

# Otimização geométrica de treliças planas utilizadas em coberturas metálicas

## *Geometric optimization of planar trusses used in metal roofings*

Sergio Rafael Cortes de Oliveira\*

Gines Arturo Santos Falcón\*\*

Na concepção de projetos estruturais, os profissionais modernos buscam minimizar o consumo de material, o que diminui custos, mas sem comprometer a eficiência do sistema. Este trabalho visa implementar um programa de otimização geométrica para identificação da solução ótima de uma treliça em alumínio, objetivando minimizar seu peso. E busca ressaltar a importância de projetar sistemas mais racionais, sustentáveis e com boa relação custo-benefício. Os resultados da pesquisa mostraram o potencial da otimização diante da considerável redução de peso obtida. Foram feitas avaliações complementares para verificar a influência das áreas e da eliminação de restrições na geometria final do problema.

*In the conception of structural projects, modern professionals seek to reduce cost by minimizing material consumption without compromising efficiency of the system. This work aims at implementing a geometric optimization program to identify the optimum solution of an aluminum truss with the objective of minimizing its weight. It also intends to stress the importance of projecting more rational and sustainable systems, with a good benefit-cost ratio. Results of the study showed the optimization potential regarding the considerable weight reduction obtained. Additional assessments were made to verify the influence of areas, and the elimination of restrictions in the final geometry of the problem.*

Palavras-chave: Otimização geométrica. Treliça em alumínio. Redução de peso.

*Key words: Geometric optimization. Aluminum trusses. Weight reduction.*

## **Introdução**

O conceito de otimização é intrínseco aos seres humanos e está em todo lugar. A sociedade está a todo instante tendo que tomar decisões estratégicas diante de inúmeros fatores envolvidos, por exemplo, ao se pensar no caminho de volta para casa, opta-se pelo mais curto ou aquele que tem maior fluidez ou, ainda, pelo menos perigoso. Quanto mais se tem informações a respeito das alternativas disponíveis, faz-se uma análise mais apurada para definir o caminho ótimo de retorno a casa. Isso demonstra que, quanto mais se conhece sobre determinado assunto, mais perceptíveis são os critérios que podem ser utilizados para sua correta otimização.

\*Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, na área de Estruturas, da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF). Mestre em Engenharia Civil com ênfase em Estruturas (2011), também pela UENF. Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *Campus* Campos-Centro – Campos dos Goytacazes/RJ - Brasil

\*\*Graduado em Engenharia Mecânica pela "Universidad Nacional de Ingeniería" em Lima no Perú, com mestrado e doutorado em Engenharia Mecânica pela COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro em 1996. Professor associado da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro em Campos dos Goytacazes/RJ - Brasil

## *Otimização estrutural*

Na concepção de projetos estruturais, todas as decisões tomadas pelos projetistas devem ser feitas de modo racional, de maneira a minimizar o consumo de material, maximizar sua confiabilidade ou facilitar a sua produção, o que reflete significativamente nos custos. Portanto, dentre as inúmeras opções de soluções estruturais possíveis que atendem às necessidades do projeto, escolhe-se aquela que é ótima. Para isso, dispõe-se de técnicas de projeto ótimo que utilizam modelos matemáticos de modo a identificar, de forma prática, essa solução ótima de mínimo custo e que não compromete a funcionalidade nem a segurança da estrutura, isto é, ela continua atendendo aos fins e às necessidades pelas quais foi planejada.

Define-se a otimização estrutural como um conjunto de ferramentas numéricas que auxiliam os engenheiros a projetar excelentes estruturas, levando em conta o melhor comportamento estrutural para uma dada aplicação.

Obviamente, o sucesso da otimização está condicionado a uma boa formulação do problema que se pretende projetar, isto é, a correta definição do modelo matemático representativo do problema. É muito importante uma seleção eficiente dos parâmetros mais relevantes a serem levados em conta.

## *Modelo matemático e Solução do problema*

O modelo matemático que passa pelo processo de otimização compreende a função objetivo, as variáveis e as restrições de projeto.

