Introdução às Geometrias Não Euclidianas na educação básica

Mylane dos Santos Barreto*, Salvador Tavares**

mylanebarreto@yahoo.com.br, saltavares@terra.com.br

Resumo

Das tentativas frustradas de provar que o quinto postulado de Euclides era um teorema, surgiram as Geometrias Não Euclidianas. Com os quatro primeiros postulados de Euclides e a negação do quinto, apareceram outras geometrias cujos postulados são possíveis em modelos planos tão consistentes quanto ao da Geometria Euclidiana. Neste trabalho, são apresentados os modelos e postulados da Geometria Elíptica e da Geometria Hiperbólica. Além disso, é discutido o ensino dessas geometrias.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana. Quinto postulado de Euclides. Ensino e Aprendizagem de Geometrias Não Euclidianas.

Introduction to Nom-Euclidean Geometry in primary education

Abstract

From the failed attempts to prove that the fifth postulate of Euclid was, in fact, a theorem, emerged the Non-Euclidean Geometry. With the first four postulates of Euclid, and the denial of the fifth, other geometries have evolved with postulates that are possible in plane models, and as consistent as those in Euclidean geometry. This paper presents the models and assumptions of both Elliptic and Hyperbolic Geometry. Furthermore, the article discusses the teaching of these geometries.

Key words: *Euclidean Geometry. Euclid's fifth postulate. Teaching and Learning of Non Euclidean Geometry.*

1. Como surgiram as geometrias não euclidianas

As Geometrias Não Euclidianas surgiram das tentativas frustradas de provar que o quinto postulado de Euclides era um teorema demonstrado a partir dos quatro postulados anteriores, e não um postulado.

Euclides viveu, provavelmente, de 330-260 a.C., nasceu na Síria, estudou na escola platônica de Atenas e ensinou matemática no Museu de Alexandria. Foi um dos primeiros geômetras e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes de todos os tempos.

A obra de Euclides, denominada *Elementos*, é um conjunto de 13 livros escritos entre os anos de 330 e 320 a.C., sendo considerada padrão para a matemática durante mais de 2000 anos e só superada, em número de publicações, pela Bíblia. Poucos dos teoremas

* Especialista em Educação Matemática (FAFIC), professora do IF Fluminense
** Mestre em Educação Matemática (USU), professor IF Fluminense, FAFIC, UCAM

demonstrados lá são obra sua, se é que existe algum. O verdadeiro mérito de Euclides está na proposta de ordenação da Geometria de seu tempo em um sistema dedutivo.

Para estabelecer uma afirmação num sistema dedutivo deve-se mostrar que essa afirmação é uma consequência lógica necessária de algumas afirmações previamente estabelecidas. Assim, as primeiras afirmações são aceitas sem demonstração e chamadas, nos dias atuais, de postulados ou axiomas. Desses axiomas, decorrem as demais afirmações. Euclides definiu como axiomas as afirmações aceitas em todas as ciências e como postulados as afirmações de natureza geométrica.

As dez afirmações classificadas como postulados e axiomas representam os pilares para a obra de Euclides, pois as 465 proposições contidas nos *Elementos* são baseadas nestas afirmações.

AXIOMAS

A1 - Coisas que são iguais à mesma coisa também são iguais entre si.

A2 - Se iguais são somados a iguais, então os todos são iguais.

A3 - Se iguais são subtraídos a iguais, então os restos são iguais.

A4 - Coisas que coincidem entre si são iguais entre si.

A5 - O todo é maior do que a parte.

POSTULADOS

P1 - Pode-se traçar uma linha reta de um ponto a outro ponto qualquer.

P2 - Pode-se prolongar uma linha reta indefinidamente a partir de uma reta finita.

P3 - Pode-se traçar um círculo com centro e raio dados.

P4 - Todos os ângulos retos são iguais.

P5 - Se uma linha reta encontra duas outras retas e com elas formam, de um mesmo lado, ângulos internos em que a soma é menor que dois ângulos retos, então, essas duas retas encontrar-se-ão no lado em que formam ângulos cuja soma é menor que dois ângulos retos.

O quinto postulado, chamado de postulado das paralelas, foi o ponto culminante do surgimento das Geometrias Não Euclidianas. Por esse postulado não ser tão evidente como os quatro anteriores e por se referir a um ponto de intersecção que pode estar a quilômetros de distância, alguns afirmavam que ele podia ser demonstrado. Portanto não seria um postulado, e sim um teorema.

