

08 a 11 de Outubro de 2018  
Instituto Federal Fluminense  
Búzios - RJ

## **SIMULAÇÃO ELETROMAGNÉTICA DE SUPERCONDUTORES PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS: DISCUSSÃO DE ALTERNATIVAS E REVISÃO DE LITERATURA**

**Alan Sovano Gomes**<sup>1</sup> – alan.s.gomes@ieee.org

**Wellington da Silva Fonseca**<sup>1</sup> – fonseca@ufpa.br

<sup>1</sup> Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia – Belém, PA, Brasil

**Resumo:** *Este trabalho visa discutir a literatura referente à modelagem de supercondutores através do método de elementos finitos, abordando as alternativas de modelagem no que tange o estudo físico das propriedades eletromagnéticas dos materiais citados em situações chave. Durante o trabalho, são abordadas modelagens através do FEMM (Finite Element Method Magnetics) e do COMSOL Multiphysics®, além de um trabalho interessante que fala sobre a modelagem através das equações de London. Por fim, é realizada uma conclusão sobre a pesquisa realizada é feita.*

**Palavras-chave:** *Eletromagnetismo, Método de Elementos Finitos, Supercondutividade, Revisão de Literatura.*

### **1. INTRODUÇÃO**

Grande parte dos problemas físicos envolvendo eletromagnetismo são descritos por equações diferenciais parciais de segunda ordem, com soluções analíticas de pouca praticidade e de difícil obtenção (BASTOS, 2012). Desta forma, diversos tipos de métodos numéricos passaram a ser aplicados dentro da área e, conforme os computadores foram se tornando mais rápidos e eficientes, problemas envolvendo materiais com propriedades singulares e geometrias complexas puderam ser resolvidos de forma precisa (CHAPRA & CHARLIE, 2016).

Entre a vasta quantidade de métodos utilizados para a modelagem de problemas, pode-se destacar o método de elementos finitos (MEF), o qual, de forma sucinta, pega uma geometria complexa e a subdivide em geometrias mais simples (elementos) que estão conectados entre si em determinados pontos (nós) (SADIKU, 2012).

Entre as possibilidades de estudo utilizando o MEF, ele possui boa aplicabilidade no estudo de problemas envolvendo materiais supercondutores, visto que facilita o estudo da aplicabilidade de tais materiais, já que os mesmos enfrentam problemas com ensaios experimentais como a necessidade de resfriamento até atingir temperaturas muito baixas (menores que 5K) ou a dificuldade de obtenção dos mesmos (REZENDE, 2015).

Diante do exposto, este trabalho buscou juntar procedimentos e metodologias de estudo para utilização do método de elementos finitos em estudos eletromagnéticos de materiais supercondutores e abordá-los de forma resumida e direta, além de comentar sobre as possibilidades de utilização de softwares para tais modelagens, visto que a literatura sobre o assunto é escassa se comparada a literatura existente sobre ensaios eletromagnéticos de materiais com propriedades magnéticas e elétricas convencionais.

## 2. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

O método de elementos finitos começou a ser utilizado na área de eletromagnetismo a partir do trabalho de Silvester & Chari (1970). Desde então, vários softwares comerciais e livres para resolução de problemas de eletromagnetismo foram desenvolvidos, baseando suas soluções nas equações de Maxwell na forma diferencial.

De acordo com Fonseca (2010), pode-se listar algumas características do MEF que o colocam como boa opção para análises físicas, como:

- Pode ser formulado na forma de equações matriciais (facilitando a implementação computacional);
- Pode-se associar elementos de diferentes tamanhos e formas em um mesmo problema com o intuito de discretizar geometrias complexas;
- O método facilita a modelagem de problemas envolvendo domínios não homogêneos e descontinuidades.

A Figura 1 mostra um exemplo de uma malha de elementos finitos de um objeto 2D. No desenho “a” temos o domínio de análise a ser dividido em elementos (discretizado), enquanto no desenho “b” temos o domínio subdividido em regiões menores.