A função objetivo é o parâmetro indicativo da qualidade do projeto, afinal de contas, é o que, quantitativamente, se pretende maximizar ou minimizar. Num mesmo processo de otimização, pode-se ter mais de uma função objetivo (otimização multiobjetivo ou vetorial), por exemplo, quando se deseja aumentar a rigidez e diminuir o peso de uma estrutura. Quando existe apenas uma função objetivo, diz-se que a otimização é escalar, por exemplo, na diminuição do peso de uma estrutura.

As variáveis de projeto são os parâmetros escolhidos de forma arbitrária; que sofrerão variações arbitrárias e possibilitam a busca da configuração ótima. Na otimização de estruturas treliçadas, têm-se como exemplos as coordenadas dos pontos nodais ou as dimensões das seções transversais das barras. Essas variáveis podem assumir valores pontuais, escolhidos dentro de um conjunto de dados pré-definidos (variáveis discretas) ou podem assumir valores reais dentro de um conjunto (variáveis contínuas).

As restrições de projeto são as limitações ou condições impostas ao projeto. Podem ser definidas através de critérios mecânicos, tecnológicos, econômicos, normas de segurança, etc. Como exemplos, podemos citar as tensões e os deslocamentos de uma viga, que estão diretamente associadas à resposta mecânica ou comportamento da estrutura.

Pode-se citar, também, a limitação da altura da seção transversal de uma viga dentro de um intervalo com limites inferior e superior definidos, ou seja, restrições laterais.

No processo de otimização, o espaço solução compreende o conjunto das soluções viáveis do problema a ser otimizado.

A configuração ou ponto ótimo é o vetor de variáveis de projeto que minimizam a função objetivo, satisfazendo as restrições do modelo. O valor da função objetivo no ponto ótimo é o valor ótimo do problema.

### *Tipos de otimização*

A treliça é um modelo estrutural em que todas as extremidades dos elementos da estrutura estão rotuladas. Desta forma, os elementos transmitem apenas esforços normais. As treliças são estruturas bastante estudadas nos processos de otimização em virtude de sua simplicidade e larga aplicação em projetos de pontes (ferroviárias e rodoviárias), estruturas de coberturas (de residências, indústrias, estádios, etc.) e, por serem capazes de superar grandes vãos diante de sua relativa leveza, muitas vezes com elevadas solicitações de carga.

Dentre os principais tipos de otimização que envolvem treliças destacam-se a dimensional, a geométrica e a topológica.

A otimização dimensional é o tipo em que são tomadas como variáveis as dimensões de um elemento estrutural como, por exemplo, a modificação nas dimensões da seção transversal.

Define-se a otimização geométrica como aquela em que há modificação do desenho (geometria) da estrutura sem a retirada de elementos que a compõem. É muito eficiente, apesar dos projetistas trabalharem com estruturas com configuração pré-definidas.

Na otimização topológica as variáveis de projeto são os parâmetros numéricos que podem alterar a distribuição de material ao longo da estrutura com o objetivo de minimizar gastos com material em regiões com pouca solicitação de carregamento.

### *Métodos de otimização*

Dentre os métodos de otimização estrutural, destacam-se as técnicas de Programação Matemática e as técnicas heurísticas ou evolucionistas.

Os métodos clássicos de otimização baseados em Programação Matemática partem de uma configuração inicial e, iterativamente, esta solução é melhorada. Esses métodos convergem rapidamente para a solução ótima, apesar de não garantirem uma solução ótima global, que é o menor valor entre as várias soluções extremas. Podem-se destacar os seguintes métodos: Newton-Raphson, Quase-Newton, Lagrangiano, Pontos Interiores, Programação Quadrática Sequencial, entre outros.

Os métodos heurísticos de otimização apresentam-se como alternativa para a solução de diversos problemas práticos, principalmente, no que diz respeito a problemas de grande complexidade e que envolvem um grande número de variáveis, realizando buscas simultâneas em várias regiões do espaço de possíveis soluções, aumentando a probabilidade de se encontrar a solução global. Um atrativo particular desses métodos é que não necessitam de informações dos gradientes das funções envolvidas. São exemplos de métodos heurísticos: os Algoritmos Genéticos, a Colônia de Formigas e o Recozimento Simulado.

