ALGORITMO ESTOCÁSTICO APLICADO NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DAS P-MEDIANAS PARA LOCALIZAÇÃO DE CENTRO DE FACILIDADES

Maurício Rodrigues Silva - e-mail: dscmauricio@gmail.com
Universidade Federal Fluminense – UFF - Instituto do Noroeste Fluminense – INFES
Departamento de Ciências Exatas Biológicas e da Terra – PEB
Av. João Jasbick, Bairro Aeroporto, CEP 28470-000, Santo Antônio de Pádua, RJ, Brasil

Resumo. *Este artigo tem como objetivo principal apresentar um algoritmo estocástico para solução do problema das p-medianas para localização de centro de facilidades em uma região plana. Este algoritmo possui propriedade estocástica, que permite a escolha dos centros de facilidade de uma forma simplificada, caracterizando assim como um método heurístico, que apesar de sua simplicidade, garante bons resultados na determinação dos centros. A partir de um conjunto de n pontos de coordenadas geográficas, é gerada uma matriz n x n contendo todas as distâncias entre um ponto i e os demais pontos j. Através da minimização das somas das distâncias de cada ponto candidato em relação aos demais, um subconjunto dos pontos que representarão as coordenadas dos centros de facilidades é determinado. O critério principal na escolha dos centros é o menor somatório das distâncias entre um centro e os demais pontos que receberão a facilidade, seguindo a lógica do problema das p medianas. O diferencial deste algoritmo está na inclusão de um raio R limitando o alcance de cada centro de facilidades em uma região de interesse.*

Palavras-chave: *Heurísticas, Otimização combinatória, Centros de facilidades, P-medianas.*

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma solução alternativa para a alocação de centros de facilidades tendo como princípio, o problema das p-medianas. Utilizando um algoritmo estocástico de natureza heurística, através de técnicas de otimização combinatória, pontos candidatos a centro de distribuição de facilidades são avaliados, quanto ao somatório das distâncias de suas coordenadas centrais em relação aos demais pontos, buscando o de menor valor. Técnicas heurísticas produzem resultados bem próximos da solução ótima em problemas de otimizaçao, atendendo às restrições impostas, alcançando na maioria das vezes seus objetivos. Por outro lado, métodos exatos apesar de garantir soluções ótimas, muitas vezes são inviáveis devido ao seu alto custo computacional. Muitos problemas clássicos podem ser solucionados por otimização combinatória, como o problema do caixeiro viajante, o problema de roteamento de veículos, o problema da cobertura mínima por conjuntos (Goldbarg e Luna, 2000), assim como o problema das p-medianas utilizado na localização centros de facilidades. O termo facilidade pode ser interpretado como fábricas, depósitos, escolas, postos de saúde, aeroportos, ou qualquer outro centro determinado a distribuir algum serviço ou bem estrategicamente localizado para atender determinada região ou população. O termo cliente pode ser interpretado como depósitos, unidades de vendas, consumidores, etc (Lorena, 2001). Pelo fato dos clientes serem alocados aos centros, esta classe de problemas pode ser também identificada como problemas de alocação ou problemas de localização, pois na maioria dos casos, buscam atender ao máximo possível suas demandas (Arakaki, R. G. I, 2003). Isto é, buscam alcançar soluções viáveis de forma a atender o número máximo de clientes, segundo as condições impostas, para minimização dos custos de oferta dos serviços oferecidos pelos centros. Tais custos, neste caso, podem ser associados diretamente às distâncias físicas entre o centro de distribuição e os clientes. Cada centro de facilidade cobre um número de clientes distribuídos dentro de um raio de alcance, onde o somatório das distâncias entre o centro da facilidade e cada ponto (clientes) deve ser minimizado. Quanto à complexidade, estes tipos de problemas são classificados como NP-hard (Garey e Johnson, 1979), sendo muito utilizados métodos heurísticos e métodos de busca em árvore (Maranzana, 1964), heurística GRASP (Resende e Werneck, 2007), *simulated annealing* (Galvão e Chiyoshi, 2000), etc. Técnicas baseadas em relaxação lagrangeana e otimização de sub-gradientes (Beasley e Chiyoshi, 1993) são também utilizadas, algoritmos genéticos (Hosage e Goodchild, 1986), busca tabu (Rolland et al., 1996; Voss, 1996), heurística lagrangeana/*surrogate* (Lorena, 2001), dentre outras. Dessa forma, fica visível que métodos heurísticos podem ser aplicados para os problemas das p-medianas e localização de facilidades em função do seu bom desempenho, assim como a qualidade dos resultados.