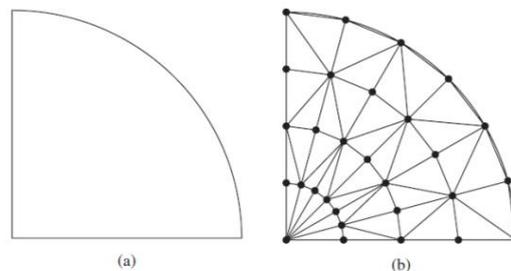


Figura 1 – Domínio original e domínio dividido em elementos finitos conectados por nós (FONSECA, 2010).

## 3. MATERIAIS SUPERCONDUTORES

Os materiais supercondutores são materiais que, em certa temperatura crítica, obtêm propriedades especiais como o diamagnetismo perfeito (efeito Meissner) e resistência elétrica quase nula. Essas propriedades, além de dependente da temperatura, também dependem do valor da densidade de corrente que passa pelo material e do campo magnético ao qual ele está submetido. (OSTERMANN *et al.*, 1998).

Em termos de classificação, os supercondutores podem ser divididos, essencialmente, em duas categorias: tipo I ou “macios”; tipo II ou “duros” (REZENDE, 2015). Podemos classificar

estes dois tipos a três parâmetros existentes no fenômeno da supercondutividade: a temperatura crítica ( $T_c$ ), o campo magnético crítico ( $H_c$ ) e a densidade de corrente crítica ( $J_c$ ).

Os materiais do tipo I possuem baixa temperatura crítica e, quando o material está submetido a um campo  $H_c$  ou por ele passa uma densidade de corrente  $J_c$ , ele perde suas propriedades supercondutoras. Os do tipo II possuem temperatura crítica mais alta e, além disso, um estado intermediário com relação ao seu campo magnético: caso o material seja submetido a um campo entre uma faixa definida por dois valores ( $H_{c1}$  e  $H_{c2}$ ), ele apresenta certas regiões com propriedades supercondutoras e outras com propriedades normais, formando uma espécie de estado misto (CARRARO *et al.*, 2011).

A supercondutividade ainda não é completamente compreendida e, para simulação, muitas vezes procura-se utilizar modelos fenomenológicos confecção de modelos, como será explorado mais adiante.

#### 4. PROGRAMAS E METODOLOGIAS DE MODELAGEM

Nesta seção, serão mostrados programas e soluções para a modelagem de supercondutores.

##### 4.1 Utilização do FEMM (Finite Element Method Magnetics)

O FEMM é um software livre utilizado para a resolução de problemas eletromagnéticos de baixa frequência em duas dimensões ou com simetria axial (MEEKER, 2018). O software já é bem estabelecido para problemas eletromagnéticos, desde que as geometrias que pretende-se analisar possam ser modeladas no programa em questão. O programa conta, ainda, com a linguagem de programação LUA, podendo esta ser usada para a escrita de *scripts* que façam tarefas ainda não implementadas no programa.

No trabalho de Bryslawskyj (2009), é informado que a modelagem de um supercondutor tipo I pode ser realizada configurando a curva B-H do material no programa como sendo igual a de um material diamagnético perfeito. Essa técnica permite simular o efeito Meissner, sendo útil para modelagem computacional de sistemas que estejam interessados no fenômeno de levitação magnética. Além disso, o mesmo apresenta uma metodologia para modelagem de um supercondutor tipo II, também focada na curva B-H e em descrever o efeito Meissner, mas levando em consideração o estado misto que o mesmo pode vir a apresentar. A Figura 2 mostra a modelagem do supercondutor do tipo I no FEMM. Como pode-se perceber, as considerações realizadas descrevem, de fato, o efeito Meissner.

