O MOVIMENTO NA GEOMETRIA:
Abstração ou realidade?

Mônica Souto da Silva Dias*

Neste artigo é apresentada uma reflexão sobre a presença do movimento no desenvolvimento da Geometria, bem como as implicações didáticas da relação entre a Geometria e o movimento para o ensino daquela disciplina. Para embasar esta reflexão, optou-se por uma breve retrospectiva histórica, a fim de melhor situar o leitor no contexto do tema discutido.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino. Aprendizagem. Movimento. Geometria.

1. INTRODUÇÃO

O movimento sempre foi um tema instigante ao longo da história das ciências. O grande momento da ciência grega ocorreu na busca por explicações para o movimento dos corpos; intrigou os gregos o fato de os objetos moverem-se sem a intervenção humana. O Cálculo, este poderoso instrumento matemático, também teve seu desenvolvimento motivado pelas tentativas de compreensão e estudo do movimento.

* Doutoranda em Educação Matemática - PUC/SP. Professora do CEFET Campos e do UNIFLU.

Há alguns anos, o termo geometria dinâmica[1] é associado ao ensino de Geometria com a utilização de softwares de Geometria e de Desenho Geométrico que permitem a manipulação direta de objetos geométricos representados na tela do monitor, via teclado ou mouse. Desta forma, o movimento surge relacionado a este "dinamismo" das figuras, que provém dos recursos dos programas que possibilitam o deslocamento dos objetos, designado pelo "agarrar-arrastar" dos elementos geométricos.

Mas a questão do movimento na Geometria remonta aos gregos, e aparece efetivamente na obra *Os Elementos* de Euclides (séc. III a. C.), quando este enuncia o axioma 4 – *coisas que coincidem são iguais* - no qual está implícita a noção de superposição. Euclides não fez nenhuma referência a esta noção, simplesmente a utilizou. Este fato nos coloca diante das seguintes questões: que movimento permite levar uma figura a se sobrepor a outra? Qual é a natureza deste movimento?

Mais tarde, com o desenvolvimento da Geometria Projetiva e a aritmetização da Geometria, nascem as transformações geométricas como método da Geometria, enquanto instrumentos implícitos de transferência de propriedades, constituindo relações entre duas figuras em que a noção de invariante prevalece (JAHN, 1998, p. 37). Neste contexto, a noção de movimento é retomada, agora definida por meio de um instrumento matemático: as funções. Uma figura e a sua imagem, por uma transformação T, relacionam-se através da lei de T. Tomando, como exemplo, as isometrias, é possível compreender a figura A e sua imagem A' como uma mesma figura, estando A' representando a nova posição de A após o movimento de translação, rotação ou simetria, sendo esta última um movimento no espaço. Se considerarmos a homotetia de razão $k \neq \pm 1$, a figura A e sua imagem A' não carecem da interpretação acima, uma vez que A' não é congruente a A. Ainda assim, pode-se afirmar que há um "movimento subjacente" à deformação sofrida pela figura A.

Pela descrição anterior, observamos o termo movimento associado a uma operação geométrica. Mas, o que é o movimento em Geometria? Melhor dizendo, como descrever o movimento geométrico? Em que ele difere do movimento cinemático, onde o tempo é considerado? O movimento dos objetos geométricos na tela do monitor é o movimento geométrico?

A questão do movimento ressurge nos tempos atuais, devido ao "dinamismo" oferecido pelos programas já mencionados. Enfim, questionamos se o movimento geométrico está relacionado a uma transformação T aplicada a uma figura ou ao deslocamento desta na tela do monitor.

A partir de 1998, os Parâmetros Curriculares Nacionais recomendam o estudo das Transformações Geométricas no ensino de Geometria no 3º e 4º ciclos do ensino fundamental, objetivando implementar um "dinamismo" ao estudo desta disciplina:

> As atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesses ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais "dinâmico" para este estudo. (SECRETARIA, 1998, p. 124).

Não está claro no texto acima se o "dinamismo" refere-se à "movimentação" que ocorre com as figuras quando estas são submetidas a alguma das transformações geométricas. Em Lopes e Nasser, encontramos uma afirmação da relação entre dinamismo e transformações geométricas:

> Na era da imagem e do movimento, a Geometria não pode ser estática, como vinha sendo ensinada seguindo

> Euclides [...] No entanto, é possível desenvolver um curso dinâmico de Geometria, mesmo sem computadores. Nesse sentido, as Transformações Geométricas no Plano podem ser usadas para dinamizar o curso, desde que adotem uma linguagem adequada à experiência anterior e aos níveis de van Hiele atingidos pelos alunos. (LOPES, NASSER, 1997, p. 93).

Esta crença é compartilhada por Catala, Gómez e Garrido:

> Félix Klein fue quien se dio cuenta de que existia un objeto matemático, el grupo, que possibilita una nueva organización de todas estas situaciones al caracterizar de forma cómoda las diferentes geometrias elaboradas durante el siglo XIX. Lo hace con el *grupo de transformaciones* y la idea de que una geometria es el estudio de los invariantes de un cierto grupo de transformaciones. *La geometria seria desee entonces el estudio de las propriedades de las figuras que permanecem invariantes con respecto a un grupo específico de transformaciones.* La geometria no es estática como en tiempo de Euclides, és dinámica. (CATALA, GÓMEZ, GARRIDO, 1989, p. 15)[2] .

Como se pode observar, para alguns matemáticos e educadores matemáticos, o dinamismo das figuras está relacionado a transformações geométricas.

