

# *Determinação do módulo de elasticidade em vigas estruturais de madeira pelo método dos mínimos quadrados*

*Determination of the longitudinal modulus of elasticity in structural sawn wooden beams by the least squares method*

André Luis Christoforo\*  
Sérgio Luiz Moni Ribeiro Filho\*\*  
Anderson Renato Vobornik Wolensky\*\*\*  
Anelize Borges Monteiro\*\*\*\*  
Francisco Antonio Rocco Lahr\*\*\*\*\*  
Mauro Augusto Demarzo\*\*\*\*\*

Este trabalho propõe uma metodologia alternativa de cálculo, fundamentada no Método dos Mínimos Quadrados para a determinação do módulo de elasticidade longitudinal, em vigas de madeira de dimensões estruturais. As equações desenvolvidas requerem o conhecimento de três pontos medidos em deslocamentos ao longo da peça, permitindo maior confiabilidade sobre a variável resposta, utilizando-se do ensaio de flexão estática a quatro pontos. A metodologia proposta foi empregada em conjunto com uma simplificada, requerendo o conhecimento do deslocamento apenas no ponto médio da peça, com o objetivo de comparar os resultados entre ambas, sendo utilizada a madeira Jatobá (*Hymenaea* sp). Os resultados apontaram equivalência estatística entre os modelos empregados, indicando a boa aproximação do modelo simplificado para o cálculo do módulo de elasticidade das vigas aqui avaliadas.

*This paper proposes an alternative method of calculation based on the Least Squares Method to determine the longitudinal modulus of elasticity in structural-sized wooden beams. The developed equations require knowledge of three points of displacements, allowing greater reliability on the dependent variable when using the static four-point bending test. Using the Jatobá (*Hymenaea* sp) wood in the study, the methodology proposed here was used in combination with a simplified one, requiring knowledge of displacement only at the midpoint of the beam in order to compare the results among them. Results show statistical equivalence between the models, indicating a good approximation of the simplified model for calculating the modulus of elasticity in wooden structural bending here evaluated.*

Palavras-chave: Madeira serrada. Módulo de elasticidade. Método dos Mínimos Quadrados.

*Key words: Sawn wood. Modulus of elasticity. Least Squares Method.*

\* Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ) - Brasil

\*\* Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ) - Brasil

\*\*\* Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) - Brasil

\*\*\*\* Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) - Brasil

\*\*\*\*\* Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (EESC/USP) - Brasil

\*\*\*\*\* Universidade Estadual de Campinas(UNICAMP) - Brasil

## Introdução

Dentre os principais materiais utilizados na confecção de estruturas destaca-se a madeira, por ser um material de fonte renovável e de excelente relação resistência/densidade, chegando a ser quatro vezes superior a do aço (CALIL et al., 2003).

O projeto de estruturas de madeira, assim como o de outros materiais, requer o conhecimento de algumas variáveis, dentre elas, o módulo de elasticidade, obtido por intermédio de ensaios experimentais preconizados por documentos normativos, podendo ser destrutivos ou não.

Por ser a madeira um material ortotrópico e heteronêneo, visando maior confiabilidade, a sua caracterização na flexão requer experimentações em peças com dimensões estruturais. Neste âmbito, apenas documentos normativos internacionais podem ser citados, uma vez que a norma Brasileira NBR 7190:1997 (Projeto de Estruturas de Madeira), que trata da caracterização da madeira, contempla apenas a condição de ensaio destrutivo em corpos-de-prova de pequenas dimensões e isentos de defeitos.

A norma ASTM D 198:1997 (Standard Test Method of Static Tests of Lumber in Structural Sizes) preconiza o ensaio de flexão estática a quatro pontos (Figura 1) na determinação do módulo de elasticidade na flexão ( $E_m$ ), expresso pela Equação 1, sendo  $F$  a força aplicada no limite de proporcionalidade,  $L$  o vão livre entre apoios,  $a$  é distância entre as forças aplicadas,  $b$  a largura do corpo-de-prova,  $h$  a espessura do corpo-de-prova e  $\delta$  a flecha obtida no meio do vão.