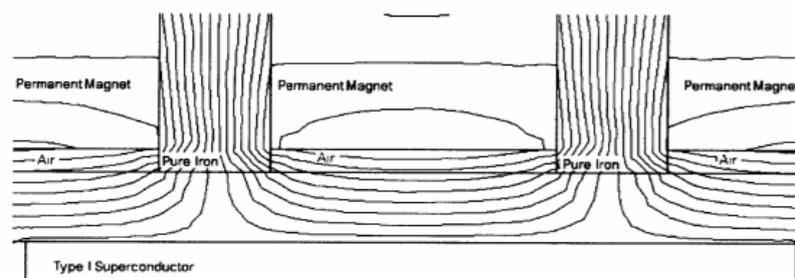


Figura 2 – Modelagem de um supercondutor tipo I (parte inferior da figura) no FEMM (BRYSLAWSKYJ, 2009).

O Trabalho de Costa (2005) reforça a possibilidade de modelar o efeito Meissner através do FEMM de um material supercondutor do tipo II.

Nos dois trabalhos são utilizados modelos de estados críticos para a descrição do comportamento magnético dos materiais tipo II. Tais modelos buscam representar o comportamentos destes através de formulações matemáticas a partir de grandezas eletromagnéticas que sejam mensuráveis e representativas (KASAL, 2006). Nas duas modelagens, entretanto, são utilizadas modelos de estado crítico diferentes para a construção das curvas de magnetização: no trabalho de Bryslawskyj (2009) é utilizado o modelo de Kim ( $J_c$  depende do fluxo magnético) enquanto no de Costa (2005) o modelo de Bean (formulação considerando uma  $J_c$  constante) foi o escolhido. Além desses dois modelos, há ainda o modelo de estado crítico de Anderson-Kim, o qual relaciona  $J_c$  com o campo elétrico (KASAL, 2006). A escolha do modelo pode acontecer com base nos parâmetros disponíveis na hora da modelagem no FEMM e de acordo com dados que sejam possíveis obter experimentalmente ou já estejam descritos na literatura.

#### 4.1 Utilização do COMSOL Multiphysics©

O COMSOL Multiphysics© é um software comercial que utiliza o Método de Elementos Finitos na resolução de Equações Diferenciais Parciais (EDP's). Ele oferece uma interface onde é possível entrar com um conjunto de EDP's a serem usadas na modelagem do problema (COSTA, 2014). Isto facilita a modelagem de materiais supercondutores, os quais não costumam ser descritos explicitamente em softwares comerciais de elementos finitos. A Figura 3 mostra o modelo de um condutor desenvolvido no software.

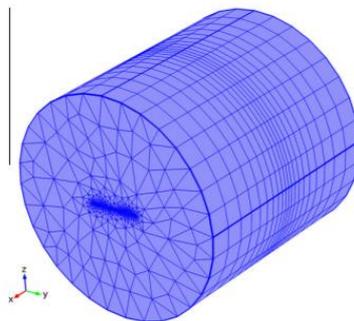


Figura 3 – Geometria desenvolvida no COMSOL Multiphysics© (GRILLI *et al.*, 2013).

Os trabalhos de Zhang & Coombs (2011) e Grilli *et al.* (2013) mostram a realização de modelagens de supercondutores com base na formulação H (a qual se baseia a equação de Faraday). Esse tipo de técnica tem sido utilizada para problemas em que há presença de campo magnético e correntes alternadas atuando sobre um supercondutor tipo II (ZHANG & COOMBS, 2011).

Associada a formulação H é utilizado o modelo de Anderson-Kim para descrever o material supercondutor em si. As Equações (1) e (2) apresentam, respectivamente, as formulações mencionadas, onde:  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo;  $\mu_r$  é a permeabilidade relativa;  $H$  é o campo magnético;  $E$  é o campo elétrico;  $J$  é a densidade de corrente e  $\rho$  é a resistividade do material.

$$\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \nabla \times (\rho \nabla \times \vec{H}) = 0 \quad (1)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \left( \frac{J}{J_c} \right)^n \quad (2)$$

#### 4.1 Modelagem através das equações de London

A pesquisa de Sotelo et al. (2014) mostra uma formulação matemática para a utilização das equações de London na modelagem por elementos finitos, remodelando as equações em termos do potencial vetor magnético.