### *Análise estrutural*

Convém destacar que uma estrutura pode ser estudada através de diversos modelos estruturais dentre os quais se destacam: linear elástico, não linear, dinâmico e elasto-plástico. Para tal, empregam-se técnicas usuais de análise estrutural como o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e a Análise Matricial de Estruturas (AME).

### *Principais trabalhos revisados*

Dentre alguns estudos, pode-se destacar o trabalho de Kripka et al. (2008) em que os autores estudaram a otimização de treliças metálicas pelo Método do Recozimento Simulado para, a partir de uma configuração inicial, identificar os perfis mais adequados das barras de uma treliça de alumínio (otimização dimensional). Numa segunda simulação, além da escolha dos perfis, foram admitidas, também, como variáveis de projeto, as coordenadas dos nós (otimização geométrica). Adicionalmente, os dois modelos foram testados experimentalmente e apresentaram desempenho satisfatório. Os autores verificaram uma significativa redução no peso da estrutura.

O método de Recozimento Simulado é um método de otimização de implementação extremamente simples, proposto por Metropolis et al. (1953). O método tem sua origem na analogia entre o processo físico do resfriamento de um metal em estado de fusão e o problema de otimização. A natureza faz, na verdade, a minimização da energia da estrutura cristalina quando o material é recozido para remover defeitos de sua estrutura atômica.

Outro trabalho relevante é o de Medeiros et al. (2010), que emprega a mesma metodologia do trabalho de Kripka et al. (2008) para gerar geometrias de maior eficiência, a partir de modelos clássicos, para tesouras de galpões com cobertura em duas águas. Os autores buscaram avaliar a economia que a utilização de técnicas de otimização pode conferir ao projeto de coberturas metálicas em aço, além da possível indicação

de configurações para determinadas situações de vão, comprimento e inclinação dos pavilhões. No trabalho, a redução percentual no peso próprio dos modelos mostrou-se bastante significativa ao permitir-se a variação na geometria dos modelos, o que pode representar interessante economia no custo final do projeto. Foi verificado, também, grande redução de peso da estrutura nas simulações em que diversas variáveis de projeto eram agregadas em comparação às simulações em que se considerava somente as áreas das seções como variáveis, por exemplo.

Conforme apontado nos estudos de Kripka e Drehmer (2005), quando as coordenadas dos nós, além das seções transversais, são incluídas no conjunto das variáveis de projeto, o ganho obtido a partir do emprego da otimização é mais significativo. Observação semelhante foi feita no trabalho de Medeiros et al. (2010), em que os autores concluíram que à medida que o projetista leva em conta um maior número de detalhes na concepção de seu projeto, não procurando apenas ser mais econômico na escolha dos perfis, mas também propor um melhor desenho de sua estrutura, maior a economia obtida.

## ***Objetivo***

O presente artigo tem como objetivo apresentar a implementação de um programa computacional a fim de obter a solução ótima de uma estrutura treliçada de cobertura constituída de alumínio. Adotou-se o modelo de otimização geométrica, em que há mudança apenas da geometria da estrutura, a fim de minimizar gastos com material constituinte, sem comprometer a integridade e o comportamento estrutural. Consideram-se, portanto, como variáveis de projeto geométricas as coordenadas horizontais e verticais de alguns nós da estrutura. As áreas das seções são admitidas como valores fixos. Pretende-se com isto, sobretudo, despertar a consciência da necessidade de projetar sistemas eficientes, distintos, mais racionais, sustentáveis e que tenham uma boa relação custo-benefício.

## ***Formulações básicas***

### ***Formulação geral***

Um problema de otimização pode, de forma geral, ser descrito como:

$$\text{Minimizar } f(x_i), \quad i=1, \dots, n \text{ variáveis de projeto} \quad (1)$$

*Sujeito a*

$$g_j(x_i) \leq 0 \quad j=1, \dots, m \quad (2)$$

$$h_k(x_i) = 0 \quad k=1, \dots, p \quad (3)$$

$$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad (4)$$

Em (1)  $f$  designa a função objetivo e  $X$  consiste no vetor de variáveis de projeto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ . Além disso, em (2) têm-se as restrições de desigualdade  $g$ , em (3) têm-se as restrições de igualdade  $h$  e em (4) as restrições laterais, com limite inferior  $l$  e superior  $u$ .

