

# Interpretação geométrica da lei dos cossenos MC1

## Geometric interpretation of the law of cosines

Heloiza Rangel da Silva\*  
Josie Pacheco de Vasconcellos Souza\*\*  
Luis Gustavo Marques Soares\*\*\*  
Rosana Ramos de Barcelos\*\*\*\*  
Tatiele do Nascimento Pereira Pessanha\*\*\*\*\*  
Gilmara Teixeira Barcelos\*\*\*\*\*

Atividades de investigação associadas às Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) podem ser bons recursos pedagógicos para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Neste minicurso será abordada a demonstração geométrica da lei dos cossenos, por meio de atividades que utilizarão animações disponíveis em sites. As atividades estão estruturadas em três seções: triângulo retângulo, triângulo acutângulo e triângulo obtusângulo. Será feita, também, uma abordagem interdisciplinar do tema, expondo a aplicação da lei dos cossenos na Física. Além disso, finalizado o minicurso, serão propostos problemas de aplicação do tema abordado.

Palavras-chave: Tecnologia. Lei dos cossenos. Demonstração geométrica.

*Activities of research related to Information and Communication Technologies (ICT) can be good pedagogical resources for the process of teaching and learning Mathematics. In this mini-course, will be addressed the geometric demonstration of the law of cosines, through activities involving the use of animation available in sites. The activities are structured in three sections: right-angle triangle, acute-angle triangle and obtuse-angle triangle. An interdisciplinary approach*

\* Licencianda em Matemática do CEFET Campos.

\*\* Licencianda em Matemática do CEFET Campos.

\*\*\* Licenciando em Matemática do CEFET Campos.

\*\*\*\* Licencianda em Matemática do CEFET Campos.

\*\*\*\*\* Licencianda em Matemática do CEFET Campos.

\*\*\*\*\* Mestre em Ciências de Engenharia (UENF), professora do CEFET Campos.

*about the topic, exposing the law of cosines application in Physics will also be done. Moreover, to bring the mini course to an end, problems regarding the application of the topic addressed will be proposed.*

*Key words: Technology. Law of cosines. Geometric demonstration.*

## **1 Introdução**

São muitos os recursos disponíveis, que podem contribuir para a aprendizagem de Matemática. As tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) são um desses recursos. Segundo Moran (s.d.), as TIC permitem realizar atividades que contribuem para a aprendizagem de forma diferente das usadas no ensino tradicional, tornando as aulas mais dinâmicas. Porém, as mudanças na educação vão além do uso consciente e crítico das TIC. É importante que os educadores, gestores e alunos estejam preparados emocionalmente e eticamente; que as pessoas sejam curiosas, interessantes, entusiasmadas, abertas e confiáveis e que saibam motivar e dialogar (MORAN, 2007).

Apesar do auxílio que as tecnologias podem oferecer, devemos ter em mente que educar é aprender a organizar um conjunto de informações de modo a torná-las significativas para cada indivíduo, transformando-as, assim, em conhecimento (MORAN, 2001).

Neste contexto o objetivo deste minicurso é demonstrar, geometricamente, a lei dos cossenos com o auxílio de recursos tecnológicos, como *sites* contendo animações. A visualização e movimentação das figuras, possibilitadas pelos recursos dos *sites*, favorecem a compreensão do tema.

O minicurso será iniciado com atividades que possibilitarão a dedução da lei dos cossenos, por meio da manipulação de figuras

em *sites*. Na etapa seguinte, será demonstrada a lei com auxílio de outro *site* contendo animações e de outros recursos. Finalizando, será feita uma abordagem interdisciplinar do tema, mostrando a aplicação da lei dos cossenos na Física e serão propostos problemas contextualizados cuja resolução envolve o tema em estudo, contemplando, assim, as orientações dos PCNs que ressaltam a importância da aplicação dos conhecimentos matemáticos em situações reais (BRASIL, 1999). Na próxima seção descreve-se, detalhadamente, cada uma dessas etapas.

