Heurística GRASP para o problema de p-medianas aplicado à localização de concentradores

GRASP heuristic for p-median problem applied to the location of concentrators

Tiago de Azevedo Santos *
Dalessandro Soares Vianna **
Marcilene de Fátima Dianin Vianna ***

Várias situações práticas reais, tais como localizações de depósitos, hospitais e dispositivos de telecomu-nicações (concentradores, torres de celulares, etc), podem ser vistas como um problema de *p*-medianas. Este trabalho apresenta uma proposta para a solução do problema de *p*-medianas baseado no *backbone* da rede de computadores que será instalado no Instituto Federal Fluminense (IFF). Esse tipo de ocorrência é conhecida na literatura como problema de localização de concentradores. Para resolver a questão citada foi proposta uma heurística GRASP. Testes computacionais realizados, mostram que a heurística elaborada neste trabalho atingiu resultados satisfatórios.

Palavras-Chave: *p*-mediana. Otimização combinatória. GRASP. Heurística.

Several real practical situations, such as location of depots, hospitals and telecommunications devices (hubs, cellular towers, etc.), can be seen as a p-median problem. This paper presents a proposal for solving the p-median problem based on the backbone network of computers that will be installed at the Federal Fluminense Institute (IFF). This type of problem is known in literature as a problem of locating concentrators. To solve the problem cited was proposed a GRASP heuristic. Computational tests performed show that the heuristic developed in this work has reached satisfactory results.

Key words: p-median. Combinatory optimization. GRASP. Heuristic

Introdução

Os problemas de localização podem ser classificados em problemas de cobertura e problemas de localização de medianas. Em ambos, decisões são tomadas sobre onde localizar facilidades, considerando clientes que devem ser servidos, de forma a otimizar um certo critério. O termo "facilidades" pode ser usado para designar fábricas, postos de saúde, escolas, pontos de ônibus, concentradores em redes de computadores, etc., enquanto os "clientes" se referem a estudantes, depósitos, usuários, funcionários, computadores, etc. Em geral, as facilidades podem tanto ser selecionadas como centros a serem localizados, como podem também ser alocadas ao subconjunto de outros centros

* Pós-graduado em Produção e Sistemas - IFF
** Doutor em Informática (PUC-Rio). Professor Adjunto da Universidade Federal Fluminense – UFF
*** Mestre em Matemática (PUC-Rio). Professora Assistente da Universidade Federal Fluminense – UFF

abertos. Por isso esses problemas também são conhecidos como problemas de alocação ou problemas de localização.

Os problemas de localização, em geral, são de natureza combinatória, pois consistem em selecionar, de um conjunto finito de dados, o melhor subconjunto que satisfaça determinados critérios. Muitos problemas de otimização combinatória são considerados altamente complexos e de custo elevado do ponto de vista computacional. Em geral, utilizam-se métodos heurísticos para obter uma solução satisfatória para este problema (DRUMMOND et al., 2001; RIBEIRO; VIANNA, 2009).

A aplicação de métodos heurísticos para os problemas de localização de facilidades tem recebido uma considerável atenção por muitos pesquisadores. Dentre tais abordagens destaca-se o emprego de heurísticas baseadas em: GRASP (RESENDE; WERNECK, 2002b; MARQUES et al., 2007), *simulated annealing* (CHIYOSHI; GALVÃO, 2000), algoritmos genéticos (HOSAGE; GOODCHILD, 1986; ERKUT et al., 1997), busca tabu (ROLLAND et al., 1996; VOSS, 1996) e VNS (HANSEN et al., 2001).

Problemas de localização de concentradores ocorrem em grande frequência nos diversos segmentos das telecomunicações, desde uma simples rede local até instalações de *backbones* que interligam cidades ou estados. A correta alocação de equipamentos é considerada de vital importância para o atendimento eficiente dos clientes além de proporcionar uma considerável redução dos custos para as empresas que oferecem serviços.

Dentro da arquitetura hierárquica em que são concebidas as redes de computadores, independente do tipo de topologia, o estudo de localização de facilidades de transmissão, assim como o modo de se alocar os usuários a esses dispositivos, é um problema muito importante no planejamento de redes, pois representa a maior parte do custo total de uma rede.