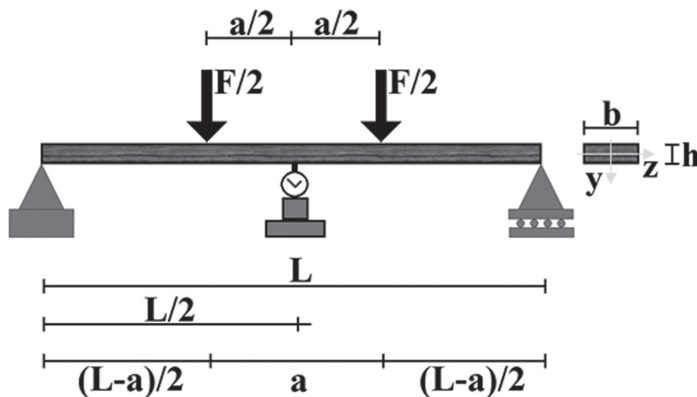


Figura 1: Flexão estática a quatro pontos (ASTM D 198:1997)

$$E_m = \frac{F \cdot a \cdot (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2)}{4 \cdot b \cdot h^3 \cdot \delta}$$

A norma ASTM D3043:1995 (Standard Methods of Testing Structural Panels in Flexure) emprega o modelo estrutural de flexão estática a quatro pontos na determinação das propriedades de resistência e rigidez em chapas de madeira, indicando, para tanto, a posição de menor inércia da peça (flatwise), assim como ilustra a Figura 2.

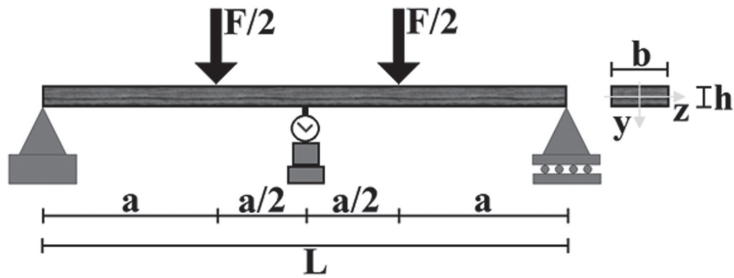


Figura 2: Flexão estática a quatro pontos (ASTM D3043:1995)

O módulo de elasticidade calculado pela norma ASTM D3043:1995, intitulado aparente ( $E_a$ ), é obtido pela Equação 2.

$$E_a = \frac{a \cdot (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2)}{2 \cdot b \cdot h^3} \cdot \left( \frac{F_{50\%} - F_{10\%}}{\delta_{50\%} - \delta_{10\%}} \right)$$

Da Equação 2,  $F_{50\%}$  e  $F_{10\%}$  são as forças (N) correspondentes a 10% e 50% da carga máxima aplicada ao corpo-de-prova,  $\delta_{50\%}$  e  $\delta_{10\%}$  são os deslocamentos (mm) correspondentes a 10% e 50% da carga máxima,  $b$  e  $h$  correspondem, respectivamente, à largura e à altura (mm) da seção transversal do corpo-de-prova,  $a$  é a distância entre o apoio e o ponto de aplicação da força e  $L$  o vão entre apoios.

A norma ASTM D4761:1996 (Standard Test Methods for Mechanical Properties of Lumber and wood-base Structural Material) utiliza o ensaio de flexão estática a três pontos na obtenção do módulo elasticidade aparente (Equação 3) em chapas na posição vertical (Figura 3), sendo  $I_z$  o momento de inércia em relação ao eixo “z”.