Abordando a teoria de London de forma simplificada, temos a formulação que segue nas Eq. (3) e (4). Esse par de expressões matemáticas não explica o fenômeno da supercondutividade, mas modela, de forma clássica e prática, os materiais supercondutores. Esse par de equações é elaborado a partir do conceito de um “super-elétron” (ou par de Cooper, segundo a teoria quântica) e da aplicação das equações de Maxwell.

Temos, nas Equações de London, que  $J_s$  é a densidade de corrente que passa pelo material;  $n_s$  é a densidade de super-elétrons;  $e^*$  e  $m^*$  são, respectivamente, a carga e a massa do super-elétron;  $E$  é o campo elétrico aplicado;  $B$  é a indução magnética e  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo.

$$\frac{d\vec{J}_s}{dt} = \frac{n_s \cdot e^{*2}}{m^*} \cdot \vec{E} \quad (3)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} + \frac{\mu_0 \cdot n_s \cdot e^{*2}}{m^*} \vec{B} = 0 \quad (4)$$

Ambas as equações podem ser reescritas de outra forma, levando em consideração um constante  $\lambda_L$  chamado de comprimento de London que relaciona carga, massa e densidade dos super-elétrons junto com a permeabilidade magnética do vácuo (REZENDE, 2015). No artigo em questão, com as devidas considerações matemáticas, os autores chegam à Eq. (5), a qual está de acordo com a teoria de London e em termos do potencial vetor magnético  $A$ .

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{1}{\lambda_L^2} \vec{A} \quad (1)$$

No artigo, o autor não informa ter utilizado algum software específico. Entretanto, entende-se que este tipo de modelagem pode ser utilizada nos softwares já citados (realizando um script em LUA no FEMM e entrando com o conjunto de equações no COMSOL Multiphysics®).

## 5. CONCLUSÃO

A partir da pesquisa realizada, foi possível verificar como tratar problemas envolvendo supercondutores das seguintes formas:

- Problemas relacionados ao efeito Meissner, envolvendo objetos que possam ser desenhados em 2D ou que tenham simetria axial (FEMM);
- Problemas envolvendo correntes alternadas no material superconductor, além de campos magnéticos ao qual o mesmo fica submetido, com uma formulação que pode ser implementada em um software comercial (COMSOL Multiphysics®);
- Uma formulação que pode ser implementada através do modelo fenomenológico de London em qualquer um dos softwares.

Logo, pode-se observar que tem-se disponíveis softwares que podem ser utilizados na modelagem computacional de sistemas envolvendo problemas eletromagnéticos com supercondutores. Deve-se ressaltar, entretanto, que existem outros softwares disponíveis no mercado que podem ser utilizados para este propósito, entretanto, procurou-se buscar uma solução comercial e não comercial para esta abordagem, além de uma técnica que fosse possível implementar em mais de um software.

## REFERENCIAS

BASTOS, João Pedro Assumpção. **Eletromagnetismo para engenharia**: estática e quase estática. 3ª ed. rev. – Florianópolis: Ed. da UFSC, 2012.

BRYSLAWSKYJ, Jason Jason Bogdan. **Optimization of superconducting magnetic bearings using finite element modeling**. 2009. Tese de Doutorado. Massachusetts Institute of Technology.

COSTA, Felipe Lins de Brito et al. Estudo físico computacional das propriedades eletromagnéticas de uma ta de YBCO. 2014.

DA COSTA, Giancarlo Cordeiro. **Estudo da levitação magnética e determinação da corrente crítica de blocos supercondutores de alta Tc pelo método dos elementos finitos**. 2005. Tese de Doutorado. Tese de Doutorado, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

DAS VIRGENS, Mauricio Gomes. **Supercondutividade, ferromagnetismo e efeito magnetocalórico nos sistemas RuSr<sub>2</sub>Ln<sub>1</sub>, 5 Ce<sub>0</sub>, 5 Cu<sub>2</sub>O<sub>10</sub> (Ln= Gd, Eu)**. 2005. Tese de Doutorado. UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE.