O movimento apartado da condição temporal passa a ser uma abstração matemática. Porém, no caso das isometrias, por exemplo, não haveria prejuízo em considerá-lo como o movimento cinemático, uma vez que o fator tempo não alteraria os resultados.

Num futuro não muito distante, espera-se que os softwares de geometria e desenho geométrico estejam totalmente integrados ao dia-a-dia das aulas de Geometria. Os termos difundidos no bojo deste novo

recurso devem ser analisados e o seu uso monitorado.
Este pequeno histórico do termo movimento e seu significado, pretendem contribuir para que o movimento geométrico, tal como concebido pelos geômetras, não tenha seu significado banalizado pela utilização do termo geometria dinâmica.

Neste trabalho, pretende-se discutir o sentido do termo movimento em Geometria ao longo da história, tendo em vista as implicações que tais enfoques acarretam para a fundamentação da Geometria, as transformações geométricas e o ensino de Geometria.

2. A GEOMETRIA SEGUNDO EUCLIDES

Euclides (300 a.C.) é conhecido por sua obra *Os Elementos*, composta de 465 proposições distribuídas em treze livros, dos quais, seis tratam de Geometria, a saber, os livros I, III, IV, VI, XI e XII. Neles, a Geometria é apresentada como uma ciência afastada das aplicações práticas que motivaram seu desenvolvimento, compondo-se de axiomas[3], postulados e definições que privilegiam o encadeamento lógico, influenciando enormemente o desenvolvimento da Geometria. Esta obra teve um significado singular, pois é uma introdução ao estudo da Geometria e da Matemática em geral, segundo as idéias da escola platônica, como uma preparação para estudos filosóficos gerais. Isto justifica a apresentação do modo axiomático e a ausência de aplicações práticas (KLEIN, 1931, p. 273). Entretanto, *Os Elementos* apresenta falhas lógicas, se analisado à luz da moderna matemática. A Geometria estudada na maioria das escolas de Ensino Fundamental baseia-se na obra *Os Elementos.* A influência da Geometria Euclidiana é tão forte que, quando se fala em Geometria no ambiente escolar do Ensino Fundamental, não se faz distinção entre esta e as outras geometrias, logo imagina-se tratar da Geometria Euclidiana.

Nesse item, pretende-se discutir o lugar que a noção de movimento ocupa na obra de Euclides.

No primeiro livro, dedicado aos fundamentos da Geometria, o autor apresenta trinta e cinco definições, iniciando pelas de ponto e linha. Em seguida, vêm os postulados (BOYER, 1974, p. 77):

> 1. Traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
>
> 2. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.
>
> 3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
>
> 4. Que todos os ângulos retos são iguais entre si.
>
> 5. Que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, encontram-se desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.

O quarto postulado provocou muitas discussões sobre seu significado, levando à seguinte questão: Euclides utiliza ou não a noção de movimento? Apesar de não estar explícito, teria tido Euclides a intenção de introduzir a noção de movimento? (KLEIN, 1931, p. 264). Alguns historiadores acreditam que Euclides teve a intenção de afastar a noção de movimento da Geometria, quando colocou como um dos postulados o conceito de congruência. Diante disto, coloca-se outra questão: por que Euclides não fez considerações análogas às de ângulo reto para a congruência de segmentos?

Nenhuma das hipóteses citadas acima consegue explicar a existência do quarto postulado. Uma justificativa, que não convence totalmente, seria que tal postulado pretende assegurar o prolongamento de um segmento e que este está univocamente determinado (ZEUTHEN apud KLEIN, 1931, p. 264). Mas não se pode deixar de considerar a possibilidade de interpretações distorcidas da obra original.

Os axiomas (BOYER, 1974, p. 77-78) apresentados em *Os Elementos* são:

> 1- Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
>
> 2 - Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.
>
> 3- Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
>
> 4- Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra.
>
> 5- O todo é maior que a parte.

Os axiomas 1, 2, 3 e 5 são de natureza lógica e válidas para todas as magnitudes geométricas como segmentos, ângulos, áreas, etc. O quarto axioma supõe a utilização da congruência ou da superposição para verificar a igualdade ou desigualdade de dois objetos, porém permanece a dúvida quanto a pressuposição ou não da noção de movimento. A noção de superposição é considerada por d'Alembert como uma das proposições fundamentais da geometria:

> Les propositions fondamentales (de la géomètrie) peuvent être réduites à deux: la mesure dês arcos angles par les arcs de cercle, et le príncipe de superposition. (D' ALEMBERT *apud* BKOUCHE, 1991, p. 137)[4].

O primeiro teorema de congruência é enunciado do seguinte modo: dados dois triângulos ABC e A'B'C', se dois lados do primeiro são iguais a dois lados do segundo (AB = A'B', AC = A'C') e o ângulo compreendido por eles é igual ao ângulo compreendido por estes (A = A'), então os dois triângulos têm respectivamente iguais todos os seus elementos. Este teorema é demonstrado imaginando-se o triângulo ABC colocado sobre o triângulo A'B'C', de modo que A'B' coincida com AB, A'C' coincida com AC, e o ângulo A' com o ângulo A. Fica claro nesta exposição que Euclides utiliza a noção de superposição (axioma 4) para comprovar o teorema. Mas é igualmente óbvio que este procedimento não condiz com o objetivo de seu trabalho que é imprimir à Geometria um aspecto lógico-dedutivo, uma vez que ele não mencionou nada a respeito de transporte de ângulo e a razão pela qual o terceiro lado continua sendo uma reta após o transporte.