2. O PROBLEMA DAS P-MEDIANAS

Este problema foi inicialmente apresentado por Hakimi (1964, 1965), com o objetivo de localizar p facilidades onde a distância entre os "p" centros e os "n" pontos de demanda seja minimizada. Como resultado, este problema deve apresentar um subconjunto de p pontos de facilidades para atender os n pontos de demanda. Pereira (2005) classificou também este problema como um problema de localização-alocação, buscando o custo mínimo de instalação das facilidades. Pois os dados do problema das p-medianas podem ser representados por um número finito de pontos de demanda, o número finito de candidatos à instalação dos centros de facilidades, a distância entre os pontos de demanda e o número p de facilidades a serem instaladas. Christofides (1975) formulou o modelo para a localização de p-medianas da seguinte forma;

$$Min \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_i d_{ij} x_{ij}$$

$$sujeito\ a \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1; \quad j \in N \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jj} = p \qquad (2)$$

$$x_{ij} \le x_{jj}; \quad i, j \in N \qquad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}; \quad i, j \in N \qquad (4)$$

Fonte: Pizzolato, 2004

onde:
N é o conjunto de vértices da rede, N = {1, ..., n};
D = [d_{ij}] nxn é a matriz simétrica de distâncias, com $d_{ii} = 0$, i $\in$ N ;
p é o número de medianas a serem localizadas;
q_i representa os clientes relacionados ao vértice *i*;
x_{ij} são as variáveis de decisão, com $x_{ij} = 1$ se o vértice *i* está alocado ao vértice *j*, e $x_{ij} = 0$, no caso contrário; e $xjj = 1$ se o vértice *j* é uma mediana e $xjj = 0$, no caso contrário, para $i, j \in N$

A função objetivo deve minimizar o somatório das distâncias entre o centro e cada vértice mais próximo; as restrições (1) e (3) impõem que cada vértice *i* seja alocado a um único vértice *j*, o qual deve ser uma mediana. A restrição (2) determina o exato número *p* de medianas a serem localizadas e (4) indica as condições de integralidade (Pizzolato, 2004).

3. O ALGORITMO

O algoritmo foi desenvolvido utilizando conceitos de otimização combinatória, onde são avaliadas as condições de cada combinação entre cada ponto candidato a centro de facilidade em função das medianas neles centradas e os demais pontos. Um banco de dados com estas coordenadas foi originalmente disponibilizado e os dados foram filtrados para as diversas instâncias, e formatados em uma planilha de dados, ordenados em duas colunas, contendo as coordenadas de latitude e longitude. O algoritmo recebe como entrada, um conjunto de *n* coordenadas geográficas dos pontos candidatos, o número *P* de facilidades desejadas e seu raio de cobertura *R*. Uma matriz distância é produzida entre estes pontos a partir de uma lista contendo as coordenadas geográficas dos n pontos de uma dada região. O algoritmo foi codificado no software Scilab, versão 6.0.1, que faz a leitura dos dados da planilha e os processa. A lógica do algoritmo pode ser descrita como um grafo, onde os pontos podem ser considerados os vértices, e as distâncias, as arestas. Para isso, considere inicialmente um grafo *G(V,E)* completo, onde $V = \{1,2,...n\}$ é o conjunto dos vértices que representam os pontos candidatos à instalação dos centros das *P* facilidades, sendo *P* um subconjunto de *V,* e *E* o conjunto das arestas representando todas as distâncias d_{ij} entre um vértice *i* e outro vértice *j*. Uma matriz D = [d_{ij}] é criada a partir das distâncias $d_{ij} \leq R$, pois cada centro de facilidade é limitado por um raio de cobertura *R*. Logo em seguida, são calculadas todas as distâncias entre os pares de pontos *i-j* preenchendo a matriz D = [d_{ij}] de dimensão *n* x *n*, eliminando os valores das distâncias maiores que *R,* ou seja, se $d_{ij} > R$, faz-se $d_{ij} = 0$. Uma matriz D é gerada com valores menores que *R,* onde cada linha possui todas as distâncias entre um ponto *i* e dos demais pontos *j*. A partir dessa matriz, os somatórios dos valores dos elementos de cada coluna são armazenados em um vetor coluna de dimensão *n*. Os elementos deste vetor representam os valores das p-medianas de cada ponto *i* para os demais pontos *j*. Uma busca é realizada neste vetor, onde o menor valor equivale ao custo total mínimo de cobertura (soma das distâncias). Nesse momento está definido o primeiro centro de facilidade, que é a primeira p-mediana encontrada. A matriz D é atualizada, eliminando-se os valores dos pontos já atendidos pelo primeiro centro de facilidade. Este procedimento é executado até que sejam determinados todos os *P* centros de facilidades desejados. Em termos de formulação, a matriz D contém em suas linhas todas as distâncias menores que o raio, sendo que o somatório de cada linha representa o somatório as distâncias de cada ponto *i* para os demais pontos *j*. Logo, o somatório de todas as linhas, depois de atendido o critério das menores somas das p medianas, representa o valor da função objetivo minimizada. A restrição (1) é atendida quando o algoritmo elimina os valores referentes aos pontos já cobertos pela primeira facilidade definida. Este procedimento é feito zerando os valores referentes aos índices dos pontos já definidos na matriz D.