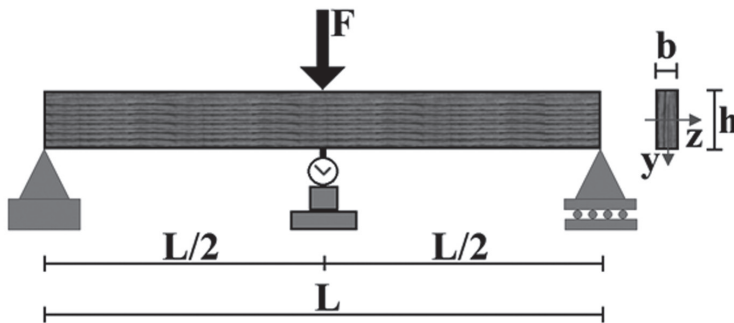


Figura 3: Flexão estática a três pontos (ASTM D4761:1996)

$$E_a = \frac{L^3}{48 \cdot I_z} \cdot \left( \frac{F_{50\%} - F_{10\%}}{\delta_{50\%} - \delta_{10\%}} \right)$$

Os dois métodos de cálculo propostos pelas normas ASTM D3043:1995 e ASTM D4761:1996 podem fornecer valores diferentes para o módulo de elasticidade, justificados pela intensidade e amplitude dos esforços cortantes, conduzindo a valores aparentes para os módulos de elasticidade na flexão, uma vez que o modelo de vigas utilizado no desenvolvimento das equações não contempla a parcela dos esforços cortantes (GUITARD, 1987).

Entretanto, Bodig e Jayne (1992) afirmam que quão maior for a relação comprimento da viga ( $L$ ), pela altura da seção transversal ( $h$ ), menor é a contribuição do esforço cortante no cálculo das deflexões. Para relações  $L/h$  iguais ou superiores a 21 esta contribuição é praticamente desprezível (ROCCO LAHR, 1983).

A norma ASTM D4761:1996, que adota o ensaio de flexão a três pontos, preconiza que a relação  $L/h$  para o ensaio de chapas na posição vertical deve estar situada entre 17 e 21. Nestes casos, o módulo de elasticidade aparente ( $E_a$ ) se aproxima do módulo de elasticidade na flexão ( $E_m$ ).

A norma EN 789:1995 (Determinação das Propriedades Mecânicas de Painéis Derivados de Madeira) preconiza o ensaio de flexão a quatro pontos segundo o método da curvatura, registrando o deslocamento vertical no meio do vão, porém, relativo a outro ponto situado entre os de atuação do carregamento, sendo preferível um mais afastado possível, do meio do vão. A interpretação dos resultados é feita a partir do registro da variação da curvatura em função das cargas aplicadas. Neste caso, obtém-se o módulo de elasticidade à flexão baseado exclusivamente na deformação por momento fletor. A Equação 4 expressa o módulo de elasticidade na flexão.

$$E_m = \left( \frac{F_{40\%} - F_{10\%}}{\delta_{40\%} - \delta_{10\%}} \right) \cdot \frac{L_1^2 \cdot L_2}{16 \cdot I_z}$$

Da Equação 4,  $F_{40\%}$  e  $F_{10\%}$  são as forças ( $Kgf$ ) correspondentes a 10% e 40% da máxima aplicada ao corpo-de-prova,  $\delta_{40\%}$  e  $\delta_{10\%}$  são os deslocamentos (cm) correspondentes a 10% e 40% da força máxima,  $L_1$  a distância de referência para medição do deslocamento no vão central (cm) e  $L_2$  a metade do comprimento da zona de cisalhamento (cm).

Os compósitos estruturais de madeira, tais como os painéis colados a partir de lâminas (Laminated Veneer Lumber - LVL) e os painéis de partículas laminadas (Laminated Strand Lumber - LSL, Oriented Strand Lumber - OSL e Parallel Strand Lumber - PSL) são geralmente caracterizados à flexão pelas premissas de cálculo da norma ASTM D5456:2006 (Standard Specification for Evaluation of Structural Composites Lumber Products), que emprega o ensaio de flexão estática a três pontos na determinação do módulo de elasticidade e resistência à flexão das lâminas, devendo ser avaliados para as duas possíveis posições, a de menor e maior momento de inércia, de acordo com a composição da lâmina na formação do elemento (PALMA et al., 2008a; PALMA et al., 2008b).