As funções envolvidas no problema podem conter as variáveis de projeto de forma implícita ou explícita. Além disso, tanto a função objetivo quanto as restrições podem ser lineares ou não-lineares.

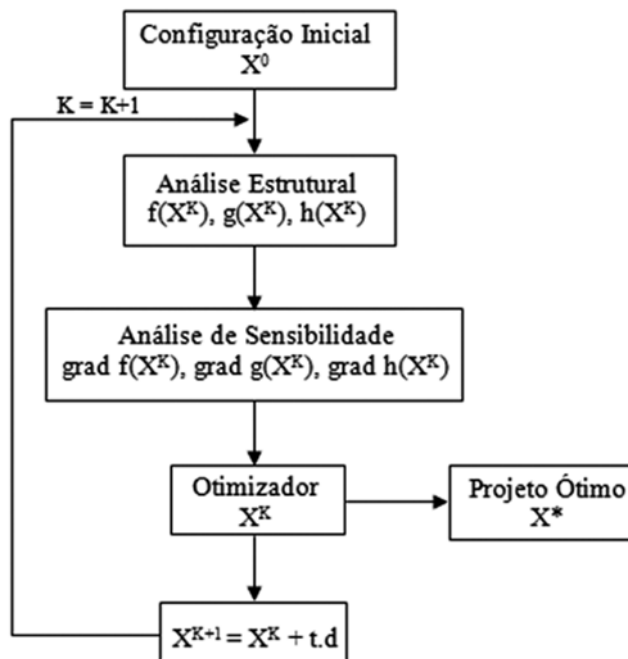
Na Figura 1, está apresentado um esquema geral de otimização estrutural. Na etapa da análise estrutural são calculados os valores das funções envolvidas (objetivo e restrições) para a solução atual e na análise de sensibilidade são avaliadas as derivadas dessas funções.

A partir de uma solução inicial  $X^0$  constrói-se uma sequência de soluções aproximadas  $X^K$  que convergem para uma solução ótima  $X^*$ . As variáveis de projeto são atualizadas através da regra de recorrência dada por:

$$X^{K+1} = X^K + t.d \quad (5)$$

Na regra de recorrência,  $d$  é uma direção de busca e  $t$  é uma escalar positivo que representa o passo a ser dado nessa direção. Esses parâmetros são calculados pelo algoritmo de otimização utilizado, visando a uma diminuição da função objetivo e a viabilidade das restrições.

**Figura 1** – Esquema geral de otimização estrutural.



## Formulação específica

No caso específico do presente trabalho, o problema de minimização do peso de treliças foi formulado da seguinte maneira:

$$\text{Minimizar } f(x_j) = W = \sum_{j=1}^m \gamma \cdot A_j \cdot L_j, \quad L_j = s(x_j) \quad (6)$$

Sujeito a

$$\sigma_j \leq \sigma_a \quad j=1, \dots, m \text{ elementos} \quad (7)$$

$$u_k \leq u_a \quad k=1, \dots, p \text{ graus de liberdade não restritos} \quad (8)$$

$$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad i=1, \dots, n \text{ variáveis de projeto} \quad (9)$$

A função objetivo  $W$  dada em (6) representa o peso da estrutura, em função da área  $A$  (que pode não ser a mesma dentre as barras, como é o caso) e das coordenadas dos nós da treliça. Nessa expressão,  $\gamma$  designa o peso específico do material e  $L$  é o comprimento dos elementos. O comprimento das barras, além de ser função das coordenadas fixas, depende das coordenadas de projeto.

No problema, tem-se como restrição mecânica que a tensão  $\sigma_j$  em cada barra deve ser menor ou igual à tensão admissível do material  $\sigma_a$  (7), sendo considerados ainda, como restrições mecânicas, os deslocamentos  $u_k$  permissíveis para cada um dos nós associados aos graus de liberdade não restritos, conforme expresso em (8). A restrição (9) é geométrica e impõe limites para a variação nas coordenadas dos nós em que estão as variáveis de projeto.

