

# Uma aplicação dos fractais: o estudo de progressões geométricas

Mikelle R. de Almeida<sup>\*</sup>, Ana Paula R. Andrade<sup>\*\*</sup>, Carmem Lúcia V. R. Azevedo<sup>\*\*\*</sup>

mikellerodrigues@yahoo.com.br, anapaulara@iff.edu.br, clvra@iff.edu.br

## Resumo

Os fractais estão cada vez mais presentes nos livros de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, bem como no ENEM e em alguns vestibulares do Brasil. O seu estudo permite abordar diversos conceitos matemáticos, como: progressões, área, perímetro, volume, números complexos, logaritmos, polinômios, dentre outros. Neste minicurso, o enfoque será dado às Progressões Geométricas e para tal será utilizado um *software* da Geometria Dinâmica, o Geometricks, como um facilitador na visualização de padrões. Utiliza-se o processo investigativo e o uso de processos iterativos para se chegar a algumas representações simbólicas de conceitos subjacentes a esse tema.

**Palavras-chave:** Fractais. Progressões Geométricas. Processo Investigativo.

## *An application of fractals: the study of geometric progressions*

### *Abstract*

*Fractals are increasingly present in Math textbooks used in Brazilian Elementary and Secondary School, as well as in the High School National Exam (ENEM), and in some college entrance exams (vestibulares). Its study allows for the application of many mathematical concepts such as: progressions, area, volume, perimeter, complex numbers, logarithms, polynomials, among others. This course will focus on Geometric Progressions using Geometricks, a Dynamic Geometry software, as a facilitator in the visualization of patterns. Investigative and interactive processes will be used to reach some symbolic representations of underlying concepts in this area.*

**Key words:** *Fractals. Geometric progressions. Investigative process.*

## 1. Introdução

Segundo Boyer (1996 *apud* CARVALHO, 2005, p.14), “no século XVII, Galileu Galilei disse que a Matemática era a linguagem da natureza e o seu alfabeto eram os círculos, triângulos e demais figuras geométricas euclidianas (...)”. Contudo a natureza é dotada de formas complexas, seja na estrutura do átomo, na formação de nuvens, sejam nos recortes geográficos das linhas costeiras, nas efêmeras imagens abstraídas das montanhas, dentre

---

<sup>\*</sup> Licencianda em Matemática do IF Fluminense

<sup>\*\*</sup> Especialista em Educação Matemática (FAFIC), professora do IF Fluminense

<sup>\*\*\*</sup> Mestre em Economia Empresarial (UCAM/RJ), professora IF Fluminense

outras, as quais a Geometria Euclidiana torna-se inadequada para representar suas expressões geométricas.

Sendo assim, surge uma nova geometria, a Geometria Fractal. Esta Geometria tem, talvez, por maior mérito “o de representar melhor as formas da natureza – as mesmas que a Geometria Euclidiana considera como desvio do padrão” (CARVALHO, 2005, p.15). Esta afirmação pode ser sintetizada pela seguinte frase de Mandelbrot (1983): “as nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos, e o latido do cão não é contínuo, nem os relâmpagos se propagam em linha reta” (MANDELBROT, 1983 *apud* GONÇALVES, 2007, p.40).

A palavra FRACTAL foi criada pelo matemático polonês, naturalizado francês, Benoit Mandelbrot. Ela origina-se, do latim, do adjetivo *fractus*, do verbo *frangere* que significa quebrar: criar fragmentos irregulares.

Durante a década de 1960, cientistas descobriram que por trás de aparentes irregularidades do mundo natural tem-se uma forma sutil de ordem. Eles denominaram esse comportamento de “caótico”, e um novo campo da ciência chamado Teoria do Caos nasceu para explicar a dinâmica da natureza. Usam-se formas fractais para construir antenas de telefones celulares, e técnicas fractais de compressão de imagens permitem que se coloquem grandes quantidades de informação em CDs e DVDs. Outras áreas do conhecimento beneficiam-se com esses novos estudos, como a Arquitetura e Urbanismo, a Medicina, a Economia, a Arte e a Astronomia.