No Brasil, as pesquisas que envolvem a caracterização de peças de madeira por intermédio de ensaios destrutivos seguem as premissas de métodos e cálculos contidos em documentos normativos internacionais (PIGOZZO et al., 2000; FIORELLI 2005; MIOTTO e DIAS, 2009).

Como comentado anteriormente, a caracterização de peças de madeira de dimensões estruturais pode também ser realizada por intermédio de ensaios não destrutivos, que visam à determinação das propriedades físicas e mecânicas de um elemento estrutural sem a alteração das suas capacidades de uso (ROSS et al., 1998). A vantagem do emprego de ensaios não destrutivos consiste na não necessidade da extração de corpos-de-prova, viabilizando o estudo da integridade estrutural (MINÁ, 2004; OLIVEIRA e SALES, 2002), comumente realizados por meio de ensaios como vibração transversal e ultrassom.

Do exposto, os modelos de cálculo propostos por documentos normativos para a determinação do módulo de elasticidade na flexão em peças de madeira de dimensões estruturais (via ensaios destrutivos), não contemplam metodologias baseadas em critérios de otimização.

Com relação aos ensaios não destrutivos, ressalta-se a necessidade da aquisição de equipamentos especializados para a determinação do módulo de elasticidade.

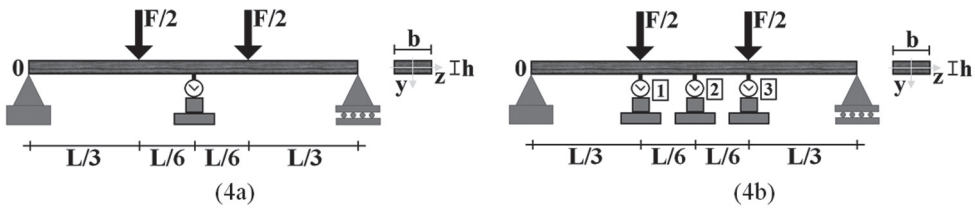
Este trabalho propõe uma metodologia analítica de cálculo, fundamentada no Método dos Mínimos Quadrados e no ensaio de flexão estática a quatro pontos, de forma não destrutiva, para a determinação do módulo de elasticidade na flexão em peças de madeira serrada de dimensões estruturais. O emprego da abordagem analítica é feito para madeiras da espécie Jatobá (*Hymenaea sp*), sendo os resultados dos módulos de elasticidade obtidos comparados com os advindos da resistência dos materiais (modelo simplificado), permitindo-se verificar as diferenças entre ambos.

## ***Materiais e métodos***

Para a determinação do módulo de elasticidade foram utilizadas 18 peças de madeira Jatobá de dimensões 5 cm X 5 cm X 140 cm, respeitando-se a relação  $L \geq 21 \cdot h$  (ROCCO, 1983), desprezando-se os efeitos do cisalhamento no cálculo das deflexões das peças.

O ensaio experimental utilizado na determinação do módulo de elasticidade é considerado não destrutivo, em virtude do maior valor em deslocamento encontrado estar limitado à relação  $L/200$ , sendo  $L$  o vão livre entre apoios, expresso em centímetros. Esta é uma medida de pequenos deslocamentos definida pela NBR 7190:1997, implicando na linearidade física e geométrica para as vigas de madeira.

Os esquemas de ensaio utilizados na determinação do módulo de elasticidade na flexão por ambas as metodologias de cálculo, com um (simplificada) e com três relógios comparadores (alternativa), são ilustrados nas Figuras 4a e 4b respectivamente.



