Algumas aplicações da Geometria Analítica

André Luiz Ferreira*

andreferreira79@yahoo.com.br

Resumo
O principal objetivo deste texto é apresentar alguns tópicos de Geometria Analítica abertamente aplicados e de grande conhecimento "popular" e que ao mesmo tempo possam ser bem fundamentados matematicamente, no nível de conhecimentos do público esperado. Os temas escolhidos foram a Otimização (ou Programação) Linear e as Propriedades de Reflexão das Cônicas em razão de nossa experiência recente no ensino e aprendizagem da referida disciplina. Os pré-requisitos para entender esta apresentação são apenas uma experiência inicial em Geometria Analítica e Cálculo Diferencial, um primeiro curso concluído ou em andamento sobre cada uma destas disciplinas.

Palavras-chave: Geometria Analítica. Programação Linear. Reflexão em Cônicas.

Some applications of Analytic Geometry

Abstract
The main objective of this paper is to present some topics of Analytic Geometry which are widely applied and considered as "popular" knowledge. The aim is that these topics can be mathematically based at the level of knowledge of the participants. The selected themes are Linear Optimization (or Programming), and Reflective Properties of Conic Curves due to our recent experience in teaching and learning on the subject. The prerequisite for understanding this presentation is limited to an initial experience in Analytic Geometry and Calculus – a beginners' course completed or in progress on each of these academic disciplines.

Key words: *Analytic Geometry. Linear Programming. Reflective Properties Conic Curves.*

1. Programação linear

Consideremos o seguinte problema:

(1) Um fabricante produz bicicletas e motos, cada uma delas devendo ser processada em duas oficinas. A oficina 1 tem um máximo de 120 horas disponíveis e a oficina 2 tem um máximo de 180 horas disponíveis. A fabricação de uma bicicleta requer 6 horas na oficina 1 e 3 horas na oficina 2. A fabricação de uma moto requer 4 horas na oficina 1 e 10 horas na oficina 2. Se o lucro é de $ 45,00 para cada bicicleta e de $ 55,00 para uma moto, determine o número de bicicletas e de motos que devem ser fabricadas de forma a maximizar o lucro.

* Mestre em Matemática (UFF), professor do IFF Cabo Frio e da Universidade Gama Filho

Este problema pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

Seja x o número de bicicletas e y o número de motos. Pelos dados do problema temos:

tempo de uso da oficina 1 : $6x + 4y \leq 120$

tempo de uso da oficina 2 : $3x + 10y \leq 180$

Lucro obtido: $45x + 55y$

Como no contexto do problema não faz sentido considerar uma produção negativa, temos também as restrições: $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Daí, concluímos que o problema matemático a ser resolvido é:

Encontrar o valor máximo da função $L(x, y) = 45x + 55y$, no conjunto solução das restrições:

$$
\begin{gathered}
6x + 4y \leq 120 \\
3x + 10y \leq 180 \\
x \geq 0 \\
y \geq 0
\end{gathered}
$$

Pode-se verificar, usando conhecimentos elementares de Geometria Analítica (equações e inequações do primeiro grau), que a solução deste sistema no Plano Cartesiano é um quadrilátero convexo com sua fronteira. Esta informação nos permite resolver o problema por meio do seguinte teorema:

"O máximo e o mínimo de uma função linear $L(x, y) = mx + ny$ *em um polígono convexo no Plano Cartesiano ocorre em sua fronteira, mais precisamente, em um vértice ou em um lado completo."*

Este resultado pode ser demonstrado de maneira bastante simples usando apenas alguns conhecimentos sobre equação da reta e vetores. Para a solução do problema apresentado, basta determinar os vértices do polígono que é a solução das inequações de restrições, resolvendo sistemas lineares com as equações das retas:

$$r: 6x + 4y = 120, \quad s: 3x + 10y = 180, \quad OY: x=0 \text{ e } OX: y=0.$$

O vértice para o qual obtemos o maior valor do lucro é a solução do problema. Se houver dois vértices com o valor máximo, a solução será o lado que os liga, de acordo com o teorema.