## **2 Desenvolvimento metodológico do minicurso**

Este minicurso está estruturado em 4 etapas, a saber:

- Dedução da lei dos cossenos;
- Demonstração Geométrica da lei dos cossenos;
- Aplicação na Física;
- Resolução de problemas.

### **2.1. Dedução da lei dos cossenos**

Nesta etapa, os participantes resolverão atividades que possibilitarão estabelecer a relação entre a medida dos lados dos triângulos e sua classificação quanto à medida dos ângulos e deduzir a lei dos cossenos. Para tanto os seguintes *sites* serão utilizados:

- <http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pythafv/pythafv.html>
- <http://euler.mat.ufrgs.br/~edumatec/atividades/ativ18/CabriJava/todas.htm>
- [http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen\\_auto/yogen\\_auto.html](http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen_auto/yogen_auto.html)
- <http://euler.mat.ufrgs.br/~edumatec/atividades/ativ18/CabriJava/todas.htm>
- [http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen\\_auto/yogen\\_auto.html](http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen_auto/yogen_auto.html)

Os participantes receberão uma ficha contendo todas as atividades que serão resolvidas manipulando as construções que estão nos *sites*.

O objetivo dessas atividades é comparar as áreas dos quadrados formados sobre os lados do triângulo, obtendo assim, algumas relações. As atividades estão estruturadas em três seções: triângulo retângulo, triângulo acutângulo e triângulo obtusângulo. A partir do conceito de área de figuras planas e de alguns conceitos de trigonometria será deduzida a lei dos cossenos.

A primeira atividade será com o triângulo retângulo e nesta, será deduzido o Teorema de Pitágoras. Utilizaremos o *site* <http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pythafv/pythafv.html>. Nele aparece a imagem mostrada na Figura 1. Após algumas movimentações (solicitadas na ficha de atividades) aparecerá a Figura 2.

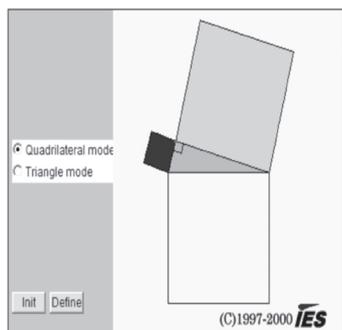


Figura 1: Teorema de Pitágoras

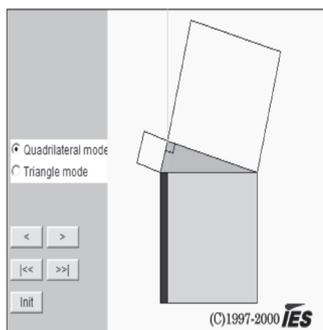


Figura 2: Teorema de Pitágoras

Esta atividade visa deduzir que a **área do quadrado formado sobre hipotenusa (a)** é igual à soma das áreas dos quadrados formados sobre os catetos (b e c), ou seja:  $a^2 = b^2 + c^2$ .

A segunda dedução será no triângulo acutângulo, atividade 2 e nela serão utilizados dois *sites*. O primeiro será <http://euler.mat.ufrgs.br/~edumatec/atividades/ativ18/CabriJava/todas.htm>, no qual aparece a Figura 3. Após serem feitas algumas movimentações, propostas nas atividades, será gerada a Figura 4.