Klein afirma que Euclides supunha implicitamente a possibilidade de movimento das figuras, sem alteração de suas medidas e forma, o que o primeiro chama de postulado do movimento em sua primeira tentativa de fundamentar a Geometria. Esta suposição é compartilhada por Bkouche (1991), pois este afirma que o axioma euclidiano relaciona as noções, que ele considera empíricas, de movimento de corpo sólido, sendo as propriedades destes invariantes com o movimento. Klein argumenta que a demonstração do primeiro teorema de congruência leva-nos a aceitar que Euclides considerava legítima a idéia de movimento, mas é estranho que este não o tenha mencionado em *Os Elementos*:

> Esta demostración parece indicar que puede incluírse a Euclides entre los que aceptam como legítima la idea de movimiento; sin embargo, es de extrañar que no la haya mencionado en los fundamentos. Además, en caso de aceptar dicha idea, las artificiosas construcciones 2ª e 3ª careceriam en absoluto de objeto ya que com la noción de movimiento son inmediatas. (KLEIN, 1931, p. 268)[5].

A segunda e a terceira construções citadas acima referem - se à construção de um triângulo eqüilátero sobre um segmento e a construção de um segmento, a partir de um ponto C que seja igual a um segmento dado AB, nas quais Euclides admite a interseção de circunferências, de circunferências e retas e de retas, sem haver mencionado nada a respeito. Para garantir a existência desses pontos de intersecção, seria necessário algo como um postulado da continuidade, o que foi dado posteriormente por R. Dedekind[6] (1831-1916).

O século XIX foi marcado pelo retorno ao rigor matemático das demonstrações, motivado pela busca de uma fundamentação sólida para a Matemática. Tal fato se explica pela perda de referência de rigor, que era a Geometria, quando são desenvolvidas as geometrias não euclidianas. Neste contexto, as falhas lógicas na obra de Euclides foram supridas e, no final do século XIX e começo do século XX, quando os fundamentos da Geometria receberam um estudo detalhado e intensivo, surgem conjuntos de postulados logicamente satisfatórios capazes de embasar a Geometria Euclidiana plana e espacial (EVES, 1995, p. 657). Em1899, David Hilbert (1862-1943) publica *Grundlagem der Geometrie*, que ele inicia com três objetos não definidos – ponto, reta e plano – e seis relações não definidas – estar sobre, estar em, estar entre, ser congruente, ser paralelo e ser contínuo-; substituiu os cinco axiomas de *Os Elementos* e cinco postulados por vinte e um postulados, conhecidos como axiomas de Hilbert, dos quais, oito referem-se à incidência e incluem o primeiro postulado de Euclides, quatro dizem respeito às propriedades de ordem, cinco são sobre congruência, três sobre continuidade (que não é abordado explicitamente em *Os Elementos*) e um é um postulado de paralelas equivalente ao quinto postulado de Euclides. Deste modo, o caráter dedutivo e formal, que já atingira outras áreas da Matemática, caracterizava, agora, também a Geometria (BOYER, 1974).

Pode-se concluir que a noção de movimento parece estar implícita em *Os Elementos*, e que Euclides, ao considerá-la por demais intuitiva, sequer fez menção a sua existência. Considerar esse pressuposto contribui para que compreendamos melhor o postulado da congruência e todas as proposições que utilizam a superposição em suas demonstrações.

3. OUTRAS GEOMETRIAS

Após Euclides, a Geometria desenvolveu-se, principalmente, com os geômetras gregos Arquimedes (287-212 a. C.) e Apolônio (262-190 a. C.). As obras de Arquimedes, primavam pelo rigor, clareza na linguagem e habilidades computacionais que se revelavam em trabalhos originais, dentre os quais destaca-se *Sobre a esfera e o cilindro*, que contém um dos cinco postulados geométricos assumidos no início do trabalho, conhecido como axioma de Arquimedes, cujo enunciado é: *Dados dois segmentos de reta não iguais, há sempre algum múltiplo do menor que supera o maior.* Não foi encontrado registro nas obras consultadas sobre a forma de comparação destes segmentos, pode-se supor que Arquimedes adotasse as mesmas noções intuitivas de superposição de Euclides. Outros trabalhos de Arquimedes foram *A medida de um Círculo, A quadratura da parábola e Sobre as espirais*, que tratam de Geometria plana; e *Sobre os cones e os esferóides*, que juntamente com *Sobre a esfera e o cilindro*, tratam de Geometria Espacial.

Apolônio, astrônomo notável, é conhecido pelo seu trabalho sobre cônicas, intitulado *Secções Cônicas*. Esta obra é um estudo exaustivo dessas curvas que supera os anteriores. Também se credita a ele os nomes *elipse, parábola* e *hipérbole.* Sua morte encerra a época de ouro da Geometria Grega (EVES, 1992), o que se seguiu foram poucos acréscimos e a conservação do conhecimento geométrico.

A queda dos impérios grego e romano, em períodos distintos e a ascensão do império árabe, provocou um hiato no desenvolvimento da Geometria. Esta só foi retomada no final de século XI; no XV, o interesse pelas obras clássicas fez surgir a busca por informações nas obras originais. Como conseqüência ocorre a tradução, em 1533, do *Comentário sobre Euclides*, *Livro I,* de Proclus, consistindo num estímulo imediato ao desenvolvimento da Geometria (EVES, 1992). A partir daí, outras traduções de obras gregas chamaram a atenção da comunidade matemática para a Geometria.