Procurando as interseções das retas, encontramos:

$$r \cap s = (10,15); \; r \cap OY = (0,30); \; r \cap OX = (20,0); \; s \cap OY = (0,18); \; s \cap OX = (60,0); \; OY \cap OX = (0,0).$$

Em seguida, reescrevendo o sistema de restrições na forma:

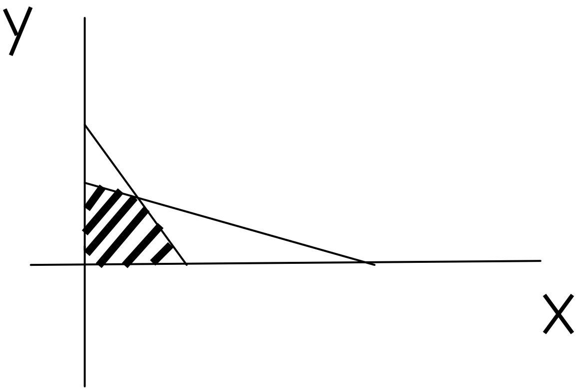
$$
\begin{gathered}
y \leq (-6x + 120) / 4 \\
y \leq (-3x + 180) / 10
\end{gathered}
$$

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0,$$

concluímos que o polígono solução do sistema localiza-se:

abaixo da reta ***r:*** $y = (-6x + 120) / 4$,
abaixo da reta ***s:*** $y = (-3x + 180) / 10$,
à direita de ***OY:*** $x=0$ e
acima de ***OY:*** $x=0$.

Isto, juntamente com as interseções das retas que obtivemos, nos permite traçar o seguinte esboço:



E observando que seus vértices são $s \cap OY=(0,18)$; $r \cap s= (10,15)$; $r \cap OX=(20,0)$ e $OY \cap OX=(0,0)$, que geram os lucros:

$$L(0,18)=45.0+55.18=990 \text{ ,}$$
$$L(10,15)=45.10+55.15=1275 \text{ ,}$$
$$L(20,0)=45.20+55.0 \text{ e}$$
$$L(0,0)=45.0+55.0 \text{ ,}$$

concluímos pelo teorema enunciado anteriormente que o lucro máximo é de $ 1.275,00; obtido produzindo-se 10 bicicletas e 15 motos.

2. Propriedades de reflexão das cônicas

Suponha que uma onda ou um raio luminoso incida alinhado com um foco de uma cônica. Pode-se demonstrar, usando a lei de reflexão (ângulo de incidência = ângulo de reflexão) e propriedades geométricas das cônicas, que a onda ou raio luminoso tem uma trajetória bem determinada. Essas propriedades geométricas que podemos demonstrar analiticamente sem grandes dificuldades são as seguintes:

(1) Em um ponto qualquer de uma parábola, a reta normal é a bissetriz do ângulo entre a paralela ao eixo de simetria e o raio focal.

(2) Em uma elipse ou hipérbole, a reta normal é a bissetriz do ângulo entre a paralela ao eixo de simetria e o raios focais.

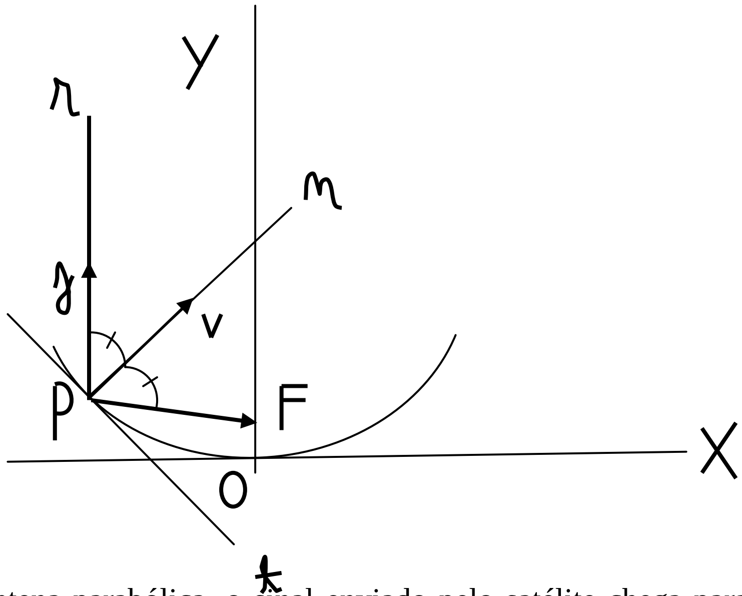
Assim, se um raio incide alinhado com o foco de uma cônica, podemos prever sua trajetória. Este princípio é utilizado, por exemplo, nas antenas parabólicas, na forma de alguns prédios e instrumentos ópticos.

No caso da elipse e da hipérbole, a igualdade dos ângulos entre os raios focais e a normal pode ser demonstrada usando o produto interno entre vetores paralelos àquelas retas. Por meio de um raciocínio análogo, usando vetores paralelos à normal, ao eixo de simetria e ao raio focal, também se demonstra a propriedade (1) referente à parábola.

