

08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

ANÁLISE TEÓRICO EXPERIMENTAL DE FLUXO TÉRMICO COM VARIAÇÃO ESPACIAL EMPREGANDO INFERÊNCIA BAYESIANA E IMAGENS TERMOGRÁFICAS

Eiji Watanabe¹ - eijiwwf@gmail.com

Luiz Alberto da Silva Abreu¹ - luiz.abreu@iprj.uerj.br

Diego Campos Knupp¹ - diegoknupp@iprj.uerj.br

¹Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico - Nova Friburgo, RJ, Brazil

Resumo. *Em muitas aplicações industriais, o conhecimento prévio dos fluxos de calor de contorno é essencial para o projeto e o bom funcionamento de sistemas e equipamentos, como em eletrônica, microrreatores e detecção de tumores, por exemplo. O presente trabalho tem como objetivo, portanto, a validação de um experimento por meio da solução de um problema inverso de estimativa de fluxo de calor de contorno com variação espacial em uma placa de aço inoxidável termicamente fina cujas propriedades térmicas e dimensões são conhecidas. O problema direto foi resolvido através de um comando do software Wolfram Mathematica e envolve o aquecimento de uma das superfícies da placa com um fluxo de calor. O problema inverso foi resolvido via Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov dentro de uma abordagem Bayesiana que foi implementado através do algoritmo de Metropolis-Hastings e consistiu na estimativa do fluxo de calor com variação espacial sendo conhecidas as medidas que foram simuladas considerando a solução do problema direto e obtidas experimentalmente através da termografia por infravermelho. A técnica proposta foi capaz de estimar a função do fluxo de calor à partir de medições simuladas e reais de temperatura.*

Keywords: *Problemas Inversos, Fluxo de calor de contorno, Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), Inferência Bayesiana, Transferência de Calor.*

1. INTRODUÇÃO

A solução de problemas de condução de calor que envolvem a análise e estimativa de fluxos de calor de contorno tem sido estudada ao longo dos últimos 30 anos (Ozisik, 1987; Silva Neto e Ozisik, 1994; Pradere et al., 2006; Orlande et al., 2012). Apesar do grande número de trabalhos encontrados na literatura, o problema continua sendo atual dados os inúmeros desafios que aparecem em cada uma das aplicações existentes. Entre algumas áreas onde estes problemas têm sido aplicados, podem-se citar: fadiga, micro-reatores, a detecção de tumores, objetos de digitalização transparentes, detecção de objetos com a ocorrência de corrosão, entre outras aplicações (Pradere et. al, 2006; Mital e Scott, 2007; Eren et al., 2009).

Atualmente, novas metodologias de solução de problemas que envolvem a estimativa de termos fonte com variação temporal e espacial têm sido propostas, em especial envolvendo soluções analíticas e a solução através de abordagens Bayesianas (Orlande et al., 2012), com as quais diferentes problemas relacionados com este tema têm sido resolvidos atualmente. Assim, espera-se neste trabalho simular a transferência de calor transiente com variação espacial em uma placa e validar um experimento com a modelagem computacional do problema.

2. METODOLOGIA

No presente trabalho, no problema direto, são consideradas conhecidas as propriedades térmicas, as condições de contorno e inicial e a geometria do problema e deseja-se estimar o campo de temperaturas. Por sua vez, no problema inverso, a partir do campo de temperaturas, espera-se estimar a função do fluxo de calor com variação espacial. Os problemas direto e inverso serão melhores detalhados nas seções 2.1 e 2.2.

2.1 Problema direto

O problema físico estudado consiste no aquecimento de duas placas metálicas termicamente finas através de uma resistência elétrica posicionada geometricamente no centro das placas em uma configuração de sanduíche, considerando contato térmico perfeito. A troca de calor por convecção nas laterais das placas foi desprezada. Uma ilustração com uma vista explodida do problema físico está representado na Fig. 1.

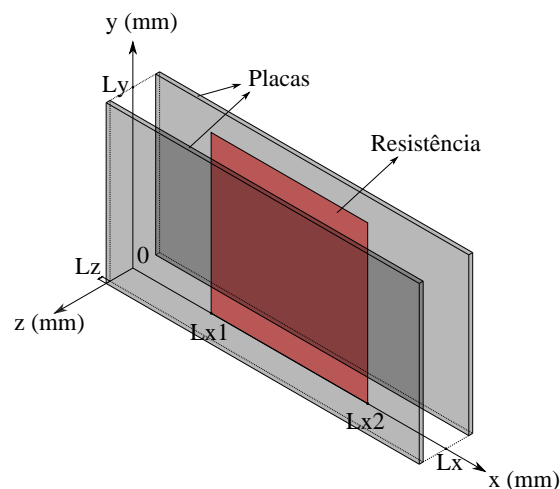


Figura 1- Esquema do problema físico.