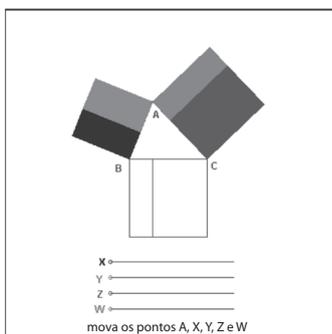


Figura 3: Triângulo acutângulo

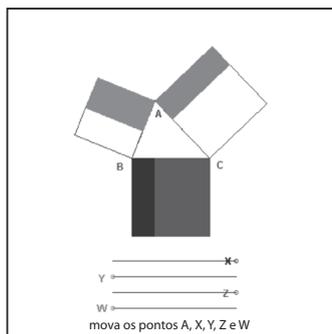


Figura 4: Triângulo acutângulo

Por meio desta atividade, será conjecturado que a área do quadrado que está sobre o lado BC é menor que a soma das áreas dos quadrados que estão sobre os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , ou seja  $a^2 < b^2 + c^2$ . Será ressaltado que esta relação pode ser escrita da seguinte forma:  $a^2 = b^2 + c^2 - (A \text{ fig}_1 + A \text{ fig}_2)$ , no qual  $A \text{ fig}_1$  e  $A \text{ fig}_2$  são respectivamente as áreas que “sobraram” nos quadrados sobre os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ .

Ainda na atividade 2 será utilizada o segundo site: [http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen\\_auto/yogen\\_auto.html](http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen_auto/yogen_auto.html). Neste, inicialmente, aparecerá a Figura 5. Após algumas movimentações que serão solicitadas nas atividades a Figura 6 será visualizada.

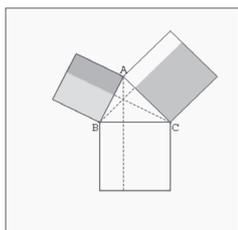


Figura 5: Dedução parte 1

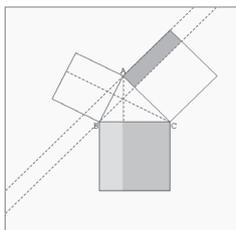


Figura 6: Dedução parte 2

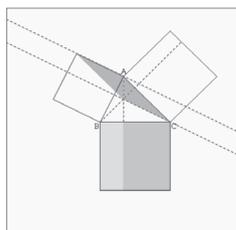


Figura 7: Dedução parte 3

Esta segunda parte da atividade 2 visa conjecturar que as áreas que restaram nos quadrados formados ( $A \text{ fig}_1$  e  $A \text{ fig}_2$ ) são

congruentes e que isso pode ser afirmado para qualquer triângulo acutângulo. Como  $A_{fig_1} = A_{fig_2}$ , então, a igualdade  $a^2 = b^2 + c^2 - (A_{fig_1} + A_{fig_2})$  pode ser escrita da seguinte forma:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2A_{fig}$ .

Dando seqüência, será apresentada uma reprodução da Figura 7, em cartolina, para facilitar a demonstração da lei dos cossenos a partir das atividades já realizadas. Inicialmente será calculada a área do paralelogramo azul mostrado na Figura 7 ( $A_{fig1} = A_{fig2} = c.b.\cos \hat{A}$ ) e finalizando será demonstrado que  $a^2 = b^2 + c^2 - 2 c.b.\cos \hat{A}$ , é a lei dos cossenos deduzida a partir de um triângulo acutângulo.

Também serão resolvidas as atividades de dedução da lei dos cossenos para o triângulo obtusângulo, o que será feito de maneira análoga ao que foi descrito anteriormente para o triângulo acutângulo. Para essa atividade, serão utilizados os seguintes sites: <http://euler.mat.ufrgs.br/~edumatec/atividades/ativ18/CabriJava/todas.htm> e [http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen\\_auto/yogen\\_auto.html](http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen_auto/yogen_auto.html).

## 2.2 Demonstração geométrica da lei dos cossenos

Após a resolução das atividades descritas na seção anterior, será feita outra demonstração geométrica da lei dos cossenos utilizando o site: [http://www.atractor.pt/mat/sem\\_palavras/lei\\_cossenos.html](http://www.atractor.pt/mat/sem_palavras/lei_cossenos.html). Ao abrir o site aparecerá a Figura 8 e, a partir de manipulações, aparecerá a Figura 9. Além dos recursos tecnológicos do site, serão apresentadas as Figuras 8, 9 e 10 em material emborrachado, visando facilitar, ainda mais, a compreensão da demonstração. Expressando a área de um heptágono de duas maneiras diferentes será demonstrado que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2. a.b.\cos \theta$$