A Geometria Projetiva nasceu como fruto do interesse de muitos artistas do século XV, época do Renascimento, em criar quadros mais realistas. Gérard Desargues (1591-1662) liderou um grupo de matemáticos franceses no aprofundamento de uma teoria geométrica subjacente à perspectiva, publicando em Paris, em 1639, um trabalho original sobre secções cônicas que continha a idéia de projeção. Este trabalho foi obscurecido pela linguagem excêntrica utilizada por Desargues, sendo redescoberto por Michel Chasles (1793-1880). Gaspard Monge (1746-1818) e Lazare Carnot (1753-1823) que iniciaram o estudo da Geometria Projetiva, mas foi Jean Victor Poncelet (1788-1867) quem a desenvolveu de modo aprofundado. Sua grande obra sobre este tema foi *Traité des Propiétés Projectives des Figures*, redigida sem que ele tivesse nenhum livro em mãos, quando era prisioneiro de guerra dos russos, por ocasião da fuga de Napoleão de Moscou. Este trabalho foi publicado em 1822. Dois instrumentos matemáticos foram utilizados por Poncelet no desenvolvimento da Geometria Projetiva. São eles o princípio da dualidade e o princípio da continuidade[7]. O geômetra suíço Jacob Steiner (1796-1863) desenvolveu muitas idéias de Poncelet, sendo considerado um grande talento da Geometria Sintética. Ao lado dele se colocam Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868), Michel Chasles e Julius Plücker (1801-1868) que desenvolveram o lado analítico da Geometria Projetiva. É importante ressaltar que a adoção de uma definição projetiva conveniente de métrica permite estudar a Geometria Métrica no contexto de Geometria Projetiva e, também, pelo acréscimo de uma cônica invariante a uma Geometria Projetiva no plano, podem-se obter as Geometrias não-Euclidianas Clássicas; e que, com graduais acréscimos e alterações de postulado (possíveis após tratamentos postulacionais), pode-se passar da Geometria Projetiva à Geometria Euclidiana, encontrando-se muitas outras Geometrias importantes no caminho (EVES, 1995, p. 594). Estas abordagens e possibilidades viriam a ser sistematizadas por Félix Klein em 1872.

As Geometrias não-Euclidianas desenvolveram-se de forma independente das anteriores e entre si. É sabido que a desconfiança de que o quinto postulado[8] de Euclides não era convincente e suficientemente claro como os quatro anteriores, gerou tentativas de comprovar sua dependência destes. Nicolai Lobachevsky (1793-1856) foi um dos primeiros a tornar público seu trabalho sobre a geometria não-euclidiana. Em 1826, Lobachevsky apresentou muitos teoremas característicos deste novo tema e, em 1829, publicou o artigo *On the Principles of Geometry,* que é considerado oficialmente o nascimento da geometria não-euclidiana. Ao húngaro Janos Bolyai ocorreu a mesma idéia de Lobachevsky, chegando a conclusão idêntica. A geometria não-euclidiana viveu à margem dos interesses da comunidade matemática por várias décadas, até que G. F. B. Riemann (1826-1866) imprimiu a esta nova geometria idéias novas. Ele propunha uma visão global da geometria como um estudo de variedades de qualquer número de dimensões em qualquer tipo de espaço, suas geometrias eram não-euclidianas num sentido mais amplo do que a de Lobachevsky, pois sequer deveria tratar de pontos ou retas ou do espaço no sentido ordinário, mas de conjuntos de n-uplas que são combinadas segundo certas regras (BOYER, 1974, p. 398). Entre estas regras, uma das mais importantes é a que permite encontrar a distância (métrica) entre dois pontos que estão infinitesimalmente próximos um do outro. De acordo com a métrica escolhida, poder-se-ia ter outras geometrias. Riemann mostrou que a geometria não-euclidiana com soma dos ângulos maior que dois retos ocorre sobre a superfície de uma esfera[9], já Lobachevsky e Bolyai mostraram ser possível uma geometria na qual a soma dos ângulos é menor que dois retos. Em 1871, estas geometrias – de Bolyai e Lobachevsky, de Euclides e de Riemann – foram nomeadas por Klein de *geometria hiperbólica, geometria parabólica* e *geometria elíptica*, respectivamente.

A Geometria Analítica nasceu nas mãos de René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665), e foi desenvolvida com o auxílio do simbolismo algébrico para assumir a forma como é conhecida hoje. Existem divergências quanto ao início da Geometria Analítica e isto está relacionado ao que se considera como sendo geometria analítica[10]. Descartes menciona a geometria analítica sólida, mas nunca a elaborou. Contribuições concretas foram dadas por Antoine Parent (1666-1716), Alexix C. Clairaut (1713-1765) e Leonhard Euler (1707-1783). Jacques Bernoulli (1654-1705) escreveu sobre coordenadas polares e Julius Plücker (1801-1868) desenvolveu um interessante sistemas de coordenadas, no qual o elemento fundamental não era necessariamente um ponto, podendo ser qualquer entidade geométrica.

Ao recordar o desenvolvimento da geometria, observamos a tendência desta disciplina em desligar-se de qualquer experiência física e, com o aparato matemático moderno, novas geometrias podem ser criadas. O avanço foi tal que a geometria pode ser considerada como um modo de raciocinar (EVES, 1992, p. 28).