Isto faz com um ponto pertença a uma, e somente uma facilidade, forçando a restrição (1). Como forma de isolar um centro recém-definido, para evitar redundância, penaliza-se o valor deste centro de facilidades no vetor soma das colunas da matriz D, para um valor muito maior que o raio R após cada escolha de uma facilidade, descartando assim, uma segunda escolha deste centro. A restrição (2) é definida no início do algoritmo onde um laço externo repete P vezes até que todas as P buscas na matriz D sejam realizadas e assim, determinadas as P facilidades. A seguir, o pseudocódigo do algoritmo é descrito.

Início Algoritmo
Ler raio R, nº de facilidades P
Ler dados das coordenadas x,y dos pontos candidatos
Definir a matriz D[nxn] das distâncias (d_{ij}) entre todos os n pontos
Definir o vetor S[n] dos somatórios (s_i) das colunas de D[nxn]
***Enquanto** não alcançar o número P de facilidades, faça;*
Buscar menor elemento do vetor S[n] dos somatórios distâncias
Eliminar linha e coluna de D do índice do centro i escolhido
Eliminar linhas e colunas de D de todos os pontos j cobertos
Penalizar vetor S [n] do índice i escolhido com valor muito alto
***Fim** enquanto*
Exibir relatório
Plotar gráfico
Fim Algortimo

Figura 1 – Pseudocódigo do algoritmo heurístico

Como solução, o algoritmo exibe um relatório contendo o conjunto das coordenadas das *P* facilidades na região, o conjunto dos índices dos centros de facilidades e outro dos índices dos clientes que recebem o serviço, além de um gráfico ilustrando a cobertura das facilidades com os demais pontos destacados por círculos de raio R.

4. TESTES

Para testar o algoritmo, foram utilizadas instâncias envolvendo localidades dos estados de Minas Gerais e Rio de Janeiro como pontos candidatos a facilidades ou clientes, através de uma lista de coordenadas geográficas de cidades destes estados. Variando o número de centros de facilidade e seus alcances, foram testadas as instâncias, uma vez que as facilidades podem ter valores de dimensões variados dependendo da aplicação. Por exemplo, postos de saúde podem ter distâncias urbanas, centros de distribuições de produção, dimensões estaduais ou regionais, os aeroportos alcances nacionais e assim conforme a abrangência do serviço. Em cada instância foram variados os valores do raio de alcance e o número de facilidades. Uma primeira instância contendo 10 pontos foi utilizada para ilustrar passo a passo a lógica dos passos do algoritmo, mostrando a matriz de distâncias D[nxn], alterando conforme a evolução das modificações de cada iteração até o final da geração dos resultados. O algoritmo foi desenvolvido no software Scilab, versão 6.0.1 para Windows 64 bits, e rodado em um PC com processador Intel Core i5, 3.10 Ghz e 4.0 Gb de memória Ram, Windows 7.0 Ultimate.