**Figura 4:** Flexão estática a quatro pontos: (4a) um relógio comparador, (4b) três relógios comparadores

O emprego da metodologia aqui proposta requer o conhecimento do valor dos deslocamentos analíticos ( $V_i$ ) da peça nas posições dos três relógios comparadores 1, 2 e 3 (Figura 4b). Estes, por sua vez, foram obtidos do emprego do Método das Forças Virtuais (MFV) ao esquema estrutural ilustrado na Figura 4b, expressos pelas Equações 5 e 6.

$$V_1 = V_3 = \frac{5 \cdot F \cdot L^3}{324 \cdot E \cdot I_z}$$

$$V_2 = \frac{23 \cdot F \cdot L^3}{1296 \cdot E \cdot I_z}$$

Pela simetria existente no modelo de ensaio, os deslocamentos nos relógios 1 e 3 ( $V_1$  e  $V_3$ ) são iguais. Ressalta-se que o valor do deslocamento obtido na Equação 6 é equivalente ao do deslocamento fornecido pelo modelo matemático de cálculo proposto pela norma ASTM D3043:1995 (Equação 2), diferenciando-se apenas na questão de esse último ser destrutivo.

O módulo de elasticidade a ser calculado com as informações advindas do modelo de ensaio da Figura 4b parte da ideia de mínimos quadrados (Equação 7), objetivando-se determinar o valor do módulo de elasticidade para que o resíduo gerado entre os valores dos deslocamentos analítico e experimental ( $\delta$ ) seja o menor possível.

$$f(E) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (V_i - \delta_i)^2$$

A igualdade da derivada primeira da equação 7 a zero conduz ao valor do módulo de elasticidade que minimiza o resíduo entre os valores dos deslocamentos (Equação 8), comprovando-se pelo critério da derivada segunda (Equação 9) que este é um ponto de mínimo e global.

$$E_{m,o} = \frac{443 \cdot F \cdot L^3}{36 \cdot (20 \cdot \gamma + 23 \cdot \delta_2) \cdot b \cdot h^3}, \quad \gamma = \delta_1 + \delta_3$$

$$\frac{d^2}{dE^2}[f(E_{m,o})] = \frac{62208 \cdot b^2 \cdot h^6}{12519116208 \cdot F^2 \cdot L^6} \cdot (20 \cdot (\delta_1 + \delta_3) + 23 \cdot \delta_2)^4 > 0$$

A Equação 8 ( $E_{m,o}$ ) aqui apresentada, juntamente com a Equação 6 reescrita em função do módulo de elasticidade ( $E$ ), são empregadas no cálculo dos módulos de elasticidade das 18 peças de madeira ensaiadas. Para tanto, foi utilizado o intervalo de confiança da diferença entre médias, expresso pela Equação 10, sendo  $\mu$  a média populacional das diferenças,  $\bar{x}_m$  a média aritmética amostral das diferenças,  $n$  o tamanho da amostra,  $S_m$  o desvio padrão amostral das diferenças e  $t_{\alpha/2, n-1}$  o valor tabelado pela distribuição t de Student com  $n-1$  graus de liberdade e nível de significância  $\alpha$ .

$$\bar{x}_m - t_{\alpha/2, n-1} \cdot S_m / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x}_m + t_{\alpha/2, n-1} \cdot S_m / \sqrt{n}$$

### Resultados e conclusões

Os valores dos módulos de elasticidade  $E_{m,o}$  e  $E_m$  obtidos para as madeiras Jatobá são apresentados na Tabela 1, sendo  $X$  a média das amostras,  $S$  o desvio padrão e  $CV$  o coeficiente de variação.

Tabela 1: Valores dos módulos de elasticidade  $E_{m,o}$  e  $E_m$  para o Jatobá

Peça	$E_m$ (MPa)	$E_{m,o}$ (MPa)	Peça	$E_m$ (MPa)	$E_{m,o}$ (MPa)
1	21436	21872	10	21610	21237
2	20072	20644	11	23779	23104
3	18778	18127	12	20663	21169
4	21436	21872	13	19145	19326
5	20072	20644	14	22367	21873
6	18778	18127	15	20321	20598
7	20865	20539	16	20873	20721
8	17484	17673	17	21758	22140
9	22481	22921	18	20840	20436
			X	20708,8	20723,5
			S	1526,63	1568,27
			CV(%)	7,40	7,60

A Figura 5 ilustra os gráficos de probabilidade normal do teste de Anderson-Darling. Os P-valores encontrados para módulos de elasticidade  $E_m$  e  $E_{m,o}$  são respectivamente iguais a 0,805 e 0,121, sendo superiores a 0,05, apresentando distribuição normal ambos os conjuntos de valores (WERKEMA; AGUIAR, 1996).