O modelo matemático do problema estudado, considerando uma abordagem *Lumped* e simetria na direção z , é dado por:

$$k \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{L_z} (-h(T(x, t) - T_\infty) + q(x)) = \rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

e as condições de contorno e inicial são:

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0 \quad (2)$$

e

$$T(x, 0) = T_{\infty} \quad (3)$$

onde L_x representa o comprimento da placa e L_z , a espessura. A temperatura ambiente é indicada por T_{∞} . O fluxo de calor $q(x)$ varia apenas com a direção x .

2.2 Problema inverso

No presente problema físico, deseja-se estimar através do problema inverso o fluxo térmico, com o uso da Inferência Bayesiana via Monte Carlo com Cadeias de Markov. A Inferência Bayesiana é um método de inferência estatística que consiste essencialmente em utilizar-se toda a informação disponível *a priori* com o intuito de se reduzir a incerteza em problemas de tomada de decisão através do teorema de Bayes (Ribeiro e Molina, 2017; Orlande et al., 2012, 2011).

$$\pi_{post}(\mathbf{P}) = \pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y}) = \frac{\pi_{pri}(\mathbf{P})\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})}{\pi(\mathbf{Y})} \quad (4)$$

onde $\pi_{post}(\mathbf{P})$ é a densidade de probabilidade *a posteriori*, $\pi_{pri}(\mathbf{P})$ é a densidade de probabilidade *a priori*, $\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})$ é a função de verossimilhança e, por fim, $\pi(\mathbf{Y})$ é a densidade marginal de probabilidade das medidas (Orlande et al., 2012).

Admitindo-se que as medições são feitas a cada intervalo de tempo Δt até um tempo final t_f , o vetor contendo esses valores é expresso como

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \dots, \mathbf{Y}_{t_f}\} \quad (5)$$

Considerando-se os erros de medição como variáveis aleatórias Gaussianas, com média zero e matriz de covariância \mathbf{W} conhecida, e também aditivos e independentes dos parâmetros \mathbf{P} , a função de verossimilhança pode ser representada por (Kaipio e Somersalo, 2005; Orlande et al., 2012, 2011; Ribeiro e Molina, 2017)

$$\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}) = (2\pi)^{-I/2} |\mathbf{W}|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P}))^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})) \right] \quad (6)$$

onde $\mathbf{T}(\mathbf{P})$ é a solução do problema direto considerando os parâmetros \mathbf{P} , \mathbf{W}^{-1} é a inversa da matriz de covariância dos erros de medição e I é o número de observações.

A informação *a priori* utilizada foi a Gaussiana cujo modelo é dado por (Mota et al., 2010; Orlande et al., 2014)

$$\pi_{pri}(\mathbf{P}) = (2\pi)^{-N/2} |\mathbf{V}|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{P} - \boldsymbol{\mu}_{pri})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{P} - \boldsymbol{\mu}_{pri}) \right] \quad (7)$$

onde \mathbf{V} é a matriz de covariância para os parâmetros \mathbf{P} , N é o número de parâmetros e $\boldsymbol{\mu}_{pri}$ é o vetor com as médias da gaussiana para cada parâmetro.

A forma da priori *Total Variation* é dada por (Orlande et al, 2014):

$$\pi(\mathbf{P}) \propto \exp[-\gamma TV(\mathbf{P})] \quad (8)$$

onde, para o presente caso

$$TV(\mathbf{P}) = \sum_{i=2}^{N-1} \Delta x [|p_i - p_{i+1}| + |p_i - p_{i-1}|] \quad (9)$$

sendo $TV(\mathbf{P})$ a função *Total Variation* e γ o parâmetro de regularização.

O algoritmo do MCMC foi o Metropolis-Hastings (Mota et al., 2010; Orlande et al., 2011, 2014)

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os presentes problemas foram resolvidos no *software* Wolfram Mathematica em um computador com processador i7-7500U, com 8GB de memória RAM. Os parâmetros físicos e as propriedades térmicas adotados para a solução do problema físico estão descritos na Tabela 1 (Incropera et al., 2014; Ozisik, 1987)). As placas utilizadas no experimento são de aço inox.

