MC2 A indução Matemática como método de demonstração

Math induction as demonstration method

Vera Lucia Fazoli da Cunha Freitas Viana*

O princípio da indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Este pode ser visto como instrumento de aprendizagem da teoria dos números em um curso de formação de professores. A indução constitui um importante instrumento que pode ser usado como método de demonstração de conjecturas Matemáticas. Este minicurso discute a indução Matemática como método de demonstração e apresenta atividades que se constituem em uma sugestão de metodologia para o entendimento da Indução Matemática e sua aplicação. Primeiramente é apresentada uma abordagem teórica da indução Matemática como método de demonstração, a seguir é feito o desenvolvimento de atividades com a finalidade de promover o ensino e a aprendizagem da prova por indução e, finalmente, análises e considerações, baseadas nas observações durante a realização das mesmas.

Palavras-chave: Indução Matemática. Método. Demonstração.

The induction principle is an efficient instrument for demonstrating the natural number facts. This may be seen as a learning instrument of the theory of numbers in a teacher's formation course. Induction is an important instrument that can be used as demonstration method of Math hypothesis. This course discusses Math induction as demonstration method and presents activities that suggest a

* Mestre em Educação Matemática. Professora do CEFET Campos, UNIFLU/FAFIC, e UCAM Campos.

methodology for understanding Math Induction and its application. First, Math induction is presented as demonstration method, then, activities are developed to promote the teaching and learning of the proof for induction and, to conclude, the analyses and considerations based on the observations made during accomplishment of these ones.

Key words: math induction, method, demonstration.

Usualmente a demonstração é considerada como um procedimento de validação que caracteriza a Matemática e a distingue das ciências experimentais, além de ocupar um lugar de destaque nessa disciplina. Mas a palavra demonstração é usada com vários sentidos e em diferentes contextos. Percebe-se, em todos esses sentidos, a idéia comum que é a de justificar ou validar uma afirmação fornecendo razões ou argumentos. O tipo de situações em que se aplica, os aspectos característicos e os meios usados podem ser diferentes e, por isso, os autores distinguem diversos contextos nos quais varia o significado de demonstração, seja na lógica, nos fundamentos da Matemática, nas ciências, no cotidiano e na sala de aula de Matemática. No entanto, o aluno, na maioria das vezes, é um passivo assimilador das explanações do professor e acaba por apenas decorar as demonstrações. Também no ensino superior este fato permanece, conforme relatam Lellis e Imenes:

> Trata-se de enforcar a Matemática como um conjunto de técnicas (ou algoritmos ou procedimentos) com o qual se obtêm certos resultados. Isso se reflete na grande quantidade de exercícios que se resumem a "calcular", "obter", "efetuar". Quase tudo consiste em aplicar as fórmulas adequadas em contextos exclusivamente matemáticos. Demonstrações quase

> nunca surgem, mesmo quando se trata de uma simples dedução de fórmula. O que importa é o "como fazer", sem preocupação com o "por que fazer assim" e menos ainda com o "para quê fazer". [...] Por tudo isso a Matemática perde seu potencial formativo, não exibe suas aplicações nos vários campos do conhecimento, nem permite que o educando a *veja como uma ciência organizada* (LELLIS; IMENES, 2004).

A aprendizagem da demonstração consiste, primeiramente, na conscientização de que se trata de um discurso totalmente diferente do que é praticado pelo pensamento natural. Admite-se que a prova Matemática está relacionada a um processo de validação de um fato matemático e que o registro dessa demonstração deve estar apoiado em fatos matemáticos comprovados e que a estruturação desses fatos deve comprovar, de forma irrefutável, algum tipo de proposição Matemática. O encadeamento lógico dos argumentos matemáticos deve convencer o leitor da veracidade da proposição Matemática em questão, ficando, a mesma, demonstrada.

Este minicurso discute a indução Matemática como método de demonstração e apresenta atividades que se constituem em uma sugestão de metodologia para o entendimento da indução Matemática e sua aplicação, visto que a demonstração em Matemática é uma das competências que se exige de todos que lidam com a Matemática, sejam alunos ou professores. O principal propósito é o de oferecer aos participantes um instrumento de trabalho que lhes proporcione, além das tradicionais competências de cálculo exigidas para serem considerados matematicamente competentes, outras que atendam às exigências da sociedade atual e os tornem matematicamente letrados.

Como a aprendizagem é um processo de construção de significados por parte dos alunos, primeiramente é apresentada uma abordagem teórica da Indução Matemática como Método de Demonstração. A seguir, é feito o desenvolvimento de atividades com a finalidade de promover o ensino e a aprendizagem da prova por indução e, finalmente, análises e considerações, baseadas nas observações durante a realização das mesmas.