## Exemplo de aplicação

### Dados do problema

A fim de comprovar a efetiva economia obtida pela aplicação de técnicas de otimização à análise estrutural, decidiu-se por uma adaptação no algoritmo desenvolvido pelos autores deste trabalho para a otimização geométrica de treliças planas constituídas por perfis de alumínio. Portanto, a minimização do peso da estrutura será consequência da alteração nas coordenadas nodais.

Assim como no trabalho de Kripka et al. (2008), o material escolhido é o alumínio liga 6351, têmpera T4, cujas características (Buzinelli, 2000) estão resumidas na Tabela 1.

Tabela 1 – Características do alumínio liga 6351

Características	Valores
<b>Módulo de elasticidade transversal (E)</b>	70 GPa
<b>Peso específico (<math>\gamma</math>)</b>	$27 \frac{kN}{m^3}$
<b>Tensão de escoamento (<math>f_y</math>)</b>	130 MPa
<b>Tensão última (<math>f_u</math>)</b>	220 MPa

Seguindo a metodologia do trabalho de Kripka *et al.* (2008), foi utilizado o mesmo valor de tensão admissível tanto para a compressão como para a tração, sendo os coeficientes de segurança iguais a 1,65 para a tensão de escoamento e 2 para a tensão última e, conseqüentemente, a tensão admissível foi escolhida como o menor valor entre os calculados em (10) e (11):

$$\sigma_{adm} = \frac{f_y}{1,65} = \frac{130}{1,65} \approx 79 \text{ MPa} \quad (10)$$

$$\sigma_{adm} = \frac{f_u}{2,00} = \frac{220}{2,00} = 110 \text{ MPa} \quad (11)$$

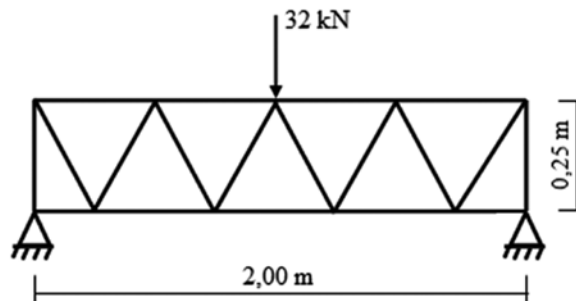
Desta forma, adotou-se 79 MPa como o valor de tensão admissível.

Nesta pesquisa, não foi considerada a tensão de flambagem, diferente do que foi feito no trabalho de Kripka *et al.* (2008).

Limitou-se o deslocamento dos nós em 3 cm.

A estrutura de referência empregada consiste numa treliça plana de banzos paralelos do tipo Warren, com 2,00 m de vão e 0,25 m de altura, sujeita à carga de 32 kN aplicada no nó central do banzo superior, conforme apresentada na Figura 2. A carga é proveniente do dimensionamento da mesma treliça admitindo todas as barras com área  $9,00 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ .

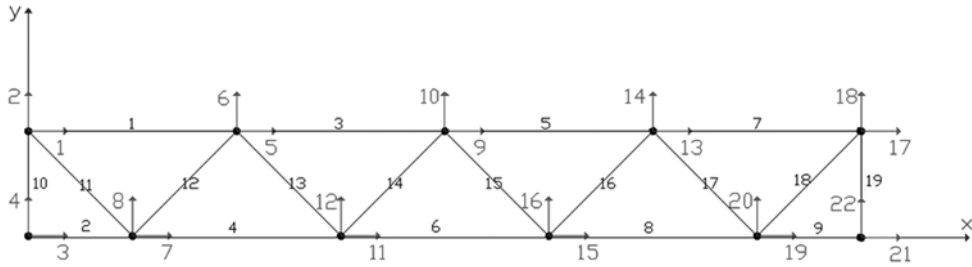
Figura 2 – Estrutura de referência





O correspondente modelo de elementos finitos consiste em 19 barras com um total de 22 graus de liberdade como está apresentado na Figura 3.

Figura 3 – Modelo de elementos finitos da treliça



Como variáveis de projeto, tomaram-se as coordenadas dos nós de graus de liberdade 1, 2, 5, 6, 7, 13, 14, 17, 18 e 19.