O tema Geometria dos fractais é novo, instigante e revestido de múltiplas aplicações no campo da educação. Com ele, pode-se trabalhar conceitos, como o de área e volume, logaritmos, progressões e muitos outros. Segundo Baldovinotti,

A inserção do estudo de fractais no currículo escolar pode contribuir para que os PCNs<sup>1</sup> chamam de interdisciplinaridade, uma vez que permite associar os diversos conceitos matemáticos existentes com as outras áreas de aplicação já citados anteriormente, tornando uma fonte riquíssima a ser explorada em sala de aula pelo professor de Matemática juntamente com os seus alunos (BALDOVINOTTI, 2008, p.3).

Atualmente o estudo de fractais está cada vez mais presente nos livros didáticos de Matemática. Também aparece em questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e de alguns vestibulares do nosso país.

Foi escolhido o tema Progressão Geométrica visto que nessa geometria é perceptível a presença de sequências de razão determinada, fruto dos processos de iteração que se encontram nessas figuras, ou seja, processos que consistem em repetir o mesmo ato ou princípio infinitamente. Além do mais, os fractais são revestidos de uma beleza incomparável, tornando prazeroso qualquer estudo que os tenha como recurso para a aprendizagem.

Uma das propriedades mais notáveis dos fractais é a da autossimilaridade. Isto significa dizer que estruturas semelhantes são observadas em várias escalas. Esta propriedade traz uma compreensão mais clara da nova geometria e auxilia a construção de tabelas que servirão para uma reflexão acerca dos conceitos de progressão geométrica pretendidos.

A introdução de fractais no ensino médio, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com o processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma ideia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas (SALLUM, 2005, p.1).

---

<sup>1</sup> Parâmetros Curriculares Nacionais.

O estudo de fractais ganha impulso com o desenvolvimento de *softwares* da Geometria Dinâmica os quais auxiliam as etapas de construção dos processos iterativos. A introdução da tecnologia para facilitar o traçado dos fractais é oportuna nesse trabalho. O *software Geometricks*<sup>2</sup> é utilizado juntamente com atividades de caráter investigativo no qual o aluno não é mais instruído, porém construtor do seu próprio conhecimento.

O uso de computadores para auxiliar o aprendiz a realizar tarefas, sem compreender o que está fazendo, é uma mera informatização do atual processo pedagógico. Já a possibilidade que o computador oferece como ferramenta para ajudar o aprendiz a construir conhecimento e a compreender o que faz, constitui uma verdadeira revolução do processo de aprendizagem e uma chance para transformar a escola (VALENTE, 1999, p.89).

Diante do exposto, pretende-se neste minicurso (originado do trabalho monográfico intitulado *O uso de fractais no estudo das Progressões Geométricas* da licencianda Mikelle Rodrigues) introduzir a Geometria dos Fractais no estudo de Progressões Geométricas, buscando uma conexão da Geometria com a Álgebra.

## 2. Desenvolvimento

O minicurso estrutura-se em quatro partes: apresentação da Geometria Fractal, apresentação do *software Geometricks*<sup>1</sup>, construção e resolução de atividades com o auxílio do *software* e de exercícios.

Na primeira parte, será apresentada a história, a propriedade de autossimilaridade dos fractais e suas aplicações em diversas áreas. Em destaque, a área de Artes por meio do trabalho desenvolvido pelo grupo Fractarte.

Posteriormente, se apresenta o *software Geometricks* com informações sobre sua autoria e aquisição, a estrutura dos *menus* e a utilização de alguns comandos que serão necessários nas atividades subsequentes.