Neste artigo é proposta uma solução, a partir da implementação de uma heurística GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*) para o problema de localização de concentradores que é tratado como um problema de localização de *p*-medianas capacitado, baseado no *backbone* da rede de computadores que será instalado no Instituto Federal Fluminense (IFF). Assim, o objetivo é minimizar a soma de todas as distâncias de cada ponto de demanda à facilidade mais próxima.

O presente trabalho está organizado na forma descrita a seguir. Na Seção 2 são apresentadas as características do problema de localização de facilidades aplicado a concentradores. A Seção 3 descreve a heurística GRASP proposta. Na Seção 4 são apresentados os testes computacionais e resultados obtidos. A Seção 5 apresenta as conclusões do presente trabalho. Por fim, são apresentadas as referências.

Definição do Problema de localização de facilidades aplicado a concentradores

O problema de localização de concentradores consiste em determinar pontos estratégicos onde serão alocados pontos de consolidação (concentradores), para atender, da melhor maneira possível, a um conjunto espacialmente distribuído de pontos de demanda, minimizando a soma dos custos que englobam custos de ligação desses pontos aos concentradores, e custos fixos de operação.

O trabalho de Goldman (1969) foi o primeiro a abordar o problema de localização de concentradores numa rede. Entretanto o primeiro a apresentar uma formulação matemática reconhecida para o problema foi o de O'Kelly (1987) que se referia ao problema de localização de concentradores adaptado às redes de transportes aéreos de passageiros. A Figura 1 mostra, para um melhor entendimento do problema, o modelo matemático proposto por O'Kelly.

$$Min \sum_i \sum_j W_{ij} \left(\sum_k X_{ik} C_{ik} + \sum_m X_{jm} C_{jm} + \alpha \sum_k \sum_m X_{ik} X_{jm} C_{km} \right) \tag{1}$$

$$S.\ a. \quad (n - p + 1) X_{kk} - \sum_i X_{ik} \geq 0 \quad \text{para todo } k, \tag{2}$$

$$\sum_k X_{ik} = 1 \quad \text{para todo } i, \tag{3}$$

$$\sum_k X_{kk} = p, \tag{4}$$

$$X_{ik} \in \{0,1\} \quad \text{para todo } i, k. \tag{5}$$

Figura 1 - Modelo Matemático Feito por O'Kelly (1987)

Dada a demanda de *N* nós, o fluxo entre origem e destino e o número necessário de concentradores (p), o objetivo é minimizar o custo total (tempo, distância, etc.), onde W_{ij} é o fluxo entre os nós i e j; C_{ij} é o custo por unidade de fluxo de i para j, e X_{ik} é uma variável de decisão tal que $X_{ik} = 1$ se o nó i é alocado ao concentrador localizado no nó k ($X_{ik} = 0$, caso contrário). Deve-se observar que se $X_{kk} = 1$, então o nó k é um concentrador; caso contrário, $X_{kk} = 0$. Nessa formulação, a função-objetivo em (1) estabelece o custo total a ser minimizado que corresponde à soma dos custos de coleta, transferência e distribuição de uma rede, em que o α utilizado no terceiro termo é o fator de escala de economia ($0 < \alpha < 1$). As restrições em (2) garantem que cada nó de demanda será alocado a um único concentrador. As restrições em (3) asseguram que as alocações serão feitas apenas para nós que são concentradores. As restrições em (4) garantem que existirão exatamente p concentradores alocados. As restrições em (5) correspondem às condições de integralidade das variáveis de decisão.

A formulação descrita no início desta seção não se aplica ao problema estudado neste trabalho. O problema de localização de concentradores aqui abordado será aplicado a uma rede de computadores, onde existe um concentrador central (*switch* central) e em que os outros concentradores (*switchs* de segundo nível) serão interligados. Esses *switchs* que estão no segundo nível da hierarquia terão, por sua vez, um conjunto de clientes conectados a eles, formando uma espécie de *cluster*. Além disso, entre um *cluster* e outro deverá haver ao menos uma conexão, a fim de aumentar a qualidade no serviço e garantir um caminho redundante na rede. Assim, se por ventura uma conexão entre o *switch* central e o *switch* de segundo nível de algum *cluster* se romper, essa conexão redundante fará com que haja continuidade total na operabilidade da rede. A conexão do *switch* central aos *switchs* de segundo nível tem um custo maior, pois essa ligação é feita por fibra ótica, enquanto a conexão dos *switchs* de segundo nível com os clientes é feita com cabo par trançado, que tem um custo relativamente baixo, tornando o custo dessa conexão menor. O número de concentradores é fixo. Todos os concentradores são iguais e apresentam a mesma capacidade, com exceção do concentrador central. Além disso, é importante deixar claro que os dados usados neste trabalho são referentes somente à conexão via fibra ótica, uma vez que os custos associados a este tipo de conexão são bem mais elevados. Uma vez definida a posição do *switch*, os outros nós do cluster são ligados a ele via cabo par trançado.