Tabela 1- Parâmetros Físicos

Parâmetro físico	Símbolo	Valor
Condutividade térmica	k	$15.1 W/(m \cdot K)$
Massa específica	ρ	$8055 kg/m^3$
Calor específico	c_p	$903 J/(kg \cdot K)$
Comprimento da placa	L_x	$0,08 m$
Altura da placa	L_y	$0,04 m$
Espessura da placa	L_z	$0,002 m$

3.1 Resultados do problema inverso com medidas simuladas

A fim de computar o problema inverso e validar o código computacional e o método proposto inicial, dados experimentais foram simulados à partir da adição de um ruído à solução do problema direto. Os ruídos adicionados são valores aleatórios de uma distribuição normal com média $\mu_n = 0$ e desvio padrão $\sigma_n = 0,1$. O coeficiente de troca térmica por convecção adotado foi $h = 15 W/(m^2 \cdot K)$ e temperatura ambiente, $T_\infty = 23^\circ C$.

O estado inicial da cadeia de Markov foi um vetor com 81 elementos iguais a 0. Na verossimilhança (Eq. (6)) utilizaram-se as medidas simuladas com um passo de tempo igual a 60 segundos, ou seja, as medidas nos instantes 0, 60 s, 120 s, 180 s, ..., 600 s. A geração de novos candidatos pela densidade de transição é uma distribuição normal com média igual ao candidato anterior para cada posição do vetor e desvio padrão igual a σ_c . Foram considerados 2 casos:

- Caso 1 - Priori Gaussiana informativa com $\mu_{pri} = 0$ para $x < 0,02 m$ e $x > 0,06 m$; $\mu_{pri} = 500 W/m^2$ para $0,02 m < x < 0,06 m$; $\sigma_{pri} = 50 W/m^2$; e $\sigma_c = 2$;
- Caso 2 - Priori *Total Variation* com $\gamma = 0,001$ e $\sigma_c = 0,5$.

Foram geradas, através do problema inverso, 110.000 cadeias no Caso 1 e 250.000 no Caso 2. A Fig. 2 mostra a evolução das cadeias em duas posições diferentes para cada caso onde os fluxos exatos são $q = 0$ e $q = 500 W/m^2$ e é possível notar uma convergência mais rápida no Caso 1.

Foi considerado no Caso 1 um estado de aquecimento de 60.000 cadeias e no Caso 2, de 170.000. Na Fig. 3 estão representados os histogramas das cadeias de Markov nas posições onde o fluxo esperado é igual $q = 0$ e na Fig. 4, nas posições onde $q = 500 W/m^2$.

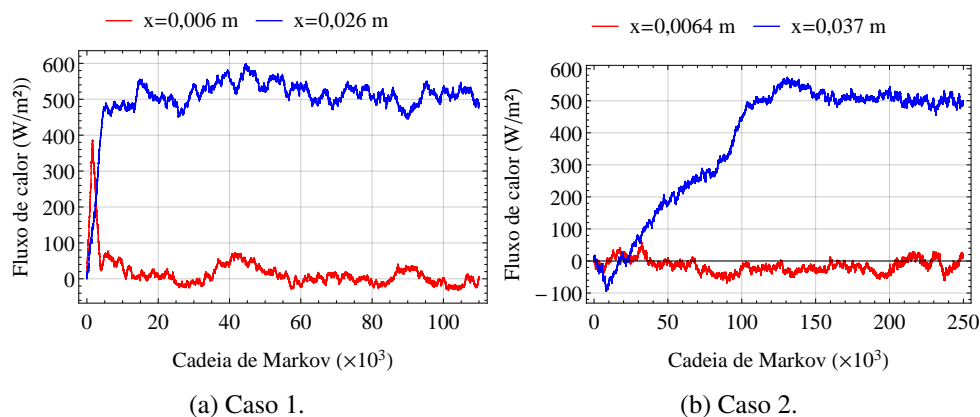


Figura 2- Evolução das Cadeias de Markov para os dois Casos adotados.

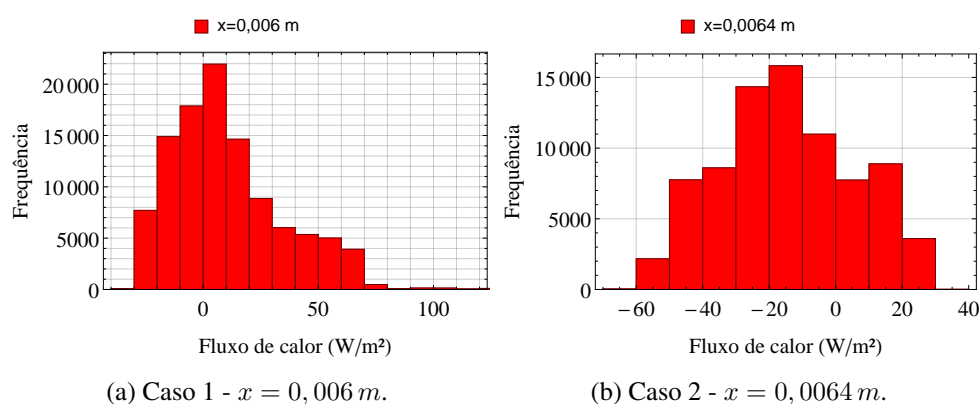


Figura 3- Histograma das cadeias de Markov nas posições onde o fluxo esperado é $q = 0$.