Dentro do contexto das geometrias pós-Euclides, não foi encontrada nas obras de referência deste trabalho, nenhuma menção explícita ao movimento ou ao deslocamento de elementos geométricos em qualquer espaço, tampouco a natureza destes movimentos, embora esta noção esteja implícita em todas as proposições sobre os fundamentos de Geometria. Pode-se afirmar que a superposição, afirmação tácita contida em *Os Elementos*, não gerou inconveniências aos geômetras que se seguiram, pois estes pareciam mais preocupados com a generalização e os métodos da Geometria.

4. A GEOMETRIA DE KLEIN

O matemático alemão Félix Christian Klein (1849-1925) estabeleceu conexões entre a teoria dos grupos e a Geometria, possibilitando uma nova organização das diferentes geometrias que surgiram durante o século XIX. As características de um conjunto de figuras que permaneçam invariantes por T, onde T é um grupo de transformações, constituem uma classe de propriedades características do grupo, denominada por Klein de "uma geometria":

> Assim, por exemplo, o grupo de transformações pontuais que preservam distâncias, paralelismo e alinhamento é o grupo de que trata a chamada geometria métrica euclidiana: o grupo de transformações que só preservam os últimos atributos, caracteriza a geometria afim; o grupo de transformações pelas quais só se preservam alinhamentos e razão dupla[11] constitui a geometria projetiva, etc. (PINHEIRO, 1986, p. 18).

Esta classificação das propriedades invariantes das transformações constitui a proposta de Klein, estabelecida em seu trabalho denominado *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (Considerações Comparativas sobre Recentes Investigações Geométricas)*, que ficou conhecido como o famoso Programa de Erlanger, em 1872, quando Klein assumiu o cargo de professor titular da Faculdade de Filosofia da Universidade de Erlangen, tornando-o público em sua palestra de apresentação. Este trabalho, baseado em pesquisa desenvolvida por ele e Sophus Lie (1842-1899) em teorias do grupo, conclui com a definição de geometria dada por Klein: *uma geometria é o estudo das propriedades de um conjunto S que permanecem invariantes quando se submetem os elementos de S às transformações de algum grupo de transformações T* (EVES, 1995, p. 606).

A fim de melhor compreender a definição de Klein, consideremos o conjunto P de todos os pontos do plano euclidiano e o conjunto T de todas as transformações de P incluindo as rotações, as translações e as reflexões em torno de retas. Como o produto de quaisquer duas dessas transformações e a inversa de cada uma delas sempre estão em T, podemos afirmar que T é um grupo de transformações. Escrevendo G (P, T), utilizando a notação algébrica, temos uma geometria em que os elementos são os pontos de P e as operações que se podem fazer com estes pontos são as transformações T. Quando as transformações que compõem o conjunto T são as citadas acima, temos a Geometria Métrica Euclidiana Plana. Mas podemos modificar o conjunto de elementos de P, por exemplo, considerar retas ou circunferências no lugar de pontos; e o conjunto de transformações T, a cada combinação diferente temos uma outra geometria. Se os elementos de P são pontos, temos as Geometrias Pontuais. Um aspecto importante desta abordagem é que certas geometrias incluem outras. Assim, o grupo de transformações da geometria métrica euclidiana plana é um subgrupo de transformações da geometria de semelhança plana (que inclui a transformação homotética, além das translações, rotações e reflexões). Deste modo, observa-se um encadeamento das Geometrias.

Klein identifica dois problemas ao se tentar construir o edifício geométrico por meio de operações lógicas aplicadas a fundamentos mais elementares possíveis. O primeiro diz respeito à escolha dos fundamentos baseados em experiências simples de nossa intuição e o segundo, ao que pode ser deduzido logicamente daqueles conceitos fundamentais e axiomas, sem recorrer à intuição. Segundo Klein, um caminho para amenizar estes problemas é iniciar o estudo de geometria pelos conceitos fundamentais da geometria projetiva, o ponto, a reta e o plano e os axiomas de determinação, de ordem e de continuidade. Em sua concepção, este é o modo mais elementar teoricamente de fundamentar a Geometria:

> [...] porque comenzado por la geometría proyectiva basta operar com formas lineales y solamente para pasar a la mátrica se hace precisa una forma cuadrática, que es la curva esférica impropia (KLEIN, 1931, p. 215)[12].

Klein propõe a construção da Geometria Plana, baseada na noção de movimento. Os axiomas abstratos, que serão formulados, deverão expressar as propriedades destes movimentos, que serão utilizados, baseados na naturalidade da representação intuitiva que temos de movimento, relacionada à experiência com corpos perceptíveis rígidos. De acordo com esta afirmação, todo movimento pode ser considerado como uma transformação biunívoca dos pontos do espaço, onde cada ponto corresponde a outro ponto, e a cada reta corresponda também uma reta, o que nos remete à colinearidade.

No tópico seguinte, apresentaremos a noção de movimento desenvolvida ao longo da história e suas implicações para a fundamentação da Geometria Elementar.

5. O MOVIMENTO E A GEOMETRIA

A Geometria é a ciência que tem por objetivo de estudo as propriedades métricas dos objetos, ou ainda, das formas e medidas. Segundo Legendre (*apud* BKOUCHE, 1991, p.137), a Geometria é a ciência que tem por objeto a medida de extensões. Medir uma grandeza geométrica, tais como ângulos, áreas, comprimentos e volumes, significa compará-la com outra de mesma natureza tomada como unidade. Desta forma, a medida de uma grandeza geométrica é o número de vezes que a grandeza considerada como unidade cabe dentro da grandeza que está sendo medida. A comparação subentende a operação de superposição, seja para determinar a igualdade de dois objetos geométricos, seja para saber quantas vezes um contém o outro. Isto nos remete ao axioma 4 de *Os Elementos* de Euclides, já enunciado no tópico II.