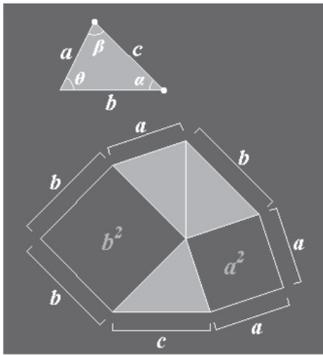


Figura 8: Demonstração parte 1

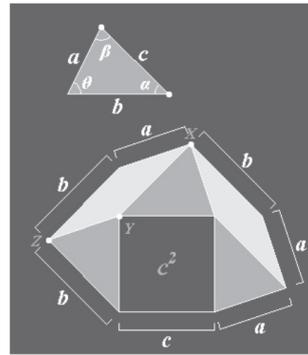


Figura 9: Demonstração parte 2

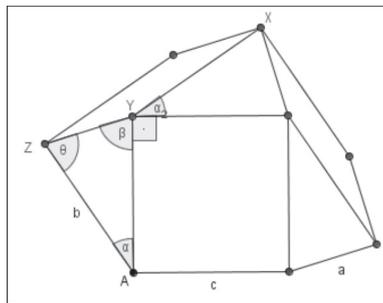


Figura 10: Demonstração parte 3

No site: [http://www.atractor.pt/mat/sem\\_palavras/lei\\_cossenos1.html](http://www.atractor.pt/mat/sem_palavras/lei_cossenos1.html), encontra-se disponível demonstração similar para triângulo obtusângulo.

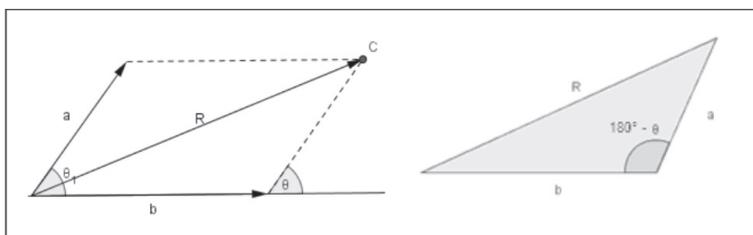
### 2.3 Aplicação na Física

Nesta etapa será exposto que a fórmula utilizada na Física para determinar o vetor resultante é a **lei dos cossenos**. Segundo Dante (2004), alguns alunos notam que os professores de Física, quando estudam forças, ensinam a “lei dos cossenos com o sinal de +”, enquanto os professores de Matemática ensinam essa lei com o “sinal de -”. Considerando a Figura 11 pode-se afirmar que na:

Física:  $R^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \theta$

Matemática:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos (180^\circ - \theta)$

A bem da verdade, poucos professores de Física citam a lei dos cossenos, preferindo apresentar tal fórmula como “cálculo do módulo do vetor resultante” ou apenas “vetor resultante” (DANTE, 2004).



$$R^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \theta$$

## 2.4 Atividades de aplicação

Na última etapa do minicurso serão propostos alguns problemas para serem resolvidos aplicando a lei dos cossenos, incluindo questões de vestibulares e questões de aplicação da lei dos cossenos na Física.

## 3 Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília, DF: MEC/SEF, 1999.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: livro do professor, contexto e aplicação*. Volume único. 2. ed. São Paulo: Ática, 2005.

PORTO, Tânia Maria. *Saberes e Linguagens de educação e comunicação*. Pelotas, RS: Editora da UFPel, 2001. Disponível em: <http://www.eca.usp.br/prof/moran/novos.htm>. Acesso em: 11 jul. 2008.

MORAN, José Manuel. A TV digital e a integração das tecnologias na educação. Boletim 23 sobre Mídias Digitais do Programa Salto para o Futuro. TV Escola - SEED, 2007. Disponível em: <http://www.eca.usp.br/prof/moran/digital.htm>. Acesso em: 11 jul. 2008.

MORAN, José Manuel. Educação e Tecnologias: Mudar para valer!. Disponível em: <http://www.eca.usp.br/prof/moran/educatec.htm>. Acesso em: 11 jul. 2008.