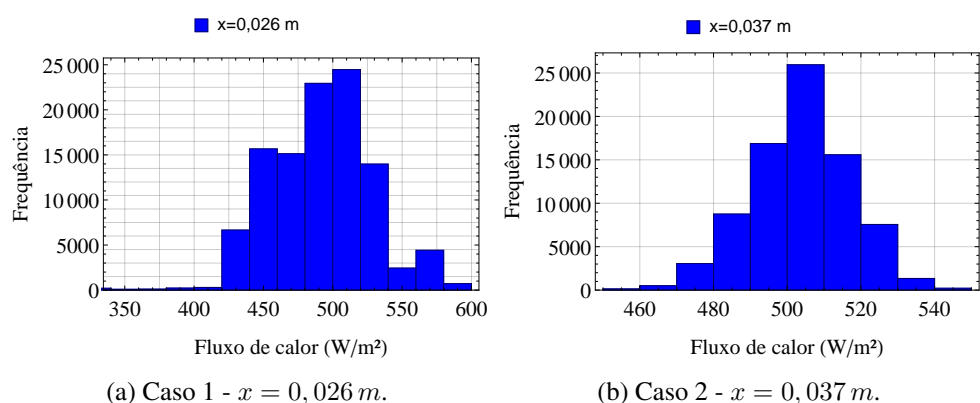


Figura 4- Histograma das cadeias de Markov nas posições onde o fluxo esperado é $q = 500 W/m^2$.

A Fig. 5 ilustra um comparativo entre os fluxos exatos e a média aritmética dos fluxos estimados pelo problema inverso em cada ponto da malha, considerando os estados de aquecimento de cada caso. No Caso 1, observa-se um comportamento oscilatório das médias do fluxo em torno do valor exato, considerando que a informação a priori utilizada é informativa. No Caso 2, considerou-se que a informação a priori é não informativa, assim os resultados obtidos dependem fortemente da escolha do parâmetro γ e apresentaram um comportamento suavizado

da função recuperada utilizando o *Total Variation*. O problema direto foi resolvido com as médias dos fluxos estimados a fim de realizar uma comparação das temperaturas obtidas com as simuladas ao longo da posição, ilustrada na Fig. 6. Os ruídos gerados estão representados na Fig. 7, cujo desvio padrão e valor absoluto máximo foram, respectivamente iguais a $0,091^{\circ}C$ e $0,26^{\circ}C$ no Caso 1 e $0,091^{\circ}C$ e $0,30^{\circ}C$ no Caso 2.

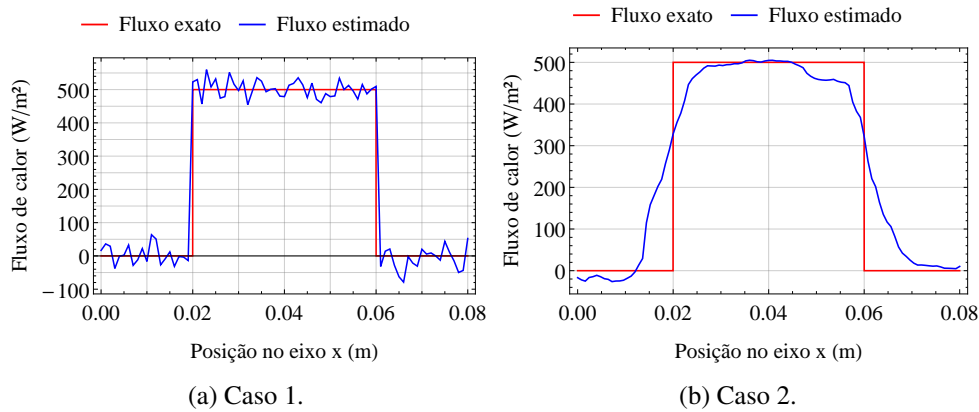


Figura 5- Comparação entre os fluxos esperados e as médias dos fluxos estimados.