O *layout* da rede que será abordado pode ser representado pela Figura 2.

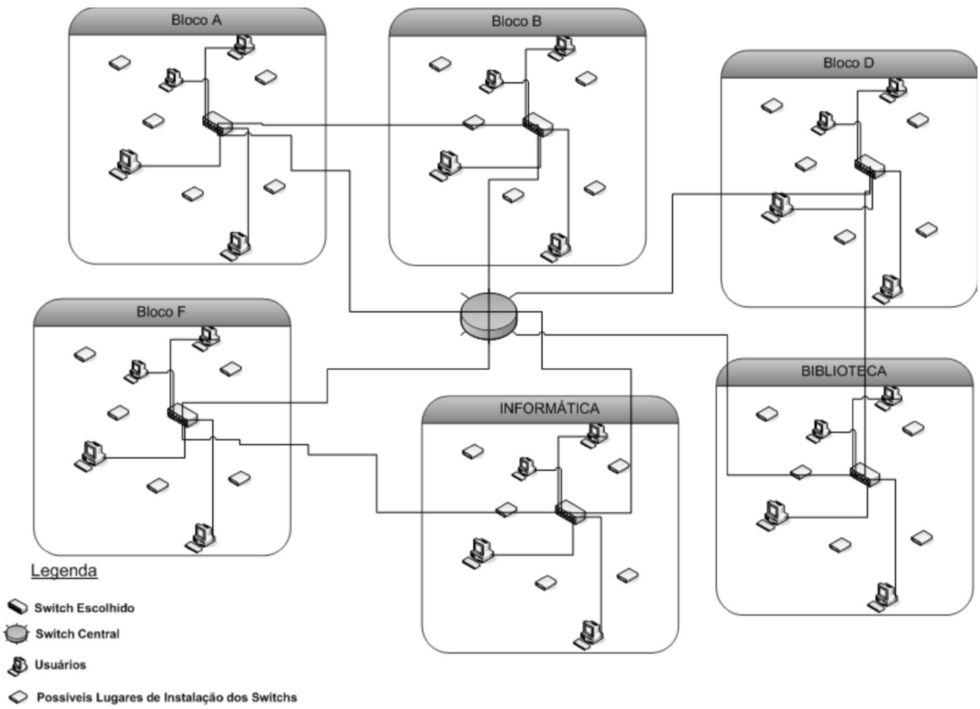

Figura 2 - *Layout* do *backbone* da rede que será instalado no IFF

No problema abordado, deseja-se minimizar a soma de todas as distâncias de cada ponto de demanda à facilidade mais próxima. Foi utilizada, neste trabalho, a distância euclidiana, ou seja, entre cada ponto de demanda *d* com coordenadas (x_d, y_d) e cada ponto *P* – coordenadas (x_p, y_p) – candidato à instalação de um *switch* é calculada a distância *Dist* por meio da fórmula $Dist = \sqrt{(x_p - x_d)^2 + (y_p - y_d)^2}$.