FONSECA, Wellington da Silva. Modelagem de transformadores de núcleo amorfo usando método de elementos finitos. 2010.

GRILLI, Francesco et al. Development of a three-dimensional finite-element model for high-temperature superconductors based on the H-formulation. **Cryogenics**, v. 53, p. 142-147, 2013.

INÁCIO, David Duarte Pereira. Estudo do motor em disco com o rotor em alumínio e em supercondutor multi-semente. 2014.

KASAL, RAPHAEL BARATA Simulação de Supercondutores pelo Modelo do Estado Crítico [Rio de Janeiro] 2006 IX, 144 p. 29, 7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc.

KUMAR, Mukesh. **Investigation of Magnetic Force in Metallic Structure of Superconducting Magnet**. 2015. Tese de Doutorado. National Institute of Technology Rourkela.

MEEKER, David. Finite element method magnetics. **FEMM**, 2018.

NICOLSKY, R. et al. Development of hybrid bearing system with thrust superconducting magnetic bearing and radial active electromagnetic bearing. **Physica C: Superconductivity**, v. 341, p. 2509-2512, 2000.

OSTERMANN, Fernanda; FERREIRA, Leticia Mendonca; CAVALCANTI, Claudio Jose de Holanda. Tópicos de física contemporânea no ensino médio: um texto para professores sobre supercondutividade. **Revista brasileira de ensino de física**. Vol. 20, n. 3 (set. 1998), p. 270-2884, 1998.

OSTERMANN, Fernanda; MOREIRA, Marco Antonio. Uma revisão bibliográfica sobre a área de pesquisa “Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio”. **Investigações em ensino de ciências**, v. 5, n. 1, p. 23-48, 2016.

REZENDE, Sergio M. **Materiais e Dispositivos Eletrônicos**. 4ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

RHYNER, Jakob. Magnetic properties and AC-losses of superconductors with power law current—voltage characteristics. **Physica C: Superconductivity**, v. 212, n. 3-4, p. 292-300, 1993.

SADIKU, M. N. O. Elementos de Eletromagnetismo, vol. único. **Porto Alegre, Rio Grande do Sul: Bookman**, 2004.

SILVESTER, Peter; CHARI, Madabushi VK. Finite element solution of saturable magnetic field problems. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, n. 7, p. 1642-1651, 1970.

SOTELO, Guilherme Gonçalves et al. Utilização das Equações de London para a Modelagem de Supercondutores. In: **MOMAG 2.004–11º Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica (SBMO) e 6º Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo (CBMag)**. 2004. p. 1807-1809.

TEDESCO, Duani; HOFFMANN, Kleyton; JANUÁRIO, Marconi. Introdução ao método de elementos finitos aplicado ao eletromagnetismo para estudantes de engenharia elétrica. **Unoesc & Ciência-ACET**, v. 6, n. 1, p. 75-82, 2015.

ZERMEÑO, Víctor MR; QUAIYUM, Salman; GRILLI, Francesco. Open-source codes for computing the critical current of superconducting devices. **IEEE Transactions on Applied Superconductivity**, v. 26, n. 3, p. 1-7, 2016.

ZHANG, Min; COOMBS, T. A. 3D modeling of high-Tc superconductors by finite element software. **Superconductor Science and Technology**, v. 25, n. 1, p. 015009, 2011.

## **ELECTROMAGNETIC SIMULATION OF SUPERCONDUCTORS BY THE METHOD OF FINITE ELEMENTS: DISCUSSION OF ALTERNATIVES AND LITERATURE REVIEW**

**Abstract:** *This work is aimed at the literature on the modeling of superconductors through the finite element method, approaching the modeling alternatives regarding the physical study of the electromagnetic substances of the cited materials in key situations. During the work, modeling through the FEMM (Finite Magnetic Method Method) and COMSOL Multiphysics ©, and an interesting work on modeling through the equations of London are discussed. Finally, a research on the accomplishment was carried out.*

**Keywords:** *Electromagnetism, Finite Element Method, Superconductivity, Literature Review.*