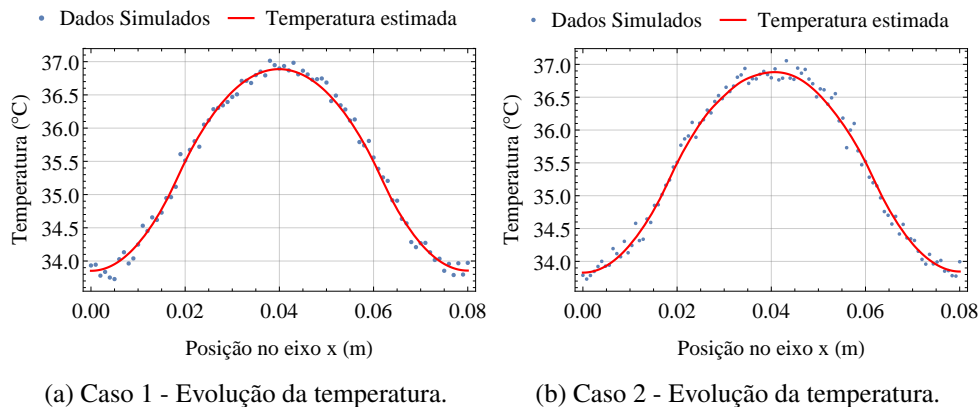


Figura 6- Comparação das medidas simuladas e estimadas ao longo da posição no instante $t = 600 s$ de cada caso.

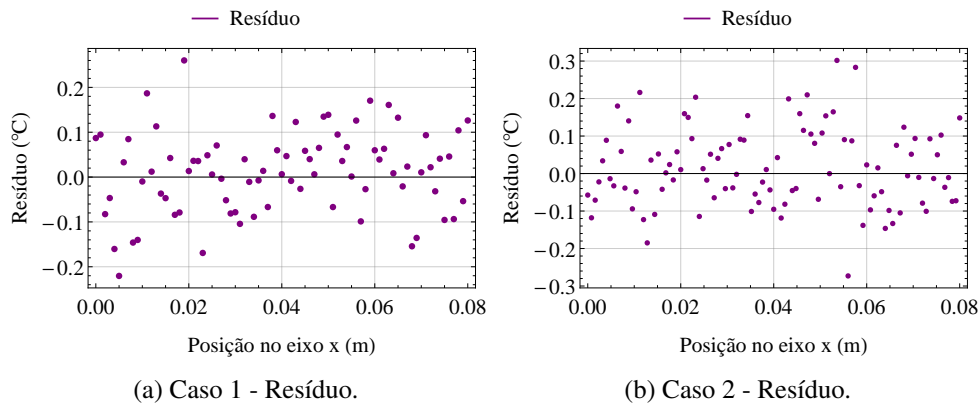
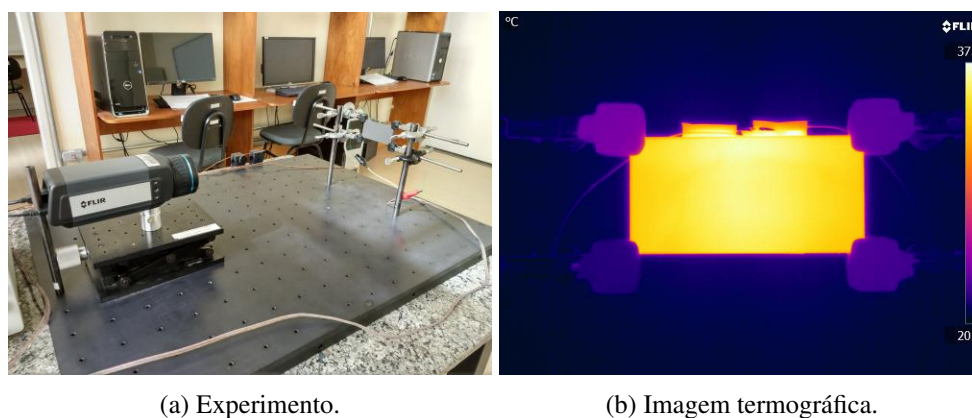


Figura 7- Resíduos obtidos em cada caso.

4. Resultados do Problema Inverso com Medidas Experimentais

O procedimento experimental foi realizado no Laboratório Patrícia Oliva Soares de Experimentação e Simulação Numérica em Transferência de Calor e Massa (LEMA) no IPRJ. Uma resistência elétrica foi posicionada entre duas placas de aço inoxidável formando uma configuração de sanduíche, que foram fixados por meio de mufas duplas em cada vértice como mostra a Fig. 8(a). O comportamento da temperatura é monitorado com o uso da câmera infravermelha através do software FLIR R&D no computador. O objetivo é aquecer as placas com a resistência elétrica e obter o campo de temperatura ao longo do tempo de $t = 660\text{ s}$ com intervalo de 1 segundo, sendo os 60 primeiros segundos com o intuito de estimar a temperatura ambiente e inicial da placa, considerando equilíbrio térmico com o ambiente. Além disso, vale ressaltar que a placa de aço inoxidável foi previamente pintada com um spray de tinta a base de carbono (NETZSCH) com emissividade conhecida. A Fig. 8(b) é uma imagem termográfica do experimento com as placas de aço inoxidável.