Como consequências destas propriedades geométricas, temos os seguintes resultados sobre reflexão:

Reflexão na parábola:

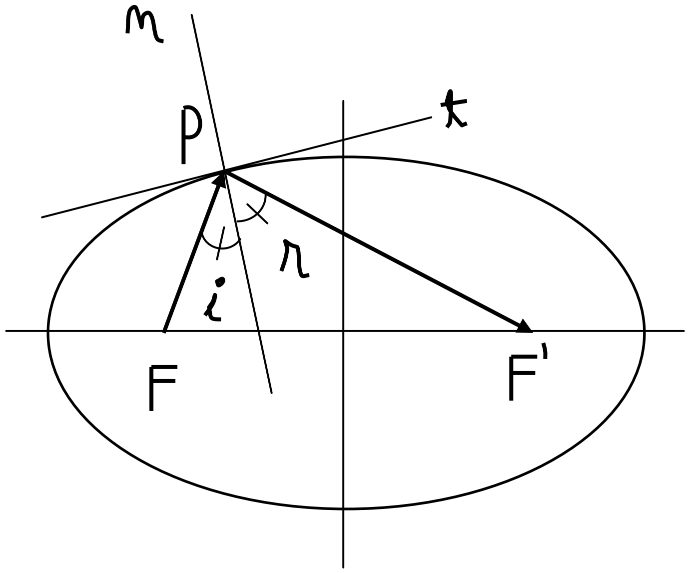
“Todo raio luminoso (reta ***r*** na figura) ou onda que incide em uma parábola paralelamente a seu eixo de simetria é refletido(a) passando por seu foco e, inversamente, todo raio ou onda emitido(a) do foco é refletido paralelamente (reta ***r*** na figura) a seu eixo de simetria”.



Em uma antena parabólica, o sinal enviado pelo satélite chega paralelamente ao seu eixo de simetria e, então, é refletido para o dispositivo receptor localizado em seu foco.

Reflexão na elipse:

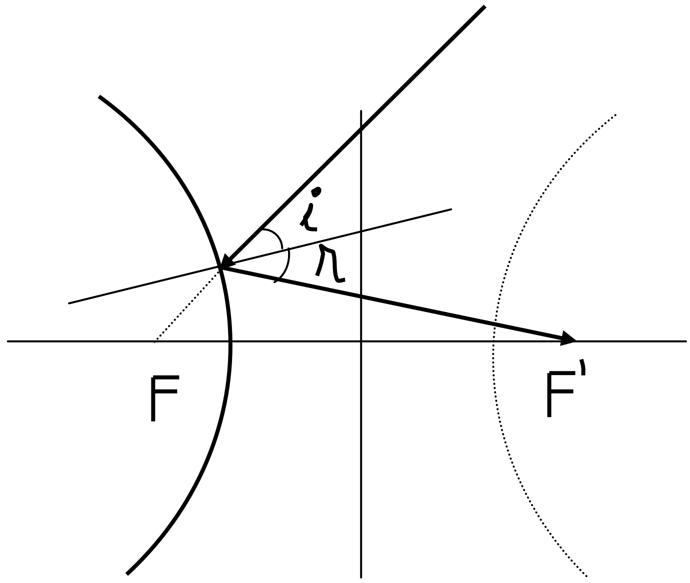
“Todo raio luminoso ou onda emitido(a) do foco de uma elipse é refletido passando pelo outro foco”.



Esta propriedade é utilizada, por exemplo, no dispositivo de iluminação dos dentistas. Outra aplicação encontra-se em algumas construções como igrejas, em que se procura o efeito acústico de desviar-se o som para certas áreas dos prédios.

Reflexão na Hipérbole:

"Todo raio luminoso ou onda que incide em uma hipérbole, alinhado com um foco, é refletido passando pelo outro foco ou inversamente, todo raio luminoso ou onda emitido(a) do foco de uma hipérbole é refletido alinhado com o outro foco".



Esta propriedade faz com que a hipérbole tenha aplicações em alguns instrumentos ópticos como, por exemplo, o telescópio de reflexão. O telescópio Hubble, muito conhecido pelas imagens claras que envia do espaço, é um instrumento deste tipo. Para mais detalhes sobre aplicações das cônicas, convém consultar a terceira referência a seguir:

Referências

EFIMOV, N. *Elementos de Geometria Analítica*. Belo Horizonte: Livraria Cultura Brasileira Editora, 1972.

MURDOCH, David C. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora,1980.

QUEIRÓ, João F. *A Elipse, a Parábola e a Hipérbole - Propriedades e Aplicações*, Universidade de Coimbra. Disponível em: < http://www.mat.uc.pt/~jfqueiro/aplicacoes.pdf>. Acesso em 02 ago. 2010.

WEBER, JEAN E. *Matemática para Economia e Administração*. São Paulo: Editora Harbra, 1986.