Heurística aplicada ao problema de localização de concentradores

A metaheurística GRASP – *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* – (FEO; RESENDE, 1995; RESENDE; RIBEIRO, 2003) é utilizada neste trabalho para resolver o problema abordado. Segundo Feo e Resende (1995), GRASP é uma heurística de múltiplas partidas, na qual cada iteração consiste de duas fases: construção e busca local. Na fase construtiva cria-se uma solução viável utilizando-se um algoritmo guloso aleatorizado, cuja vizinhança é explorada até um ótimo local ser encontrado na etapa de busca local. A melhor entre todas as soluções é retornada como resultado. A Figura 3 apresenta o pseudocódigo do algoritmo GRASP implementado no presente trabalho, o qual recebe como parâmetro de entrada o número *Num_iter* de iterações GRASP a serem executadas. Durante cada uma dessas iterações (laço entre as linhas 02 e 08), uma solução inicial é construída por um método guloso aleatorizado (linha 03), ao qual é refinada por um método de busca local na linha 04. Entre as linhas 05 e 07 é verificado se a solução encontrada é a melhor solução até o momento. Na linha 09 a melhor solução encontrada é retornada.

```
Procedimento GRASP ( Num_iter )
01 MelhorFinal ← ∞;
02 Para t ← 1 até Num_iter faça
03          SolucaoInicial ← ConstrutivoAleatorioGuloso;
04          MelhorSolucao ← AplicaBuscaLocal(SolucaoInicial);
05          Se MelhorSolucao < MelhorFinal então
06                   MelhorFinal ← MelhorSolucao;
07          fim-se;
08 fim-para;
09 Retorna MelhorFinal;
```

Figura 3 - Pseudocódigo da metaheurística GRASP implementada

É importante ressaltar que, no presente trabalho, foi adotado o número de iterações *Num_iter* = 100.

Fase de Construção

Uma solução do problema abordado é codificada como um vetor de *n* posições, em que *n* é o número de *clusters*. Em cada posição no vetor, é armazenado um valor inteiro, representando a posição do *switch* no *cluster*. A solução inicial é gerada definindo aleatoriamente o representante de cada *cluster*, ou seja, onde será localizado o *switch* em cada *cluster*. Cada *switch* será ligado ao *Switch* central. Em seguida, para resolver o problema da redundância entre os *clusters*, é aplicado a essa solução inicial um algoritmo de Árvore Geradora Mínima (AGM). O valor de avaliação da solução inicial (vetor inicial) é calculado por meio do somatório do custo de conexão de cada *switch,* em cada *cluster,* ao *Switch* Central com o custo de conexão entre os *clusters*, que é calculado por meio do algoritmo AGM.

É importante ressaltar que o algoritmo AGM utilizado no presente trabalho é o algoritmo de PRIM, que é um método guloso e muito utilizado em teoria de grafos e está descrito em Assunção et al. (2000).

Fase de Busca Local

Como é o caso de muitos métodos determinísticos, não há garantia de que a solução gerada pela fase de construção GRASP seja ótima, então quase sempre é útil empregar uma busca local para tentar melhorar cada solução construída. Enquanto tais procedimentos de otimização local podem requerer tempo exponencial, a partir de um ponto inicial arbitrário, empiricamente sua eficiência significativamente melhora quando a solução inicial melhora (RESENDE, 1998).

Em problemas de otimização, os métodos de busca local se resumem em um conjunto de técnicas baseadas em vizinhança, ou seja, os métodos passam de uma solução para outra de forma iterativa (movimento), percorrendo todo o espaço de pesquisa. Na fase de busca local, o vetor da solução inicial gerado na fase de construção é alterado, de modo que todos os movimentos dentro da vizinhança sejam usados.

Neste trabalho, um movimento é dado pela tupla $<i, k_1, k_2>$, a qual representa a troca, dentro de um *cluster* i, do *switch* que estava posicionado na posição k_1 para a posição k_2. A cada movimento realizado na solução corrente *s*, o algoritmo da árvore geradora mínima de PRIM é aplicado para cálculo do seu custo; se o custo dessa nova solução *s'* for menor do que o custo de *s*, *s* é atualizada com *s'*; caso contrário, o algoritmo passa para o próximo movimento. Essas iterações são feitas enquanto o critério de parada não for satisfeito, isto é, enquanto todos os possíveis movimentos dentro de cada *cluster* não forem testados.

A Figura 4 mostra o resultado da heurística GRASP implementada. Nela é apresentada a primeira solução inicial construída e também a melhor de todas as soluções encontradas durantes as iterações GRASP.

Testes Computacionais

Nesta seção são apresentados os testes computacionais da heurística GRASP proposta.

A heurística foi elaborada na linguagem *Object Pascal* do Delphi 7.0; o conjunto de dados foi armazenado em um banco de dados PostgreSQL 8.4 e os experimentos computacionais foram realizados em um *notebook Acer 4710 Pentium Dual Core* 2.2 Ghz com 2 GB de RAM.