(a) Experimento.

(b) Imagem termográfica.

Figura 8- Procedimento experimental.

A resistência elétrica tem dimensões de $4\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ ($L_x \times L_y$) com a capacidade térmica desprezível e fornece o fluxo de calor às placas por efeito joule quando submetida a uma tensão. A Eq. (10) mostra como o fluxo é calculado. A diferença de potencial foi de $V = 9\text{ volts}$, a resistência equivale a $R = 39,8\text{ ohms}$ e a corrente foi de $i = 0,2\text{ A}$. Portanto, o fluxo esperado foi de $q_{esp} = 497,5\text{ W/m}^2$ (Blaudt et al., 2017).

$$q_{res} = \frac{Ri^2}{2L_x L_y} \quad (10)$$

Neste caso houve a necessidade de se considerar a placa com 1 cm a menos a fim de minimizar os erros experimentais presentes nos contornos devido às mufas que prendem as placas. Os sessenta primeiros segundos do experimento forneceram uma média de $T_\infty = 23^\circ\text{C}$ e o valor do coeficiente de troca térmica por convecção utilizado foi $h = 16,48\text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$ (Blaudt et al., 2017). Os parâmetros utilizados na priori gaussiana foram $\mu_{pri} = 0$ e $\sigma_{pri} = 15\text{ W/m}^2$ para $x < 0,015\text{ m}$ e $x > 0,055\text{ m}$; e $\mu_{pri} = 500\text{ W/m}^2$ e $\sigma_{pri} = 50\text{ W/m}^2$ para $0,015\text{ m} \leq x \leq 0,055\text{ m}$. O desvio padrão da geração de candidatos foi de $\sigma_c = 1$ e a cadeia inicial foi um vetor com todos os elementos iguais a 0.

Na solução do problema inverso utilizando o método de monte Carlo com Cadeias de Markov, foram geradas 80.000 cadeias e a Fig. 9 mostra a evolução das cadeias para duas posições diferentes. As médias para as posições $x = 0,11\text{ m}$ e $x = 0,041\text{ m}$ foram, respectivamente,

iguais a $0,22 W/m^2$ e $513,08 W/m^2$ e os desvios padrão, $12,99 W/m^2$ e $20,11 W/m^2$ considerando apenas as 20.000 últimas cadeias. A Fig. 10(a) mostra o histograma gerado com os estados da cadeia de Markov convergida na posição $x = 0,011$ onde as maiores frequências ocorreram por volta de 0, que é o valor do fluxo esperado para a posição. A Fig. 10(b) ilustra o histograma da cadeia da posição $x = 0,041 m$, onde o fluxo esperado é $497,5 W/m^2$ e as maiores frequências ocorreram por volta de $520 W/m^2$.

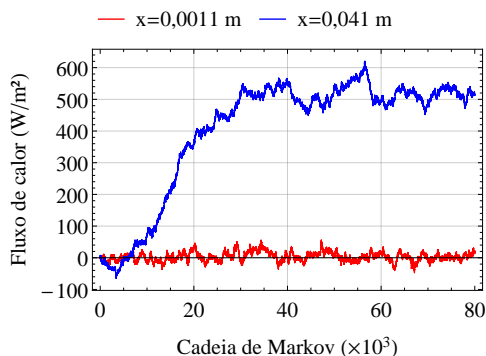


Figura 9- Evolução das Cadeias de Markov para duas posições, $x = 0,005 m$ e $x = 0,035 m$, obtida com medidas experimentais.