Os dois apoios são indesejavéis, isto é, os graus de liberdade 3, 4, 21 e 22 têm os movimentos restringidos.

Foram utilizados dois tipos de perfis laminados em forma de dupla cantoneira de abas iguais e opostas, com áreas de  $3,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  para as barras dos bantos superior e inferior e  $2,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  para as demais barras.

Os comprimentos, áreas e pesos unitários das barras estão resumidos na Tabela 2.

Tabela 2 – Características das barras

Barras		Comprimento (m)	Área (m <sup>2</sup> )	Peso unitário (N)
Banzo superior	1, 3, 5, e 7	0,50	$3,5 \times 10^{-3}$	47
Banzo Inferior	4, 6 e 8	0,50	$3,5 \times 10^{-3}$	47
	2 e 9	0,25		24
Montantes	10 e 19	0,25		17
Diagonais	11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 e 18	$\approx 0,35$	$2,5 \times 10^{-3}$	24

Logo, o peso da estrutura de referência é, aproximadamente, 603 N.

### *Implementação computacional*

O programa desenvolvido no MATLAB consiste num algoritmo principal e três sub-rotinas. O algoritmo principal é o de otimização propriamente dita. No caso da presente pesquisa, foi utilizada a Programação Matemática com a técnica dos pontos interiores. No algoritmo principal, além de constar a técnica de otimização, ainda são informadas as coordenadas iniciais ( $x_0$ ) dos nós que são as variáveis de projeto e os valores mínimos (lb) e máximos (ub) assumidos por essas variáveis. Estas informações estão contidas na Tabela 3.

Tabela 3 – Coordenadas iniciais e limites das variáveis de projeto.

Variáveis de projeto	1	2	5	6	7	13	14	17	18	19
Coordenadas iniciais ( $x_0$ )	0	0,25	0,50	0,25	0,25	1,50	0,25	2,00	0,25	1,75
Valores mínimos ( $lb$ )	0	0,06	0,125	0,135	0,25	1,05	0,135	1,75	0,06	1,50
Valores máximos ( $ub$ )	0,25	0,25	0,95	0,25	0,50	1,875	0,25	2,00	0,25	1,75

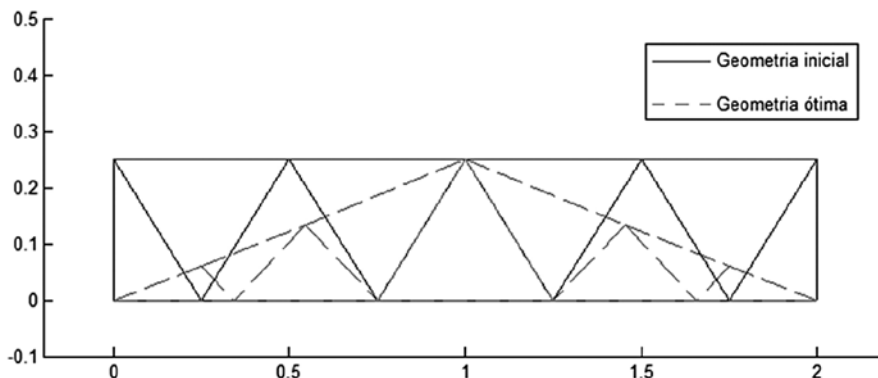
Os limites das variáveis de projeto apresentados na Tabela 3, que constituem restrições geométricas, foram adotados prezando-se, também, aspectos estéticos (arquitetônicos) da cobertura metálica.

O algoritmo principal faz a solução gráfica e apresenta o resultado da simulação. Para a solução gráfica, interage com o algoritmo que atualiza as coordenadas dos nós a cada etapa do processo e coleta informações de outros dois algoritmos: o da função objetivo e o das restrições. No algoritmo da função objetivo, são apresentadas as áreas das seções das barras, calculados seus comprimentos, atualizados de acordo com os valores das variáveis de projeto e, por fim, o valor da função que representa o peso da estrutura. No algoritmo das restrições, faz-se a montagem das matrizes topológica e de rigidez, a consideração das condições de contorno, o cálculo dos deslocamentos e tensões e a verificação das restrições. Este último recorre ao CALFEM (*Computer Aided Learning of the Finite Element Method*) para fazer a análise estrutural do problema pelo Método dos Elementos Finitos.