4.1 Instância 1

Nesta instância, 10 pontos foram selecionados para facilitar a interpretação do processo passo a passo do algoritmo. Através das tabelas das matrizes, vetores e gráficos, a dinâmica do algoritmo pode ser acompanhada nas figuras das matrizes iniciais das distâncias, assim como os vetores das somas das distâncias, índices dos centros escolhidos, e soluções finais. As Figuras 2, 3 e 4 mostram as matrizes das distâncias conforme as iterações do algoritmo. Na Figura 2, a matriz está completa, para valores abaixo do raio, pois ainda não foi definido o primeiro centro de facilidades. Abaixo da matriz, está o vetor da soma das distâncias, destacando o menor valor que o algoritmo, nesta iteração, identificou como primeiro centro escolhido. Na Figura 3, está a matriz das distâncias após a definição do primeiro centro. Observe que as colunas referentes ao índice da facilidade definida, assim como os índices dos elementos que são cobertos por ela, são todos zerados para que não participem da próxima iteração e interfiram na definição do próximo centro, restando somente os pontos candidatos ainda sem definição. O vetor das distâncias abaixo da matriz destaca o próximo menor valor a ser identificado. Os elementos já identificados como centros são penalizados com o valor muito grande, no caso 1.000.000, para que não interfira na próxima escolha. Por fim, na terceira matriz (Figura 4) encontram-se colunas zeradas de todos os pontos já definidos como cliente ou centro, e o vetor das somas das distâncias, destacado com o menor valor referente aos terceiro centro, e as demais penalizações.

0.	27.597628	0.	0.	0.	0.	11.959403	23.362205	0.	27.855889
27.597628	0.	0.	0.	0.	0.	16.238378	0.	0.	0.
0.	0.	0.	11.590497	25.046407	5.1866174	0.	16.119808	0.	0.
0.	0.	11.590497	0.	17.745	15.493461	0.	7.8757	26.260288	0.
0.	0.	25.046407	17.745	0.	25.689619	0.	23.896902	18.017217	0.
0.	0.	5.1866174	15.493461	25.689619	0.	0.	21.024398	0.	0.
11.959403	16.238378	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	27.3
23.362205	0.	16.119808	7.8757	23.896902	21.024398	0.	0.	27.526226	0.
0.	0.	0.	26.260288	18.017217	0.	0.	27.526226	0.	18.582627
27.855889	0.	0.	0.	0.	0.	27.3	0.	18.582627	0.
90.775124	$\boxed{43.836006}$	57.94333	78.964946	110.39514	67.394095	55.497781	119.80524	90.386358	73.738515

Figura 2 – Matriz D[nxn] inicial e o vetor S[n] das somas das distâncias na primeira iteração.

0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	11.590497	25.046407	5.1866174	0.	16.119808	0.	0.
0.	0.	11.590497	0.	17.745	15.493461	0.	7.8757	26.260288	0.
0.	0.	25.046407	17.745	0.	25.689619	0.	23.896902	18.017217	0.
0.	0.	5.1866174	15.493461	25.689619	0.	0.	21.024398	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	16.119808	7.8757	23.896902	21.024398	0.	0.	27.526226	0.
0.	0.	0.	26.260288	18.017217	0.	0.	27.526226	0.	18.582627
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	18.582627	0.
1000000.	1000000.	57.94333	78.964946	110.39514	67.394095	1000000.	96.443035	90.386358	$\boxed{18.582627}$

Figura 3 – Matriz D[nxn] e o vetor S[n] das somas das distâncias na segunda iteração.

0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	11.590497	25.046407	5.1866174	0.	16.119808	0.	0.
0.	0.	11.590497	0.	17.745	15.493461	0.	7.8757	0.	0.
0.	0.	25.046407	17.745	0.	25.689619	0.	23.896902	0.	0.
0.	0.	5.1866174	15.493461	25.689619	0.	0.	21.024398	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	16.119808	7.8757	23.896902	21.024398	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
1000000.	1000000.	57.94333	$\boxed{52.704658}$	92.377927	67.394095	1000000.	68.916809	1000000.	1000000.

Figura 4 – Matriz D[nxn] final e o vetor S[n] das somas das distâncias na terceira iteração.

A Figura 5(a) mostra a região contendo 10 pontos candidatos à instalação de centros de facilidades e em (b) a localização de três centros de facilidades com 30 Km de raio, referentes aos valores mostrados nas Figuras 2, 3 e 4. Após as três iterações do algoritmo, o resultando foi plotado no gráfico da Figura 5(b)