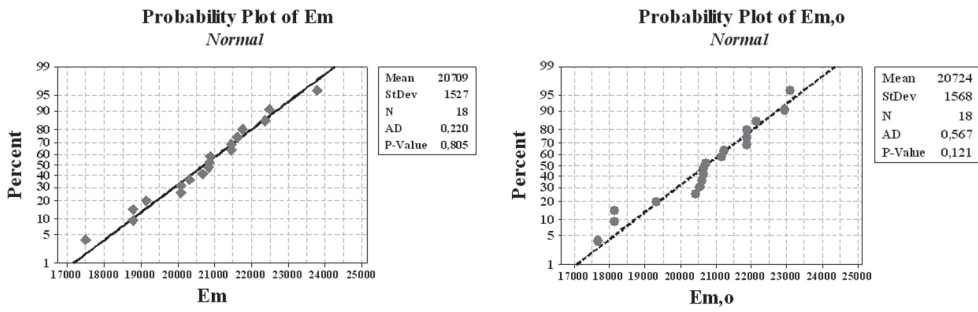


Figura 5: Gráficos de probabilidade normal: (a)  $E_m$  e (b)  $E_{m,o}$

O intervalo de confiança entre os valores de  $E_m$  e  $E_{m,o}$  obtidos para os corpos-de-prova é  $-1064,25 \leq \mu \leq 1034,81$  e, como o zero pertence ao intervalo, afirma-se que estes são estatisticamente equivalentes.

O gráfico da regressão linear entre os valores dos módulos de elasticidade, para ambas as metodologias de cálculo, é ilustrado pela Figura 6, cuja equação de ajuste e o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) obtidos são respectivamente  $E_{m,o} = 0,98 \cdot E_m + 422$  e  $0,91$ . Pelo valor do coeficiente de determinação obtido, constata-se a validade do modelo de ajuste linear entre os módulos de elasticidade.

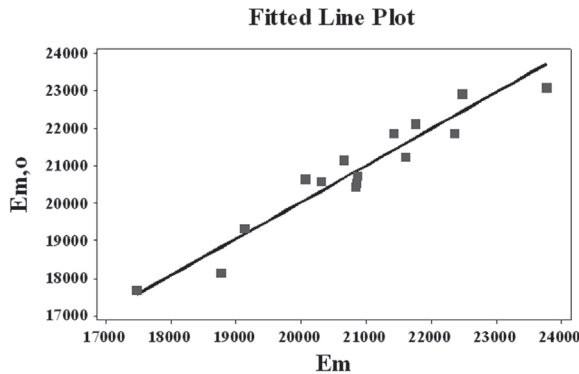


Figura 6: Regressão linear entre os módulos de elasticidade  $E_m$  e  $E_{m,o}$

A metodologia analítica de cálculo aqui proposta permite determinar o módulo de elasticidade em peças de dimensões estruturais com maior confiabilidade quando comparada a outras metodologias, visto ser esta fundamentada no Método dos Mínimos Quadrados. Ressalta-se que esta pode também ser empregada em corpos-de-prova e não só para madeiras serradas, mas também para vigas em madeira laminada colada, painéis de madeira entre outras.

Pela equivalência estatística encontrada entre os valores do módulo de elasticidade das madeiras Jatobá, por ambas as metodologias de cálculo, constata-se que as peças, mesmo podendo ser dotadas de alguns defeitos ou imperfeições não visíveis, na condição de pequenos deslocamentos (premissa de projeto), pouco afetaram no



cálculo do módulo de elasticidade, implicando neste caso, a boa aproximação obtida do modelo de cálculo proposto pela norma ASTM D3043:1995 com a adaptação de se considerarem os ensaios como sendo não destrutivos.