### Resultados comentados

Na Figura 4, estão apresentadas as soluções gráficas das geometrias inicial e ótima e, depois, apresentam-se os resultados numéricos obtidos na simulação.

Figura 4 – Solução gráfica das geometrias de referência e ótima.



Observa-se pela Figura 4 que, após o processo de otimização geométrica, a treliça de contorno externo retangular recai numa clássica tesoura de estruturas de coberturas. É bastante nítido que a modificação na posição dos nós da treliça conduz a uma redução no consumo de material e, conseqüentemente, no custo.

Na Tabela 4, apresentam-se os resultados numéricos da otimização geométrica retornados pelo programa computacional.

Tabela 4 – Resultados do processo iterativo de otimização

Iteração	Nº de cálculos acumulados da função	Valor aproximado da função (peso) $f(x) = W$	Viabilidade
0	11	547,72	0
1	23	527,43	0
2	34	498,96	0
3	45	499,50	0
4	57	499,32	0
5	71	499,23	0
6	82	498,96	0
7	94	498,95	0
8	107	498,78	0
9	118	498,18	0
10	129	498,18	0
11	140	498,18	0
12	151	498,06	0
13	162	498,06	0
14	174	498,06	0
15	185	498,06	0

Pela Tabela 4, pode-se verificar que foram necessários 185 cálculos da função, em 16 iterações, para alcançar o valor ótimo da função objetivo, que é de aproximadamente 498,06 N, o equivalente a uma redução de 17% em relação ao peso da estrutura de referência. A cada iteração, foram feitos de 11 a 14 cálculos da função objetivo, uma vez que são dadas perturbações às diversas variáveis de projeto para obtenção do gradiente. Os valores zero da coluna 'viabilidade' indicam que todas as restrições foram viáveis.

Na Tabela 5, estão apresentados os valores aproximados das coordenadas dos nós das variáveis de projeto na solução ótima  $X^*$ .

Tabela 5 – Coordenadas ótimas das variáveis de projeto.

Variáveis de projeto	1	2	5	6	7	13	14	17	18	19
Coordenadas ótimas ( $x^*$ )	0,25	0,06	0,55	0,135	0,34	1,45	0,135	1,75	0,06	1,66

Comparando os valores da Tabela 5 com os limites apresentados na Tabela 3, evidencia-se que a variável 1 assumiu o seu valor máximo e as variáveis 2, 6, 14, 17 e 18 assumiram os valores mínimos atribuídos a cada uma delas. As variáveis 5, 7, 13 e 19 obtiveram valores de coordenadas próximos das médias entre seus limites mínimos e máximos. Pode-se concluir, então, que as restrições geométricas são, em sua maioria, ativas.

Na Tabela 6, são apresentados os valores de cada uma das restrições de desigualdade ( $\leq 0$ ), considerando a solução ótima do problema. Ao todo são apresentados 37 valores: 18 deles estão associados às restrições de deslocamento, calculadas apenas para os graus de liberdade não restritos e os 19 valores restantes referem-se aos valores de tensões calculados para cada uma das barras da treliça. Como não há restrições de igualdade, não há valores a serem apresentados.

Tabela 6 – Valores das restrições de projeto

Deslocamentos		Tensões	
Graus de liberdade não restritos	Valores	Barras	Valores
1	-0,997	1	-0,755
2	-0,961	2	-0,994
5	-0,999	3	-0,760
6	-0,965	4	-0,998
7	-0,999	5	-0,760
8	-0,956	6	-0,996
9	-0,999	7	-0,755
10	-0,956	8	-0,998
11	-0,997	9	-0,995
12	-0,961	10	-0,653
13	-0,999	11	-0,994
14	-0,956	12	-0,994
15	-0,996	13	-0,998
16	-0,971	14	-0,998
17	-0,999	15	-0,998
18	-0,965	16	-0,998
19	-1,000	17	-0,994
20	-1,000	18	-0,994
-	-	19	-0,653

Pela Tabela 6, percebe-se que não há restrição mecânica ativa (próxima de zero), já que todos os valores calculados são bem menores que zero.