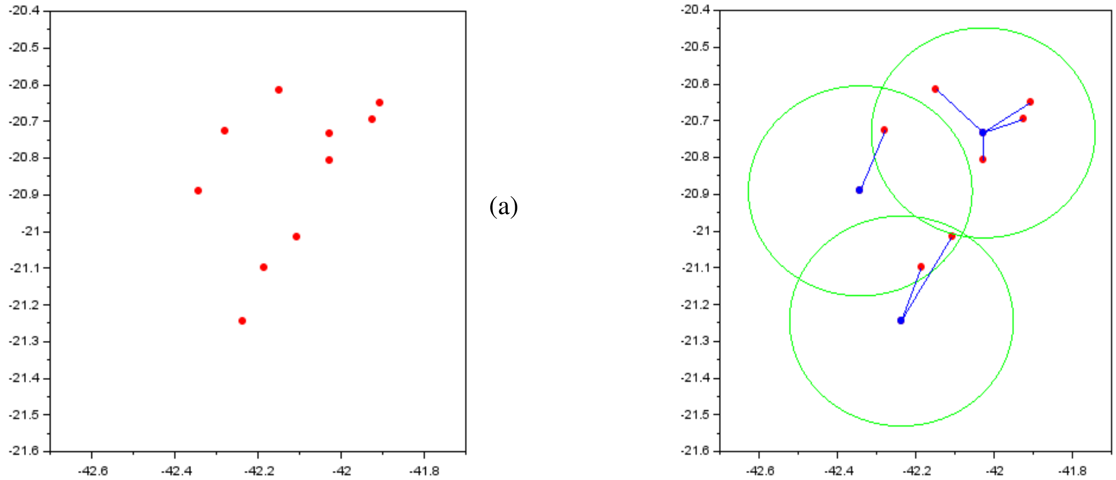

Figura 5 – (a) Gráfico da região dos pontos candidatos, e (b) três centros de facilidades definidos pelo algoritmo

Para uma análise visual e numérica das soluções, no final do processamento, o algoritmo exibe duas janelas, uma gráfica e outra numérica. A Figura 6 mostra à esquerda a janela gráfica com os centros identificados com suas coordenadas. Os círculos demarcam os limites de alcance, os pontos pertencentes a cada centro estão conectados por segmentos, representando as distâncias euclidianas até cada centro. À direita, um relatório com os valores numéricos de entrada e os resultados.

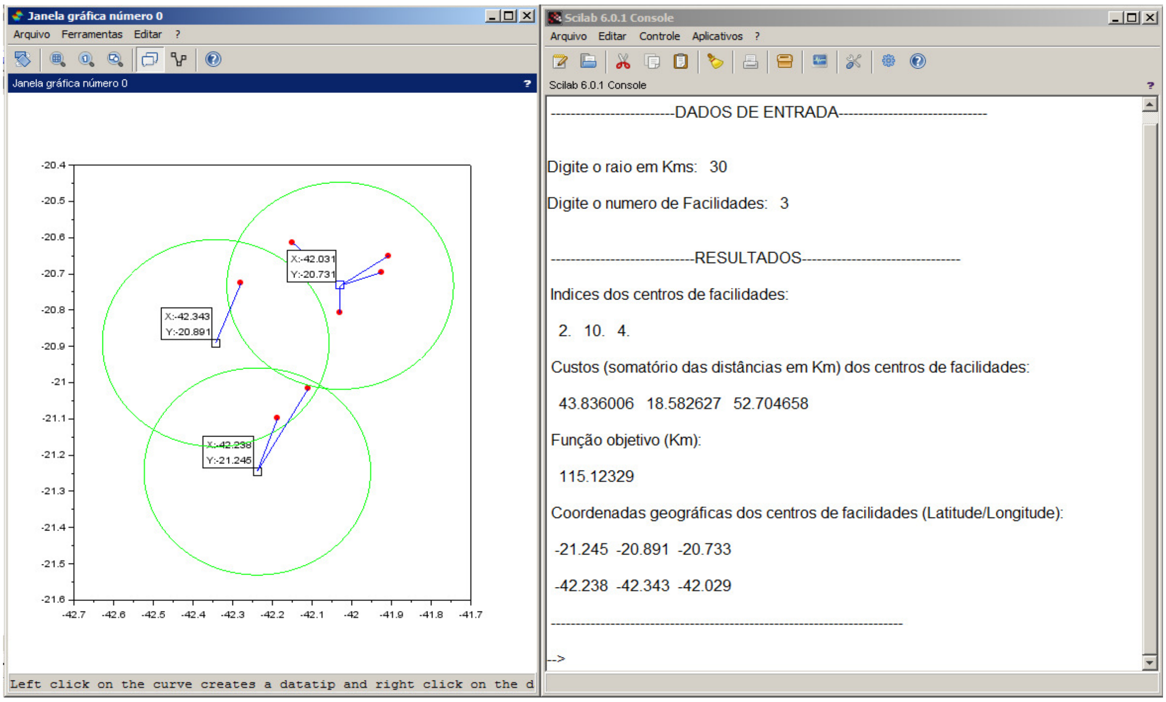

Figura 6 – Interface gráfica e numérica da saída dos dados do algoritmo

4.2 Instância 2

Para esta instância foram selecionados 122 coordenadas geográficas de cidades do estado do Rio de Janeiro. Os raios foram variados assim como o número de facilidades.