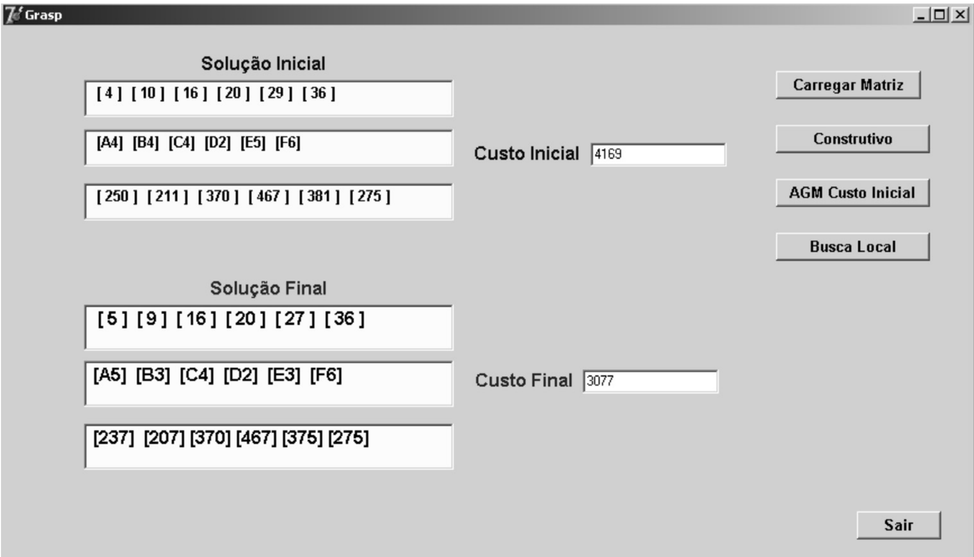

Figura 4 – Resultado da Heurística GRASP Implementada.

Geração dos Dados

Para testar a heurística GRASP implementada, um conjunto de testes foi gerado da seguinte maneira:

- uma instância teste (Teste 1) foi criada simulando a situação atual da instituição estudada. Foi gerado um conjunto de dados em forma de matriz 36x37, visto que o problema é formado por 6 *clusters*, e para cada um dos *clusters* existem 6 possíveis pontos para a alocação dos concentradores. Além disso, é incluída, nessa matriz, a distância de cada um dos possíveis pontos em todos os *clusters* até o nó central que é o *Switch* central, ou seja a matriz 36x36 são as distâncias entre os possíveis pontos e a 37ª coluna é a distância do possível ponto até o nó central;
- quatro outras instâncias (Testes 2, 3, 4 e 5) foram geradas, aleatoriamente, variando o número de *clusters* entre 20 e 60 e o número de possíveis pontos para alocação dos concentradores, variando entre 25 e 80.

É importante ressaltar que o cálculo dos custos referentes a cada ponto foi feito utilizando-se a seguinte função:

$$Valor = (Dist \times CFC) + CFI,$$

em que *Dist* é a distância medida do referido ponto até o nó central, *CFC* é o custo fixo da fibra ótica e *CFI* é o custo fixo de instalação. Como citado na Seção 2, *Dist* representa a distância euclidiana entre os pontos.

Apresentação dos Resultados

A heurística elaborada no presente trabalho foi executada em um total de 10 vezes para cada problema teste, variando a semente de geração de números aleatórios. Na Tabela 1 são apresentados os resultados, destacando-se nas duas primeiras colunas, respectivamente, o número *p* de medianas e o número *n* de pontos para alocação dos concentradores; na coluna seguinte é apresentado o custo médio da solução inicial obtida pelo método construtivo descrito na Subseção 3.1; e, na última coluna, o custo médio obtido pela heurística GRASP proposta. Os resultados encontrados demonstram um ganho médio de aproximadamente, 22,3% da solução final em relação à solução inicial resultante da fase de construção.

Tabela 1 - Resultados da heurística GRASP implementada

	p	*n*	Custo da Solução Inicial	Custo da Solução final
Teste 1	6	6	R$ 4.088,40	R$ 3.054,60
Teste 2	20	25	R$ 11.003,34	R$ 8.267,01
Teste 3	35	45	R$ 22.989,71	R$ 16.543,50
Teste 4	50	65	R$35.659,10	R$24.943,66
Teste 5	60	80	R$45.666,07	R$36.054,98
				~22,3 %

Conclusões

Neste trabalho foi proposta uma heurística, baseada na metaheurística GRASP, aplicada ao Problema de Localização de Concentradores, visando reduzir o custo total de implantação do *backbone* da rede de computadores.