Segundo Boyer (1974, p. 397), em 1829, em uma espécie de jornal chamado *Mensageiro de Kazan*, Nicolai Ivanovich Lobatschewsky publicou um artigo chamado *Sobre os Princípios de Geometria*. Esse ano ficou marcado como o do surgimento das Geometrias Não Euclidianas. Aproximadamente, em 1829, Janos Bolyai chegou à mesma conclusão a que Lobatschewsky chegara. Em 1851, na sua aula inaugural para admissão como professor-adjunto na Universidade de Göttingen, Georg Riemann apontou possibilidades para outras geometrias.

Segundo Boyer (1974, p. 401), o matemático alemão Félix Klein chamou a Geometria de Lobatschewsky de Geometria Hiperbólica e denominou a Geometria de Riemann de Geometria Elíptica. Essas são as duas principais Geometrias Não Euclidianas.

Daí, Lobatschewsky, Bolyai e Riemann demonstraram que o quinto postulado de Euclides tratava-se de um axioma independente dos outros quatro. Supuseram que o postulado de Euclides não era verdadeiro e substituíram-no por outros axiomas. Foi demonstrado que, se alguma das Geometrias Não Euclidianas apresentar uma contradição, a própria Geometria Euclidiana será contraditória.

Essas novas geometrias permitiram às ciências uma série de avanços, entre os quais a elaboração da Teoria da Relatividade de Einstein, provando que, ao contrário do que muitos afirmavam, essas teorias tinham aplicações teóricas.

2. Planos e retas das Geometrias Não Euclidianas

Na Geometria Elíptica, o modelo plano é uma superfície esférica e as retas são geodésicas dessa superfície.

As geodésicas da superfície esférica são circunferências cujo centro coincide com o centro da superfície.

Na Geometria Hiperbólica, o modelo plano é uma superfície chamada de pseudoesfera. Essa superfície é gerada por meio da revolução de uma curva chamada tratriz em torno do seu eixo horizontal. As retas da Geometria Hiperbólica são geodésicas da pseudoesfera.

Segundo Coutinho (2001, p. 41), existem dois modelos para representação dos conceitos da Geometria Hiperbólica no plano euclidiano: um formulado por Henri Poincaré e outro, por Félix Klein. Esses modelos serão apresentados no minicurso.

3. Quinto postulado das Geometrias Não Euclidianas

As Geometrias Elíptica e Hiperbólica admitem os quatro primeiros postulados de Euclides e substituem o quinto por outras afirmações que são válidas nos seus modelos planos.

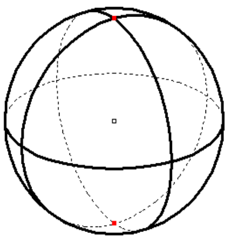

Figura 1 - Retas não paralelas
Fonte: Autores

Quinto postulado da Geometria Elíptica: Por um ponto exterior a uma reta, não podemos traçar nenhuma paralela a essa reta (Figura 1).

Todas as retas traçadas irão intersectar-se em dois pontos distintos, logo não existem retas paralelas.

Comparando a superfície esférica com a superfície terrestre, as retas seriam os meridianos que se intersectam nos polos.

Quinto postulado da Geometria Hiperbólica: Por um ponto exterior a uma reta, podemos traçar uma infinidade de paralelas a essa reta (Figura 2).

Sobre a reta r, traçamos os segmentos MP e FT perpendiculares a r, sendo M e F pontos da reta r. Com a distância MF e centro em P, traçamos um arco que intersectará o segmento FT nos pontos S_1 e S_2. Assim, os pontos P e S_1 determinam a reta *a*, e os pontos P e S_2 determinam a reta *b*.

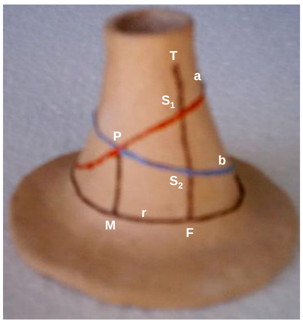

Figura 2 - Retas paralelas
Fonte: Autores

4. Relevância e metodologia

A relevância do estudo das Geometrias Não Euclidianas na Educação Básica surge da necessidade de desenvolvimento das atuais formas de tecnologia já que as Geometrias Euclidianas não são suficientes para representação dos fenômenos físicos. A criação das Geometrias Não Euclidianas confirma a possibilidade de desenvolvimento de um novo conhecimento a partir da negação de outro previamente estabelecido. O aluno deve ser incentivado a pensar e questionar os conhecimentos.