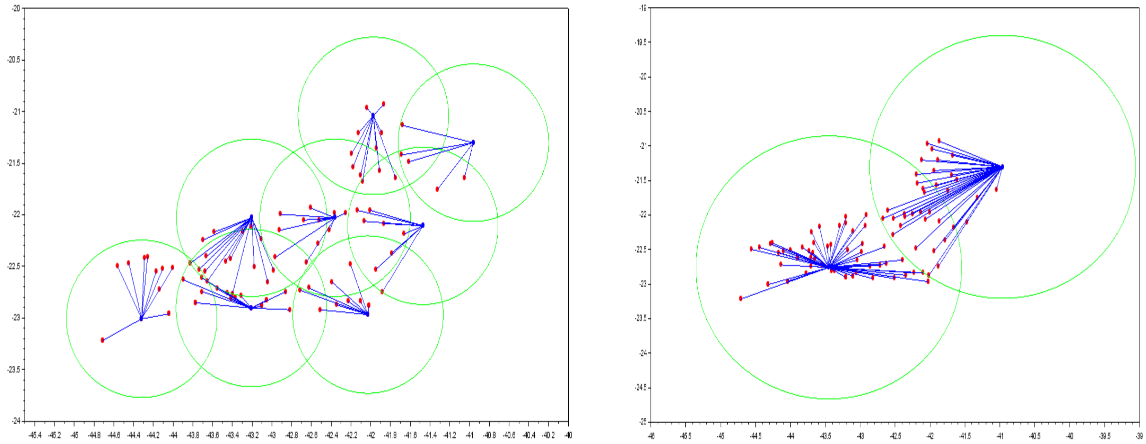

Figura 7 – Gráficos dos exemplos 1 e 2 da Instância 2 – Estado do Rio de janeiro

No primeiro exemplo, o raio foi fixado em 80 Km, com oito centros, cobrindo neste caso todo o estado. Devido ao fato do algoritmo eliminar na matriz distância os pontos definidos a cada iteração, não há redundância, ou seja, um ponto pertence somente a um centro, mesmo que seja localizado próximo a outro centro, conforme pode se observar nos gráficos. Analisando os resultados do segundo caso com dois centros de 200 Km cada, o algoritmo definiu o primeiro centro nas coordenadas -21.302, -40,961, que representa geograficamente ao município de São Francisco do Itabapoana, situado no extremo norte do estado. Neste centro, a soma das medianas totalizou o valor de aproximadamente 5.121 Km lineares, que foi o menor somatório entre todas as combinações na primeira iteração, para um limite de no máximo 200 Km para cada distância entre o centro escolhido e os demais pontos. Na segunda iteração, equivalente ao segundo centro, a lista de pontos total dos candidatos foi reduzido do subconjunto das cidades pertencentes ao primeiro centro. Dessa forma, o algoritmo definiu o segundo centro nas coordenadas -22,759, -43,451, que representa graficamente o município de Nova Iguaçu, região metropolitana da capital do estado. Para esta iteração, o valor total das distâncias foi de 5.441 Km lineares, resultando no segundo menor valor de soma das medianas. A função objetivo nesta instância foi de 10.563 Km lineares, cobrindo assim, 100% do estado. Este exemplo ilustrou uma situação onde se pretendia com apenas dois centros de facilidades ou serviços, alcançarem de forma linear os 122 municípios do estado, respeitando o critério do problema das p-medianas. Um fato que deve ser observado, é que diferentemente do problema da cobertura, os centros se localizam inicialmente em regiões mais fronteiriças, pois de acordo com o critério do menor somatório, estes locais possuem valores totais menores. Sendo assim, é comum como visualizado nos gráficos, a tendência aos extremos dos mapas nas primeiras iterações, sendo deslocado às regiões centrais nas últimas iterações. Este comportamento primeiramente define centros de custos minimizados, porém gradativamente tende a aumentar os valores até o último centro. Há casos onde ocorrem valores de medianas menores que o primeiro, pois como a matriz das distâncias é dinâmica, seus valores são alterados conforme cada iteração. Porém, o algoritmo permite introduzir valores variados de raios e número de centros, em diversas configurações, que por fim resulta em soluções viáveis e reais na determinação destes centros, conforme a natureza do serviço oferecido.