O conjunto de dados usado foi realizado de maneira fictícia, entretanto para quaisquer valores que forem colocados no conjunto, a heurística irá tratá-los da mesma forma, ou seja, se forem trocados os dados do conjunto para dados reais, isso será indiferente para a heurística. É importante deixar claro que o cálculo realizado acima foi feito levando-se em conta apenas a conexão por uma fibra ótica, entretanto, na realidade do campo estudado, as fibras são utilizadas em par, bastando multiplicar o resultado da heurística pela quantidade de fibras que se deseja utilizar.

Pode-se notar que a heurística aplicada foi eficiente e melhorou, em todas as vezes em que foi executada, o resultado da solução inicial (média de aproximadamente 22,3%). É importante ressaltar que o tempo computacional gasto para executar a heurística não foi relevante nesse trabalho, pois o mesmo foi muito baixo.

Referências

ASSUNÇÃO, R.M.; LAGE, J.P.; A.REIS, E.; SILVA, P.L.N. Análise de conglomerados espaciais via árvore geradora mínima. *Revista Brasileira de Estatística*, v.63, p.7-24, 2004.

CHIYOSHI, F.; GALVÃO, R.D. A statistical analysis of simulated annealing applied to the p-median problem. *Annals and Operations Research*, v.96, p.61-74, 2000.

DRUMMMOND, L.M.A.; OCHI, L.S.; VIANNA, D.S. An asynchronous parallel metaheuristic for the period vehicle routing problem. *Future Generation Computer Systems,* v.17, n.4, p.379-386, 2001.

ERKUT E.; BOZKAYA, B.; ZHANG, J. *An effective genetic algorithm for the p-median problem.* Alberta: University of Alberta, 1997. 23 p

FEO, T.A. AND RESENDE, M.G.C. Greedy randomized adaptive search procedures. *Journal of Global Optimization*, v.6, p.109-133, 1995.

GOLDMAN, A.J. Optimal location for centers in a network. *Transportation Science*, v.3, p.352–360, 1969.

HANSEN, P.; MLADENOVIC, N.; PEREZ-BRITO. Variable neighborhood decomposition search. *Journal of Heuristics*, v.7, p.335-350, 2001.

HOSAGE, C.M.; GOODCHILD, M.F. Discrete space location-allocation solutions from genetic algorithms. *Annals of Operations Research*, v.6, p.657-682, 1986.

MARQUES, T.B.; ARROYO, J.E.C. ; VIANNA, D.S. Heurísticas para o problema de alocação de antenas de transmissão. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 2007, Fortaleza. p. 1-12.

O'KELLY, M.E. A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, v.32, p.393–404, 1987.

RESENDE, M.G.C. Greedy Randomized Adaptive Search Procedures (GRASP). *AT&T Labs Research Technical Report*, v.98.41.1, 1998.

RESENDE, M. G. C.; RIBEIRO, C. C. Greedy randomized adaptive search procedures. In: GLOVER, F. ; KOCHENBERGER, G. (Eds.). *Handbook of metaheuristics*. England: Kluwer, 2003. p.219-249.

RESENDE, M.G.C.; WERNECK, R.F. A Hybrid Heuristic for p-Median Problem**.** *Journal of Heuristics*, v.10, p.59-88, 2004.

RIBEIRO, C.C.; VIANNA, D.S. A hybrid genetic algorithm for the phylogeny problem using path-relinking as a progressive crossover strategy. *International Transactions in Operational Research*, v.16, p.641-657, 2009.

ROLLAND, E.; SCHILLING, D.A.; CURRENT, J.R. An efficient tabu search procedure for the pmedian problem. *European Journal of Operational Research*, v.96, n.2, p.329-342, 1996.

VOSS, S. A reverse elimination approach for the p-median problem. *Studies in Locational Analysis*, v.8, p.49-58, 1996.

Artigo recebido em: 27 maio 2011
Aceito para publicação em: 28 ago. 2011