No terceiro momento, ocorre a parte central desse encontro no qual serão feitas as construções dos fractais Floco de Neve de Koch e Triângulo de Sierpinski, com a utilização do *software Geometricks*. Será apresentado um pequeno histórico dessas figuras e pretende-se que as atividades culminem com a dedução das fórmulas do termo geral da P.G. e da soma dos  $n$  termos de uma P.G. finita. A observação de padrões será fundamental para o alcance dos objetivos e o caráter investigativo está presente em toda a metodologia utilizada. Segundo Baldovinotti (2008, p.11),

assumir esse caráter investigativo é dizer que essas atividades são problemas dos quais não temos respostas prontas, ou seja, no transcorrer de seu desenvolvimento, os alunos podem percorrer diferentes caminhos através de conjecturas elaboradas por eles próprios.

Este autor afirma ainda que “nesse cenário o aluno é convidado a ser construtor de seu próprio conhecimento e o seu envolvimento é uma condição fundamental para a sua aprendizagem” (p.11).

Por fim, na resolução de exercícios serão apresentados novos fractais e perguntas envolvendo as relações dos mesmos com as progressões geométricas. Também fazem parte desse bloco de atividades questões de vestibulares e do ENEM, pois mostram que esse tema é bastante atual e relevante na área da educação.

---

<sup>2</sup> O *software Geometricks* é de autoria de Viggo Sadolin, da The Royal Danish School of Education, Copenhagen, Dinamarca. Ele é representado no Brasil pelo Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba e pela Profa. Dra. Miriam Godoy Penteado, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro, SP.

Pretende-se também apresentar os resultados da pesquisa desenvolvida pela licencianda com o objetivo de ampliar a discussão e dar mais subsídios aos professores que desejam utilizar esse tema em sala de aula. Além disso, é sugerida a utilização de outros materiais como dobraduras e malhas nesse processo de construção do aluno, já que uma grande parte das escolas brasileiras não possui um trabalho efetivo junto às novas tecnologias.

### 3. Considerações finais

Acredita-se que o estudo das Progressões Geométricas se fará de forma mais rica junto ao aprendizado dos fractais. Essa nova Geometria, que modela formas naturais e amplia a visão dos educadores para o papel da Matemática frente às novas descobertas, enriquece a sala de aula com seus padrões e possibilita uma aprendizagem significativa.

A Geometria Fractal pode ser trabalhada em qualquer nível de ensino passando pelas dobraduras até números complexos e modelagem. Ela traz consigo exemplos encontrados na natureza e desenvolve a criatividade, o raciocínio lógico e o senso estético pelas belas formas que pode apresentar.

### Referências

BALDOVINOTTI, N. J. O estudo de fractais para futuros professores de Matemática. *In*: EBRAPEM. ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: possibilidades de interlocução, 12., Rio Claro, SP, 2008, 2008. v. 1. p. 1-14. Disponível em: <[http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/lista\\_trabalhos\\_sala.php](http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/lista_trabalhos_sala.php). Acesso em 08 jul.2010>.

CARVALHO, H.C. de. *Geometria Fractal: Perspectivas e possibilidades no ensino de Matemática*. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Pará- UFPA, 2005. Disponível em: <[http://www.ufpa.br/ppgecm/media/dissertacao\\_hamilton\\_cunha\\_de\\_carvalho.pdf](http://www.ufpa.br/ppgecm/media/dissertacao_hamilton_cunha_de_carvalho.pdf)>. Acesso em: 27 out. 2009.

GONÇALVES, A. G. N. *Uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais*. 2007. 170 p. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, 2007. Disponível em: <[http://www.sapientia.pucsp.br//tde\\_busca/arquivo.php?codArquivo=4953](http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4953)>. Acesso em: 29 out. 2009.

PENTEADO, M.; AMARAL, R. B.; BORBA, M. C. *Manual do Geometricks*. São Paulo: Fundação Editora da UNESP, 2000.

SALLUM, E. M. Fractais no Ensino Médio. *RPM*, São Paulo, v.57, p. 1-8, 2005.

VALENTE, J.A. Análise dos diferentes tipos de software usados na Educação *In*: \_\_\_\_\_. (Org) *O computador na sociedade do conhecimento*. Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 1999. p. 89-99.