A noção de superposição parece ser um fundamento empírico da Geometria e sobre isto supõe-se não haver discordância. A questão se coloca ao construir o corpo racional desta ciência, quando se faz necessário enunciar os critérios de igualdade sem recorrer à superposição efetiva, isto é, evitando-se a referência ao movimento. Mas a superposição tal como os geômetras utilizaram não é um movimento puramente mecânico. A este respeito, citamos d'Alembert:

> Ce dernier príncipe n'est point, comme l'ont prétendu plusieurs Géomètres, un méthode de démontrer peu exacte et purament mécanique. La superposition, telle que les Mathématiciens la conçoivent, ne consiste pas à appliquer grossièrement, une figure sur une autre, pour juger par les yeux de leur égalité ou de leur différence, comme l'on applique une aune sur une pièce de toile pour la mesurer; elle consiste à imaginer une figure transportée sur une autre et à conclure de l'égalité supposée de certaines parties des deux figures, la coïncidence ces parties entr'elles, et de leur coïncidence du reste; d'où résulte l'égalité et la similitude parfaite des figures entières. Cette manière de démontrer a done l'avantage, non seulement de rendre lês vérités palpables, mais d'être encore la plus rigoureuse et la plus simple qu'il est possible, en un mot de satisfaire l'esprit em parlant aux yeux. (D' ALEMBERT apud BKOUCHE, p. 138)[13].

O movimento que leva uma figura a coincidir com outra por superposição difere de deslocamento, no sentido físico deste termo. Deslocamento é a mudança de posição de um corpo sólido, no decorrer do tempo, podendo decompor-se em vários movimentos. A noção de movimento em Geometria diz respeito à posição final e à posição inicial de um objeto, não levando em consideração a passagem do tempo, e, sim, a trajetória descrita durante este movimento. Sobre a distinção entre movimento e deslocamento:

> La Cinématique a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces; la Géomètrie cinématique a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces et du temps, c'est-à-dire qu'elle a pour objet l'étude des déplacements. Nous réservons l'expression de déplacement pour um mouviment dans lequel on ne considère pas la vitesse. (MANNHEIN *apud* BKOUCHE, 1999, p. 151)[14].

O movimento, como o concebemos na vida diária, é utilizado nos estudos iniciais de Geometria, mas, com o aprofundamento, esta noção assume outro aspecto, ou seja, o movimento geométrico não é o movimento físico. Com relação ao ensino de Geometria, Bkouche afirma que esta idéia deve ser introduzida o quanto antes, pois isto trará clareza e precisão aos conceitos geométricos estudados.

Charles Méray (1835-1911) já propusera em seu livro, *Éléments de Géométrie* (1903), o ensino de Geometria pelas transformações geométricas, baseando-se na noção de movimento geométrico para propor o ensino de Geometria elementar a partir do movimento de translação e de rotação. No capítulo 1, Méray expõe sobre o que considera abstrações fundamentais para o estudo da Geometria. Entre outras afirmações, ele diferencia estados de movimento e de repouso como estados especiais que se excluem um ao outro num mesmo corpo, e que são igualmente indefiníveis. Ele afirma que um corpo está em repouso quando a sua posição no espaço não se modifica, e que está em movimento quando ocupa sucessivamente posições diferentes (MÉRAY,1903, p. 2). Mas também informa sobre o caráter efêmero destas definições, e que elas não acrescentam nada ao que se pode apreender da mais simples contemplação dos fenômenos naturais.

Méray escreve sobre o caráter invariante das propriedades geométricas de um corpo sólido quanto este é submetido a um movimento qualquer no espaço, durante e após este, dizendo que este caráter é uma abstração matemática, pois qualquer esforço físico traria deformação a um corpo sólido natural. Tal deformação também não deve ser considerada quando dois corpos sólidos penetram-se mutuamente, o que ele chama de penetrabilidade perfeita dos corpos. Para Méray, "duas figuras sólidas coincidem, quando são levadas uma a outra, de modo que suas individualidades geométricas são indiscerníveis, de outra forma que não apenas pelo pensamento". Neste trecho, pode-se inferir que Méray considera que a congruência de duas figuras, no sentido euclidiano do termo, comprova-se pela coincidência de todas as propriedades geométricas destas figuras, quando superpostas, e que é preciso recorrer a movimentos reais para abstrair o significado da superposição.

Temos aqui um limiar entre o movimento geométrico e o movimento cinemático. Para compreender o primeiro é necessário passar pelo segundo, ou seja, a abstração do movimento cinemático, que é o movimento geométrico, necessita de experiências físicas para que ocorra tal abstração. Não se descarta a experiência física, mas não se pode deter nela, sob pena de transformar a Geometria num conjunto de intuições geométricas sem fundamentação científica.