Os objetivos desse minicurso são: fundamentar teoricamente e promover o ensino e a aprendizagem da indução Matemática, como método de demonstração; enfatizar a importância de cada uma das propriedades que constituem a prova por indução Matemática; tornar os participantes aptos a aplicar a prova por indução Matemática. Espera-se que os participantes desse minicurso, tenham a oportunidade de rever e ampliar suas concepções relativas a provas e demonstrações em Matemática e que, conseqüentemente, essas discussões se reflitam nas suas práticas pedagógicas indo, portanto, ao encontro de seus anseios. Espera-se que adquiram uma certa autonomia no que diz respeito à discussão, argumentação, redação, levantamento de hipóteses e demonstração, colaborando com a necessidade de criar condições que promovam mudanças nas concepções e nos saberes dos professores a respeito de prova e demonstração, a fim de prepará-los para proporcionar aos seus alunos condições que lhes permitem raciocinar, argumentar, provar e demonstrar.

A indução Matemática

O pensamento indutivo começou a ser estudado por Aristóteles, apesar de ter sido Francis Bacon (século XVII) quem o popularizou. Mas foi Giussepe Peano (1858-1932) que constatou que é possível elaborar toda a teoria dos números naturais a partir de quatro fatos básicos, conhecidos atualmente como os axiomas de Peano. Um dos axiomas de Peano, o último, conhecido como o axioma da indução, possui uma natureza mais elaborada do que os outros. O papel fundamental do axioma da indução na teoria dos números naturais resulta do fato de que ele pode ser visto como um método de demonstração, chamado o Método de Indução Matemática, ou Princípio da Indução Finita, ou Princípio da Indução.

O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Este pode ser visto como instrumento de aprendizagem da teoria dos números em um curso de formação de professores. A Indução constitui um importante instrumento que pode ser usado como método de demonstração de conjecturas Matemáticas.

Indução é a passagem do particular ao geral. A generalização de uma propriedade após a verificação de sua validade em alguns casos particulares conduziu a vários enganos na Matemática. Por exemplo: no trinômio $x^2 + x + 41$, estudado por Euler, quando substituímos x por um número inteiro não negativo qualquer, sempre obteremos um número primo. Observe que isto é falso, pois:

$n = 0,\ 0^2 + 0 + 41 = 41$ é primo

$n = 1,\ 1^2 + 1 + 41 = 43$ é primo

$n = 2,\ 2^2 + 2 + 41 = 47$ é primo

$n = 3,\ 3^2 + 3 + 41 = 53$ é primo.

No entanto, se $n = 40$, temos:

$40^2 + 40 + 41 =$

$= 40(40 + 1) + 41 =$

$= 40.41 + 41 =$

$= 41(40 + 1) =$

$= 41.41 = 41^2$ não é primo.

Portanto, é preciso que tenhamos cuidado para não tirarmos conclusões falsas.

O método com base lógica que permite decidir sobre a validade de uma indução é a indução finita (ou indução Matemática).

Uma proposição P(n), aplicável aos números naturais n, é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, se e somente se:

i) $P(n_0)$ é verdadeira, isto é a propriedade é válida para $n = n_0$.

ii) Se $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$ e P(k) é verdadeira, então P(k + 1) também é verdadeira.

Se ambos os teoremas forem demonstrados, pode-se afirmar que a proposição é válida para todo número natural n.

Algumas propriedades que podem ser demonstradas usando o princípio da indução finita:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2,\ n \geq 1$$

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2},\ n \geq 1$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ n \geq 1$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,\ n \geq 1$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3},\ n \geq 1$$

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + (n - 1).n = \frac{(n-1).n.(n+1)}{3},\ n \geq 2$$

$$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + n.(n+1).(n+2) = \frac{n.(n+1).(n+2).(n+3)}{4},\ n \geq 1$$

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}, n \geq 1$$

$$\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \frac{3^2}{5.7} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1).(2n+1)} = \frac{n.(n+1)}{2.(2n+1)}, n \geq 1$$

$$\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2).(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}, n \geq 1$$

$2n > n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad$ $2^n > n, \forall n \in \mathbb{N}$

Referências

ALENCAR FILHO, Edgar. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Livraria Nobel, 1993.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. *Análise Matemática para o Curso de Licenciatura*. São Paulo: Edgar Blucher, 2005.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 2003.

LELLIS, Marcelo; IMENES, Luiz M. *A Matemática e o Novo Ensino Médio*. Disponível em: *http://www.somatematica.com.br/artigos/a4*. Acesso em: jul.2008.

VIDIGAL, Ângela *et al. Fundamentos de Álgebra*. Belo Horizonte: UFMG, 2005.