## **Referências**

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS (ASTM). Standard methods of testing structural panels in flexure. ASTM D 3043-95. *Annual book of ASTM standards*. West Conshohocken, Philadelphia: ASTM, 1995.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS (ASTM). Standard specification for evaluation of structural composites lumber products. ASTM D 5456. *Annual book of ASTM standards*. West Conshohocken, PA: ASTM, 2006.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS (ASTM). Standard test method of static tests of lumber in structural sizes. ASTM D 198. *Annual book of ASTM standards*, v. 03.01. West Conshohocken, PA: ASTM, 1997.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS (ASTM). Standard test methods for mechanical properties of lumber and wood-base structural material. ASTM D 4761-96. *Annual book of ASTM standards*. West Conshohocken, PA: ASTM, 1996.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). *Projeto de Estruturas de Madeira*. NBR 7190, Rio de Janeiro, 1997.

BODIG, J.; JAYNE, B. A. *Mechanics of wood and wood composites*. Malabar, Florida: Krieger Publishing Company, 1992.

CALIL, C. JR.; LAHR, F. A. R.; DIAS, A. A. *Dimensionamento de elementos estruturais de madeira*. Barueri-São Paulo: Manole, 2003.

EUROPEAN STANDARD (EN). Estruturas de Madeira - Métodos de teste - Determinação das propriedades mecânicas de painéis derivados de madeira. EN 789. Bruxelas, 1995. (versão portuguesa)

FIORELLI, J. *Estudo teórico e experimental de vigas de madeira laminada colada reforçadas com fibra de vidro*. São Carlos, 2005. 108p. Tese (Doutorado em Ciência e Engenharia de Materiais) - Universidade de São Paulo, 2005.

GUITARD, D. *Mécanique du matériau bois et composites*. França: Cepadues-editions, 1987.

MINÁ, A. J. S.; OLIVEIRA, F. G. R.; CALIL JR, C.; DIAS, A. A.; SALES, A. Avaliação não destrutiva de postes de madeira por meio de ultra-som. *Scientia Forestalis*, n. 65, p. 188-196, 2004.

MIOTTO, J. L.; DIAS, A. A. Produção e avaliação de vigas de madeira laminada colada confeccionadas com lâminas de eucalipto. *Revista Tecnológica*, Edição Especial ENTECA, p. 35-45, 2009.

OLIVEIRA, F. G. R.; SALES, A. Ultrasonic measurements in Brazilian hardwood. *Materials Research*, v. 5, n. 1, p. 51-55, 2002.

PALMA, H. A. L.; BALLARIN, A. W.; ABILIO, R. M. Propriedades mecânicas de painéis LVL de Pinus tropicais. In: ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRA E ESTRUTURAS DE MADEIRAS, 11., 2008a, Londrina- PR.

PALMA, H. A. L.; BALLARIN, A. W.; ROCHA, C. D. Propriedades de flexão de vigas LVL de *Eucalyptus grandis*. In: ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRA E ESTRUTURAS DE MADEIRAS, 11., 2008b, Londrina- PR.

PIGOZZO, J. C.; PLETZ, E.; LAHR, F. A. R. Aspectos da classificação mecânica de peças estruturais de madeira. In: ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRA, 7., 2000, São Carlos, SP.

ROCCO LAHR, F. A. *Sobre a determinação de propriedades de elasticidade da madeira*. São Carlos, SP, 1983, 216p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1983.

ROSS, R. J.; BRASHAW, B. K.; PELLERIN, R. F. Nondestructive evaluation of wood. *Forest Products Journal*, v. 48, n. 1, p. 14-19, 1998.

WERKEMA, M. C. C.; AGUIAR S. *Planejamento e análise de experimentos: como identificar e avaliar as principais variáveis influentes em um processo*. Belo Horizonte: Fundação Christiano Ottoni, Escola de Engenharia da UFMG, 1996.

*Artigo recebido em: 28 mar. 2012*  
*Aceito para publicação em: 6 jul. 2012*