Méray apresenta, entre outros, os seguintes enunciados envolvendo paralelismo e perpendicularidade de retas e de planos:

> Dans son essence générale, le parallélisme de deux droites, ou dune droite et dun plan, ou de deux plans, est une position relative des plus remarquables, consistant en ce que, dans chaque cas, l'une des figures considérées peut être apliquée sur lautre par quelques translation choisie convenablement; on dit alors que les deux figures sont paralléles.
> [...]
> Quand une droite et un plan ont un point commun et que l'un peut être appliqué sur l'autre une translation [c'est-à-dire quand ils sont parallèles], la droite est située tout entière dans le plan. (MÉRAY, 1903, p. 22)[15].

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos, ao longo deste trabalho, que a questão da natureza do movimento geométrico foi discutida por muitos matemáticos, mas nenhuma conclusão pode ser alcançada, apesar de várias suposições terem sido levantadas.

Faz-se importante trazer para a discussão a questão do movimento geométrico, para que seu verdadeiro significado não fique obscurecido pelo entusiasmo provocado pelos recursos computacionais. Não podemos permitir que as limitações técnicas subjacentes a um software de Desenho Geométrico e Geometria ofusque a correta fundamentação da Geometria, nem tampouco que o ensino seja prejudicado com a confusão de significados que o termo movimento possa trazer para o aluno.

Sobre as orientações para o ensino de Geometria a respeito da consideração do movimento, citamos Bourlet:

> Um appel constant à la notion de mouvement semble devoir faciliter l'enseignement de la gémétrie; c'est ainsi que le parallélisme sera lié à la notion expérimentale de translation, que l'étude des droites et plans perpendiculaires résultera de la rotation; l'idée d'égalité sera liée à celle du transport des figures, que l'on précisera en introduisant la notion simple d'orientation. (BOURLET *apud* BKOUCHE, 1991, p. 153)[16].

Estas orientações foram extraídas das *Instructions pour l'enseignement de la Géometrie*, que acompanha os programas franceses do primeiro ciclo de 1905. A seguir, apresentam-se considerações a respeito do movimento geométrico e o ensino de Geometria de Houel:

> C'est par suíte d´une confusion d'idées que plusieurs géomètres veulent bannir des éléments de géométrie la considération du mouvement.
> L'idée du mouvement, abstraction faite du temps employé à l'accomplir, c'est-à dire l'idée du mouvement géométrique, n'est pas une idée plus complexe que celle de grandeur ou d'étendue.
> On peut même dire, em toute rigueur, que cette idée est identifique avec celle de grandeur, puisque c'est précisément par le mouvement que nous parvenons à l'idée de grandeur.
> Ce mouvement géométrique, qu'une equivoque de language a fait confondre avec le mouvement dans le temps, objet de la cinématique, ne peut pas, dépendre d'une autre science que la géométrie pure.
> Il est avantageux d'introduire cette idée de mouvement géométrique le plus tôt et le plus explicitement possible.
> On y gagne beaucoup sous le rapport de la clarté et de la précision du language, et l'on se trouve mieux préparé à introduire plus tard dans le mouvement les notion de temps et de vitesse.
> C'est d'ailleurs ce que tous les auteurs font à leur insu; et il serait difficile de trouver une seule démonstration d'une proposition fondamentale de la géométrie, dans

laquelle n'entre pas l'idée de mouvement géométrique, plus ou moins déguisée. (HOUEL *apud* BKOUCHE, 1991, p. 152).

***

Movement in Geometry: abstraction or reality?

Mônica Souto da Silva Dias

This article reflects upon the presence of movement in the development of Geometry as well as the didactic implications of the relation between Geometry and movement in the teaching of this subject. As a basis for this study, a brief historical review is given in order to provide the reader a context of the theme.

KEY WORDS: *Teaching. Learning. Movement. Geometry.*

REFERÊNCIAS

BELTRÃO, Maria Eli. Félix Klein, sua trajetória e concepções a respeito do ensino de Matemática. **Anais do IV Seminário Nacional de História da Matemática**. Rio Claro: SBHMat, 2001.

BKOUCHE, Rudolf. **De la geometrie et des transformations**. Repères Irem n. 4, julho, 1991.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Trad. Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRAVIANO, Gilson; RODRIGUES, Maria Helena W. L. Geometria dinâmica: uma nova geometria? **Revista do Professor de Matemática**, n. 49, São Paulo: SBM, 2002, p.22-26.

CATALÁ, Claudi Alsina; GÓMEZ, Rafael Pérez; GARRIDO, Ceferino Ruiz. **Simetria Dinâmica**. Madrid: Editorial Sintesis, 1989.

COUTINHO, Lázaro. **Convite às geometrias não-euclidianas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

EVES, Howard. **História da geometria**. Trad. Hygino H. Domingues. V. 3. São Paulo: Atual, 1992.

________. **Introdução à História da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 1995.

EUCLIDES. **Livro I dos Elementos**. Disponível em: http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/1parte.html. Acesso em: 27 jul. 2004.

JAHN, Ana Paula. **Des Transformations des figures aux transformations ponctuelles: étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre**. Tese de doutorado. Universidade de Joseph Fourier. Grenoble, França, 1998.

KLEIN, Félix. **Matemática Elemental desde um punto de vista superior**. Trad. R. Fontanilla. Madrid: Biblioteca Matemática, v. 2, 1931.

LOPES, Maria Laura; NASSER, Lílian. **Geometria na era da imagem e do movimento**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.

MÉRAY, Charles. *Éléments de Géométrie*. Dijon, França: P. Jobard, Imprimeur-Éditeur, 1903.

PINHEIRO, Vírgílio Athayde. *Geometrografia*. Rio de Janeiro: Aula Editora, 1986.