4.3 Instância 3

Esta instância foi referente ao estado de Minas Gerais, por sua dimensão geográfica mais extensa, como meio de avaliar o algoritmo com alcances maiores, e mais centros de facilidades.

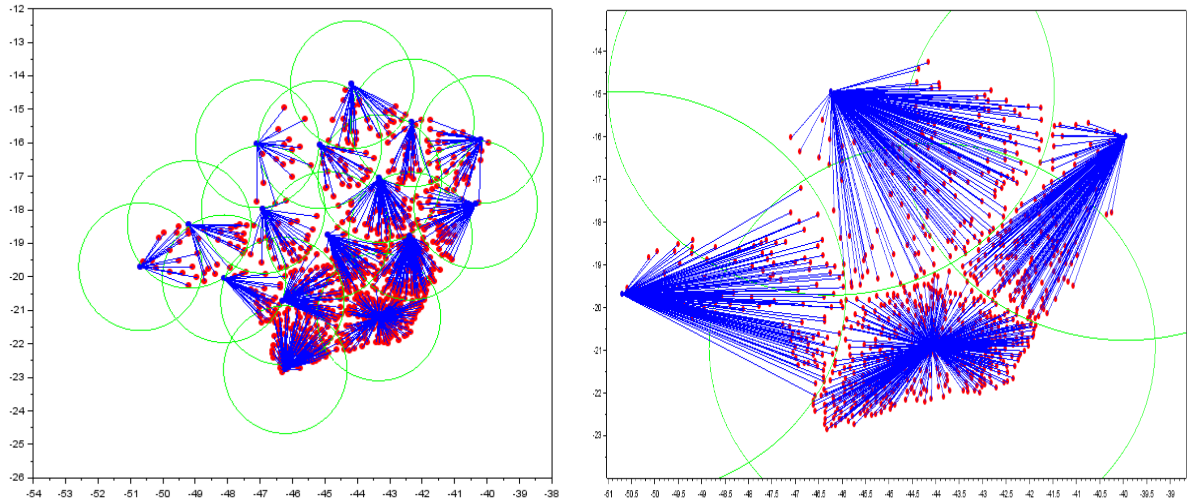

Figura 8 – Gráficos dos exemplos 1 e 2 da Instância 3 – Estado de Minas Gerais

Para isso, nessa instância, foram executados dois exemplos envolvendo 854 pontos, explorando um pouco mais a capacidade do algoritmo. Conforme descrito na instância anterior, os centros inicialmente tendem a se localizarem nos extremos dos mapas, ou seja, nas fronteiras. O gráfico à esquerda do exemplo da Figura 8 ilustra a ocupação dos centros cobrindo todo o estado. Para isso foram definidos 16 centros de 200 Km. Os últimos centros definidos buscaram a região mais central do estado, sendo os primeiros, nos extremos. No segundo exemplo, gráfico à direita, este comportamento é mais visível, onde apenas 4 centros foram definidos com seus alcances de 500 Km. Após a execução desta instância pelo algoritmo, as informações resultantes estão listadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Resultados do segundo exemplo da Instância 3 e função objetivo de 213.068 Km.

Centro nº	Latitude	Longitude	Município	Somatório (Km)
1	-19.698	-50.688	Carneirinho	39.017,41
2	-14.947	-46.232	Formoso	57.890,61
3	-16.003	-39.947	Salto da Divisa	56.711,22
4	-20.914	-44.078	Lagoa Dourada	59.448,86

5. CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou uma alternativa para solução do problema das p-medianas aplicado na instalação de centros de facilidades, através de uma nova abordagem de um algoritmo estocástico. Apesar de uma lógica de fácil entendimento, este algoritmo demonstrou eficiência na solução de problemas difíceis, sendo assim um diferencial na solução de problemas clássicos, destacando sua simplicidade estrutural.