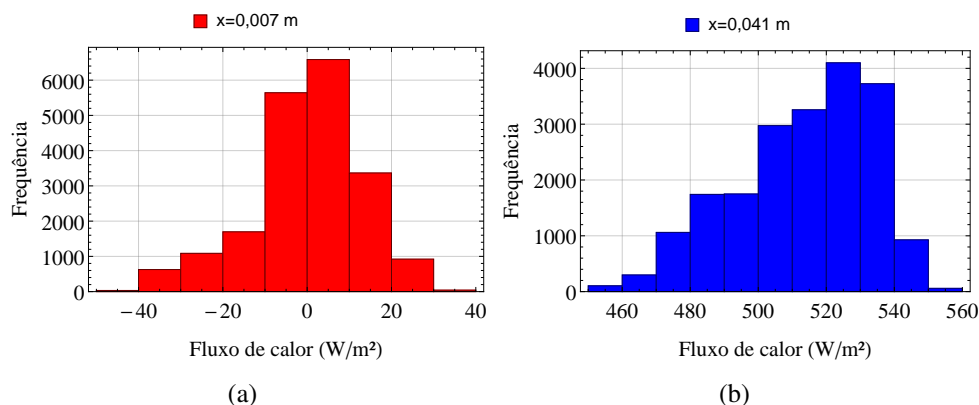


Figura 10- Histogramas das cadeias de Markov obtidas com medidas experimentais.

As médias para cada posição das 20.000 últimas cadeias de Markov geraram o gráfico do fluxo de calor ilustrado pela Fig. 11, por onde notam-se maiores oscilações na região onde o fluxo esperado é igual a $q = 497,5 W/m^2$. A Fig. 12(a) compara a temperatura experimental com a temperatura obtida através do problema direto com a média dos parâmetros estimados e na Fig. 12(b) têm-se os resíduos, $Y - T(P)$, com desvio padrão igual a $0,10 ^\circ C$ e valor absoluto máximo igual a $0,26 ^\circ C$

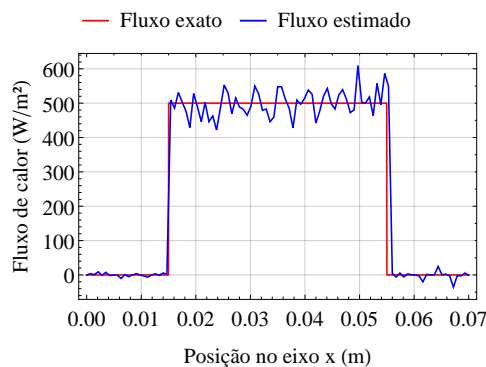
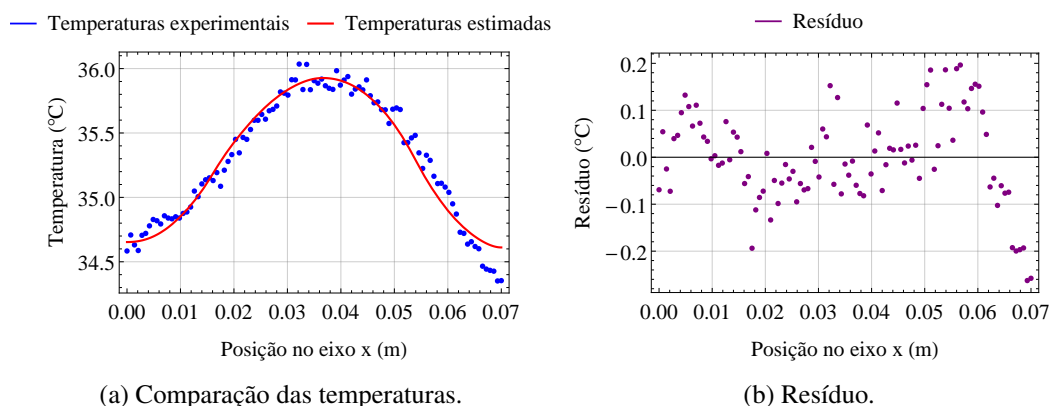


Figura 11- Comparação entre os fluxos esperados e as médias dos fluxos estimados no experimento com placas de aço.



(a) Comparação das temperaturas.

(b) Resíduo.

Figura 12- Comparação das temperaturas experimentais e obtidas ao longo da posição no instante $t = 600$ s (a). Resíduo ao longo da posição (b).

5. CONCLUSÃO

No presente trabalho foi abordado um problema de estimativa de fluxo de calor de contorno em placas de aço inoxidável utilizando o método de Monte Carlo com Cadeias de Markov, empregado através do algoritmo de Metropolis-Hastings com uso de prioris Gaussiana e *Total Variation* e medidas simuladas e reais obtidas experimentalmente.

Foram considerados dois Casos com medidas simuladas: o Caso 1 utiliza uma priori Gaussiana e o Caso 2 utiliza o *Total Variation*. No Caso 1 foi possível estimar a função do fluxo de calor com comportamento oscilatório em torno dos valores exatos para os fluxos e no Caso 2, a estimativa da função teve um comportamento suavizado devido à escolha do parâmetro γ e nota-se a dificuldade do método em detectar e estimar variações bruscas do fluxo de calor (Fig. 5). Ambos os casos foram capazes de estimar a função do fluxo de calor gerando, na análise de resíduos ($Y - T(P)$), valores absolutos que variam de 0 a 0,30°C. A solução do problema inverso com medidas experimentais foi capaz de detectar a função do fluxo de calor (Fig. 11), com valores absolutos na análise de resíduos que variam de 0 a 0,26°C.

Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte financeiro do CNPq e da CAPES.

REFERÊNCIAS

- Incropera, F. P., Dewitt, D. P., Bergman, T. L., Lavine, A. S., Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa, ed. 7, LTC Editora, 2014.
- Ozisik, M. N., *Basic Heat Transfer: A Basic Approach*, ed.9, R. E. Krieger Pub. Co., 1987.
- Ribeiro, F. B., Molina, E. C., Uma Introdução ao Método de Monte Carlo, SBMAC, 2017.
- Orlande, H. R. B., Colaço, M. J., Cotta, C. P. N. Guimarães, G., Borges, V. L., Problemas Inversos em Transferência de Calor, SBMAC, 2011.
- Orlande, H. R. B., *Inverse Problems in Heat Transfer: New Trends on Solution Methodologies and Applications*, Journal of Heat Transfer, v. 134, n.3, p. 31011, 2012.
- Kaipio, J., Somersalo, E., *Statistical and Computational Inverse Problems*, New York: Springer Verlag, v. 160, 2005.
- Mota, C. A. A., Orlande, H. R. B., de Carvalho, M. O. M., Kolehmainen, V., Kaipio, J. P., *Bayesian Estimation of Temperature-Dependent Thermophysical Properties and Transient Boundary Heat Flux*, Heat Transfer Engineering, Taylor & Francis v. 31, n. 7, p. 570-580, 2010.
- Orlande, H. R. B., Dulikravich, G. S., Neumayer, M., Watzenig, D., Colaço, M. J., *Accelerated Bayesian Inference for the Estimation of Spatially Varying Heat Flux in a Heat Conduction Problem*, Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, Taylor & Francis, v. 65, n.1, p. 1-25, 2014.
- Blaudt, C. A., Sanches, E. L., Knupp, D. C., Abreu, L. A. S., Silva Neto, A. J., Estimativa de Fluxo Térmico com Variação Temporal Empregando Imagens Termográficas e o Método de Luus-Jaakola, CEREU, v. 10, 2017.
- Silva Neto, A. J. da., Ozisik, M. N., *The Estimation of Space and Time Dependent Strength of a Volumetric Heat Source in a One-dimensional Plate*, International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 37, n. 6, p.909-915, 1994.
- Pradere, C., Joanicot, M., Batsale, J.C., Toutain, J., Gourdon, C., *Processing of Temperature Field in Chemical Microreactors With Infrared Thermography*, Quantitative InfraRed Thermography Journal, v. 3, n. 1, p.117-135, 2006.
- Mital, M., Scott, E.P., *Thermal Detection of Embedded Tumors Using Infrared Imaging*, Journal of Biomechanical Engineering, v. 129, n.1, p. 33-39, 2007.
- Eren, G., Aubreton, O., Meriaudeau, F., Secades, L. A. S., Fofi, D., Naskali, A. T., Truchetet, F., Ercil, A., *Scanning From Heating: 3D Shape Estimation of Transparent Objects From Local Surface Heating*, Optics Express, v. 17, n. 14, p. 11457-11466, 2009.

EXPERIMENTAL THEORETICAL ANALYSIS OF THERMAL FLUX WITH SPATIAL VARIATION EMPLOYING BAYESIAN INFERENCE AND THERMOGRAPHIC IMAGES

Abstract. *In many industrial applications, prior knowledge of boundary heat flux is essential for the design and proper functioning of systems and equipment such as electronics, microreactors and tumor detection, for example. The present work therefore aims at the validation of an experiment by solving an inverse problem of estimation of boundary heat flux with spatial variation in a thermally thin stainless steel plate whose thermal properties and dimensions are known. The direct problem was solved by a Wolfram Mathematica software command and involves heating one of the surfaces of the plate with a heat flux. The inverse problem was solved via Markov Chain Monte Carlo method within a Bayesian approach that was implemented through the Metropolis-Hastings algorithm and consisted in the estimation of the heat flux with spatial variation being known the measures that were simulated considering the solution of the direct problem and obtained experimentally through infrared thermography. The proposed technique was able to estimate the heat flux function from simulated and actual temperature measurements.*

Keywords: *Inverse Problems, Boundary Heat Flux, Markov Chain Monte Carlo, Bayesian Inference, Heat Transfer.*