POGORELOV, A. *Geometry*. URSS: Mir Publishers, 1987.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. *Parâmetros curriculares nacionais - Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

NOTAS

[1] O termo "Dynamic Geometry" é marca registrada da Key Curriculum Press, empresa responsável pela comercialização do software de geometria dinâmica denominado Geometer's Sketchpad.

[2] "Félix Klein se deu conta de que existia um objeto matemático, o grupo, que possibilita uma nova organização de todas estas situações, ao caracterizar de forma cômoda as diferentes geometrias elaboradas durante o século XIX. Ele criou, com o *grupo das transformações*, a idéia de que uma geometria é o estudo dos invariantes de um certo grupo de transformações. *A geometria seria então o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes com respeito a um grupo específico de transformações*. A geometria não é estática como no tempo de Euclides, é dinâmica." (tradução da autora).

[3] Há evidências que Euclides considera axioma e postulado como termos distintos, a saber, axioma é uma suposição comum a todas as ciências ao passo que um postulado é uma suposição peculiar a uma ciência particular em estudo (EVES, 1995, p.179).

[4] "As proposições fundamentais (da Geometria) podem ser reduzidas a duas: a medida dos ângulos pelos do círculo, e o princípio de superposição." (tradução da autora).

[5] "Esta demonstração parece indicar que se pode incluir Euclides entre aqueles que aceitam como legítima a idéia de movimento. Contudo, é de estranhar que não tenha mencionado em seus fundamentos. Além disso, em caso de aceitar esta idéia, as artificiosas construções 2º e 3º careceriam em absoluto de objeto que, com a noção de movimento, são imediatas." (tradução da autora).

[6] Com o objetivo de garantir a existência de determinados pontos de intersecção de reta e circunferência, Richard Dedekind enunciou o seguinte postulado de continuidade: *"Se os pontos de uma reta se dividem em duas classes tais que todos os pontos da primeira estão à esquerda de todos os pontos da segunda, então existe um, e um só, ponto que realiza essa divisão de todos os pontos em duas classes, isto é, que separa a reta em duas partes."* (DEDEKIND *apud* EVES, 1995, p. 698).

[7] O princípio da dualidade (também estabelecido em outros ramos da Matemática), em Geometria, diz respeito a teoremas que se mantêm (em Geometria Plana) quando as palavras ponto e reta são permutadas. Princípio da continuidade da Geometria (assim denominado por Poncelet) é um método de raciocínio, pelo qual, da demonstração de um teorema para uma situação real, obtém-se o teorema para uma situação imaginária.

[8] John Playfair (1748-1819) é o responsável por tornar conhecido o enunciado do postulado das paralelas tal como utilizamos hoje: *Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta.*

[9] Este modelo baseia-se na hipótese de Girolano Saccheri (1667-1733) do ângulo obtuso e desconsidera a infinitude da reta.

[10] Para maior aprofundamento, ver EVES, Howard. Trad. H. Domingues. Tópicos da História da

Matemática para uso em sala de aula. V. 3. São Paulo: Atual, 1992.

[11] Razão dupla ou anarmônica (AB, CD) de quatro pontos colineares A, B, C, D como (AC/CB)/(AD/DB) que é como a razão das razões em que C e D dividem o segmento AB.

[12] "[...] porque começando pela geometria projetiva basta operar com formas lineares e somente para introduzir a métrica se faz necessária uma forma quadrática, que é a curva esférica imprópria." (tradução da autora).

[13] "Este último princípio não é, como pretenderam vários geômetras, um método de demonstrar pouco exato e puramente mecânico. A superposição, tal como os matemáticos a conceberam, não consiste em aplicar grosseiramente, uma figura sobre uma outra, para julgar sobre a sua igualdade ou sobre sua diferença, como se aplica uma vara sobre um pedaço de tecido para medi-lo, ele consiste em imaginar uma figura transportada sobre uma outra e a conclusão de sua igualdade suposta de certas partes das duas figuras, a coincidência destas partes entre elas, e da coincidência do resto; de onde resulta a congruência perfeita das figuras inteiras. Tal maneira de demonstrar tem uma vantagem, não somente mostrar as verdades palpáveis, mas de ser o mais rigoroso e o mais simples possível, trata-se de satisfazer o espírito falando aos olhos." (tradução da autora).

[14] "A Cinemática tem por objeto de estudo o movimento independente das forças; a Geometria Cinemática tem por objeto de estudo o movimento independente das forças e do tempo, isto é, ela tem por objeto de estudo os deslocamentos. Nós reservamos a expressão deslocamento para um movimento no qual não se considera a velocidade." (tradução da autora).

[15] "De modo geral, o paralelismo de duas retas, ou de uma reta e de um plano, ou de dois planos, é uma posição relativa bastante notável, consistindo em , cada caso, uma figura considerada pode ser aplicada sobre outra por alguma translação convenientemente escolhida; diz-se então que as duas figuras são paralelas. [...]

Quando uma reta e um plano têm um ponto em comum e que um pode ser aplicado sobre o outro por uma translação [isto é quando eles são paralelos], a reta está contida no plano." (tradução da autora).

[16] "Um apelo constante à noção de movimento parece facilitar o ensino de Geometria; é assim que o paralelismo estará ligado à noção experimental de translação, que o estudo das retas e planos perpendiculares resultará da rotação; a idéia de igualdade estará relacionada com idéia do transporte das figuras, que se tornará preciso introduzindo a noção simples de orientação." (tradução da autora).