Com a introdução de um raio de alcance, foi possível limitar os centros de facilidades conforme sua necessidade e natureza. A partir desta idéia, este algoritmo também pode ser aplicado em diversas situações clássicas, como o problema das p-medianas, dentre outros problemas reais. Uma característica importante demonstrava das Instâncias 2 e 3, foi a particularidade de localização dos primeiros centros de facilidades em regiões de fronteira. Este comportamento se deve ao fato das primeiras iterações avaliarem os mínimos somatórios de todas as combinações, entre todos os pontos dentro de um raio de alcance, onde a matriz inicial é menos esparsa. Ao longo das iterações os centros restantes tendem aos valores maiores direcionando para o interior da região em estudo. Dentro das aplicações típicas, se destaca a determinação de centrais de serviços de banda larga ou TV a cabo, onde as distâncias dos clientes aos servidores devem ser minimizadas, pois o custo está diretamente relacionado com a distância física dos cabos de dados. Outras aplicações de destacam na logística de distribuição, na determinação de centros de distribuição, no transporte aéreo, marítimo, etc. Além das propriedades demonstradas, este algoritmo consumiu um tempo de computação muito reduzido, mesmo nas instâncias maiores. Por fim, fica demonstrado através deste trabalho, o funcionamento e aplicação deste algoritmo que devidamente adaptado, pode ser utilizado em outras áreas de interesse, se disponibilizando como sugestões para futuros trabalhos.

REFERÊNCIAS

Arakaki, R. G. I. (2003) *Heurística de localização-alocação para problemas de localização de facilidades*. Tese (Doutorado em Computação Aplicada) São José dos Campos: INPE.

Beasley, J. E; Chiyoshi , F. Lagrangean heuristic for location problems. European Journal of Operations Research, v.65, p.383-399, 1993

Christofides, N. Graph Theory – An Algorithmic Approach. New York: Academic Press, 1975.

Galvão, R. D.; Chiyosh, F. A statistical analysis of simulated annealing applied to the p-median problem. Operations Research, v.96 p.61-74, 2000.

Garey, M.R. & Johnson, D.S.: Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness. W.H. Freeman and Co., San Francisco, CA, 1979.

Goldbarg, M. C., Luna, H. P. L. (2000), *Otimização Combinatória e Programação Linear, Modelos e Algoritmos*, Rio de Janeiro, Campus.

Hakimi, S.L.: Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. Operations Research, vol. 12, No. 3, junho de 1964

Hakimi, S.L.: Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems. Operations Research, 13, p. 462-475, 1965.

Hosage, C.M. and Goodchild, M.F. (1986). Discrete Space Location-Allocation Solutions for Genetic Algorithms, Annals of Operations Research, 6: 35-46

Lorena, L. A. N.; Senne, E. L. F.; Paiva, J. A. C.; Marcondes, S. P. B. Integração de modelos de localização a sistemas de informações geográficas. In: Revista do Departamento de Engenharia de Produção. São Paulo: Universidade Federal de São Carlos, v.8, n.2, agosto de 2001.

Maranzana, F. E. On the location of supply points to minimize transport costs. Operations Research Quarterly, v.15, p.261-267, 1964.

Pereira, M. A. Um método Branch-and-Price para problemas de localização de p-medianas. Tese de Doutorado. INPE, São José dos Campos, 2005.

Resende, M.G.C.; Werneck, R.F. A fast swap-based local search procedure for location problems Annals of Operations Research, vol. 150, pp. 205-230, 2007

Rolland, E.; Schilling, D.A.; Current, J.R. An efficient tabu search procedure for the pmedian problem. *European Journal of Operational Research*, v.96, n.2, p.329-342, 1996.

Pizzolato, B, Barcelos & Canen – Localização de escolas públicas: síntese de algumas linhas de experiências no Brasil. Pesquisa Operacional, v.24, n.1, p.111-131, Janeiro a Abril de 2004.

Voss, S. A reverse elimination approach for the p-median problem. *Studies in Locational Analysis*, v.8, p.49-58, 1996.

STOCHASTIC ALGORITHM APPLIED IN THE SOLUTION OF THE P-MEDIAN PROBLEM FOR LOCATION OF FACILITIES CENTER

Abstract. *The main objective of this article is to present a stochastic algorithm for solving the problem of p-medians for location of facilities center in a flat region. This algorithm has stochastic property, which allows the selection of the facility centers in a simplified way, thus characterizing a heuristic method, which, despite its simplicity, guarantees good results in the determination of the centers. From a set of n points of geographic coordinates, an n × n matrix containing all the distances between one point i and the other points j is generated. By minimizing the sum of the distances of each candidate point in relation to the others, a subset of the points that will represent the coordinates of the centers of facilities is determined. The main criterion in the choice of centers is the smallest sum of the distances between a center and the other points that will receive the facility, following the logic of the problem of the median p. The differential of this algorithm is in the inclusion of an R radius limiting the reach of each facility center in a region of interest.*

Keywords: *Heuristics, combinatorial optimization, Facility centers, P-medians.*