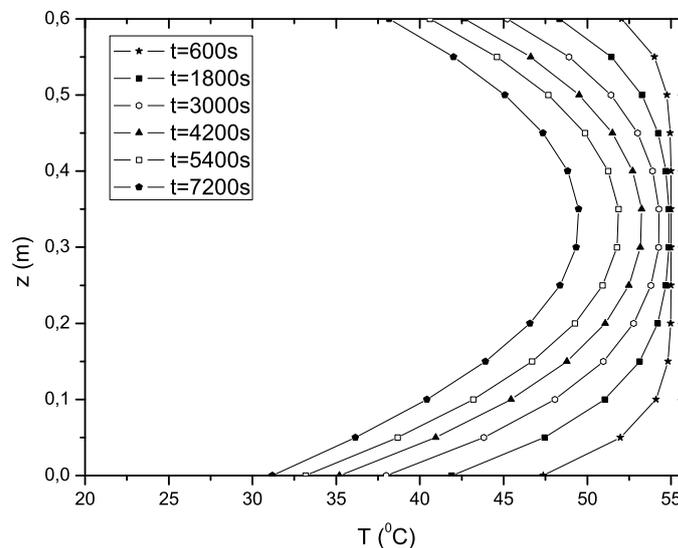


Figura 4- Evolução da temperatura no tempo, distribuição da temperatura ao longo da coluna de grãos.

De acordo com o Figura 4, nota-se que o modelo está coerente com o fenômeno físico, ou seja, os grãos estão resfriando a medida que o tempo evolui. Este resfriamento acontece devido às condições de contorno impostas no problema.

4. CONCLUSÕES

O modelo unidimensional proposto neste trabalho apresentou uma boa concordância com os dados experimentais, mostrando que a abordagem utilizada para a solução do modelo é uma alternativa para se prever o campo de temperatura numa camada de grãos. Dessa forma, como perspectivas futuras pretende-se dar continuidade, utilizando o modelo para investigar a transferência de calor em um silo.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq e a Fapergs pelo auxílio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Borges, P.A.P.; Fengler, C.; Cervi, A. (2003), Estimativa da difusividade térmica de grãos de soja pelo método de compactação. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, 13, 591-595.
- Boyce, W.E. e DiPrima, R.C. (2015), “*Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*”, 10º ed., LTC, São Paulo.
- Brown, J.W. e Churchill, R.V. (2015), “*Variáveis Complexas e Aplicações*”, 9º ed., Mc Graw Gill, São Paulo.
- Conab - Companhia Nacional de Abastecimento. “Acompanhamento da safra brasileira grãos, março 2018”, Disponível em: <<http://www.conab.gov.br>>, Acesso em: 25 maio 2018.
- Enck, M.R.; de Oliveira, F.A.; Khatchaturian, O. (2005), Modelagem matemática da temperatura de grãos de soja no interior de um silo com aeração sujeito a condições de contorno. Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional-XXVIII CNMAC, 1-2.
- Goergen, R. (2010), “*Modelagem matemática da transferência de calor em um meio particulado*”, Dissertação de Mestrado, Modelagem Matemática/UNIJUI, Ijuí.
- Ito, A.P.; Amendola, M.; Park, K.J. (2003), Determinação de condutividade térmica de grãos de soja. *Revista Iber. Tecnologia Postcosecha*, 5, 76-81.
- Milman, M.J. (2002), “*Equipamentos para pré-processamento de grãos*”, 1º ed., Editora e Gráfica Universitária/Pelotas, Pelotas.
- Moreira, M.F.P.; Corrêa, R.G.; Freire, J.T. (2015), Modelo matemático para previsão da temperatura da soja armazenada em silo. *Engvista*, 17, 240-253.
- Neutzling, R. (2016), “*Modelagem matemática e simulação do escoamento de ar e estado térmico em silos armazenadores de grão*”, Dissertação de Mestrado, Modelagem Matemática/UNIJUI, Ijuí.
- Oliveira, G. (2015), “*Solução analítica de condução de calor multicamada: aplicação em ferramentas revestidas*”, Dissertação de Mestrado, PPGEM/UFU, Uberlândia.
- Özisik, M. (1990), “*Heat Conduction*”, 2º ed., John Wiley & Sons, New York.
- Stroud, A.H. e Secrest, D. (1966), “*Gaussian Quadrature Formulas*”, Prentice-Hall, Londres.

ONE-DIMENSIONAL MODEL APPLIED TEMPERATURE DISTRIBUTION OF GRAIN STORED IN A SILO

Abstract. *The big grain production in the country needs not only storage but good storage conditions to ensure the quality of the product. In order to achieve the control quality, silos are used, whereupon the main factor is the temperature at which grains are stored. Thus, the main objective of this work is the use of a mathematician model to preview the grain's temperature behavior that is stored on the silo. The work presents a semi-analytical solution for a one-dimensional transient model of temperature, the solution obtained relates the temperature to the height of the grain mass. To solve the problem proposed, are used the methods of the Laplace transform and the Gaussian quadrature method. The model is applied to an experiment found in the literature and the results are compared. The solution found shows a good agreement with the observed temperatures.*

Keywords: *Heat transfer, Silo, Grains of soybeans, One-dimensional model*