> Relembrando as competências eleitas por esta proposta, é importante destacar que este tema estruturador pode desenvolver no aluno todas as habilidades relativas a

> medidas e grandezas, mas pode fazê-lo também avançar na percepção do processo histórico de construção do conhecimento matemático, e é especialmente adequado para mostrar diferentes modelos explicativos do espaço e suas formas numa visão sistematizada da Geometria com linguagens e raciocínios diferentes daqueles aprendidos no ensino fundamental com a geometria clássica euclidiana. (BRASIL, 2002, p. 125).

As Geometrias Não Euclidianas formam um ramo da matemática importante do ponto de vista histórico e educacional, e os professores em formação devem ser preparados para ensinar Geometrias Não Euclidianas. Porém isso não ocorre na realidade.

Usiskin (1994, p. 25) já alertava que "muitos professores novos nunca estudaram geometria tridimensional, talvez nunca tenham tomado conhecimento de uma Geometria Não Euclidiana nem lidado com transformações ou vetores".

Barreto e Tavares (2010) apresentam os resultados de uma pesquisa realizada em *sites* de Instituições de Ensino Superior brasileiras, a fim de verificar o estado da arte do ensino das Geometrias Não Euclidianas nos cursos de Licenciatura em Matemática. De 166 Instituições pesquisadas, apenas 12 apresentavam, na matriz curricular, alguma disciplina cujo título evidencia o estudo de Geometrias Não Euclidianas, 06 com disciplinas obrigatórias e 06 com disciplinas optativas ou eletivas. Aproximadamente 7% das 166 Instituições formam professores que sabem da existência de outras geometrias além da euclidiana.

Os participantes deste minicurso terão a oportunidade de conhecer a história da origem das Geometrias Não Euclidianas, os postulados das Geometrias Não Euclidianas, os modelos planos e definição de retas. Além de construir, usando os *softwares* Calques3D, Régua e Compasso e *Winplot*, planos e retas das duas principais Geometrias Não Euclidianas: Elíptica e Hiperbólica.

A utilização de *softwares* e objetos concretos é uma alternativa para justificar a possibilidade de inclusão de conceitos das Geometrias Não Euclidianas na Educação Básica.

5. Considerações finais

Uma sugestão de atividade que pode ser desenvolvida no Ensino Fundamental é relatada a seguir.

Considerando que a noção de plano da Geometria Euclidiana é construída sobre a superfície da Terra, que tem a forma de uma esfera achatada nos polos, ao construirmos duas retas paralelas sobre a superfície de uma laranja, que tem a forma aproximadamente idêntica à da Terra, teremos a seguinte situação:

Figura 3 - Retas euclidianas paralelas na superfície da Terra
Fonte: Autores

Como mostra a sequência de figuras, as retas que são consideradas paralelas na Geometria Euclidiana, quando construídas numa superfície esférica, encontram-se em dois pontos distintos, e a distância entre elas não é constante em qualquer ponto.

Daí, a Geometria Euclidiana ser inconsistente para esse modelo de superfície.

Os modelos planos são superfícies onde os postulados de dada geometria são verdadeiros. O modelo plano da Geometria Euclidiana é uma superfície plana, da Geometria Elíptica é uma superfície esférica e da Geometria Hiperbólica é uma pseudoesfera. A existência desses modelos mostra a independência do quinto postulado de Euclides, pois neles são válidos os quatro primeiros postulados deste autor, e nega-se o quinto. Assim, o quinto postulado é totalmente independente dos quatro primeiros e não pode ser considerado um teorema.

Não podemos considerar apenas uma geometria. Todas são consistentes e válidas nos seus modelos planos. Devemos conhecê-las para poder escolher uma e utilizá-la no momento adequado.

Referências

BARRETO, Mylane dos Santos; TAVARES, Salvador. Do Mito da Geometria Euclidiana ao Ensino das Geometrias Não Euclidianas: a Experiência no IF Fluminense campus Campos-Centro. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE, 10., 2010, Salvador. *Anais*... Salvador: Via Litterarum, 2010. 1 CD-ROM.

BOYER, Carl Bernjamin. *História da matemática*. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+):* Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

COUTINHO, Lázaro. *Convite às Geometrias Não Euclidianas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

USISKIN, Zalman. *Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar:* aprendendo e ensinando geometria. Organizadores Mary Montgomery Lindquist, Albert P. Shulte. Tradução: Higino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.