### *Outras considerações*

Foram feitas outras simulações, conservando os dados apresentados anteriormente, porém, considerando apenas as restrições de deslocamento sem as restrições de tensão. Para este último caso, o número de cálculos da função (155) e o número de iterações (12) foram menores do que aqueles apresentados na seção anterior; dessa forma, requereu-se

menos esforço computacional. Os valores ótimos das coordenadas (consequentemente, a geometria) e da função objetivo, bem como das restrições de deslocamento, foram, aproximadamente, iguais ao caso já apresentado. O valor ótimo da função apresentou discrepância apenas a partir da 5ª casa decimal.

Depois, consideraram-se apenas as restrições de tensão. Nesta simulação, ao longo de 16 iterações, foram feitos 184 cálculos da função objetivo. Todos os resultados manifestaram variações insignificativas em relação ao caso exposto na seção anterior, como o valor ótimo da função que apresentou discrepância apenas a partir da 8ª casa decimal.

Outro teste feito contemplou a influência da modificação das áreas das barras nos dados de entrada. Para isto, foram simulados três casos: todas as barras com áreas de  $1,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $2,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  e  $3,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ . As coordenadas ótimas foram, aproximadamente, iguais em todos os três casos e, também, em relação ao caso da seção anterior, assim, a geometria ótima foi a mesma. Para o caso da menor área, foram feitos mais cálculos da função num maior número de iterações quando comparado aos outros dois simulados nessa etapa. Nos três casos, alcançou-se uma redução de 18,4% (1,4% a mais em relação ao caso da treliça com duas seções diferentes) na função que representa o peso da estrutura; isso evidencia que as áreas das barras não tiveram influência relevante sobre a geometria final.

Os resultados da simulação expostos na seção anterior são oriundos de contribuições de dois casos: todas as barras com área  $2,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  e todas as barras com área  $3,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ .

### *Comentários finais e conclusões*

Desenvolveu-se, neste trabalho, um procedimento para otimização geométrica de treliças planas de coberturas metálicas, visando à minimização do peso da estrutura, sujeita a restrições de equilíbrio estático, de deslocamentos e tensões nas barras. Foi utilizado um algoritmo elaborado pelos autores deste artigo no MATLAB e a análise estrutural foi feita através do emprego do CALFEM.

Evidencia-se que foi alcançada uma redução de peso de aproximadamente 17% em relação à configuração inicial da estrutura. Kripka et al. (2008) obtiveram reduções de peso que variaram de 10 a 32% em relação à configuração inicial. Contudo, convém destacar, que em seu trabalho foram feitas avaliações, admitindo como variáveis de projeto as coordenadas dos nós (praticamente, todas as coordenadas dos banzos) e as áreas das barras, além de considerar as restrições de flambagem nos elementos comprimidos, um carregamento com intensidade dez vezes menor e o vão da treliça um pouco mais reduzido, apesar da mesma disposição de barras.

Simulações, considerando restrições de deslocamento e tensão individualmente, não apresentaram variações em relação ao caso mais abrangente. Além disso, simulações, modificando as áreas das barras nos dados de entrada conduziram à mesma geometria,

a uma redução de 18,4% do peso em relação à configuração inicial e atenderam perfeitamente às restrições de projeto.

No problema de otimização geométrica abordado neste trabalho, em geral, a maior parte das restrições laterais (geométricas) foram ativas na solução, definindo a forma final da geometria, enquanto que as restrições mecânicas (de tensões e deslocamentos) apresentaram folgas na solução ótima. As restrições geométricas adotadas consideraram aspectos arquitetônicos da estrutura.

As funções envolvidas nos cálculos de estruturas são, em sua maioria, não-lineares e não-convexas (isto é, apresentam vários pontos de ótimo), sendo as variáveis melhor descritas por valores discretos. Para problemas dessa natureza, as técnicas baseadas em Programação Matemática, normalmente, apresentam severas limitações, já que esta faz a otimização diretamente sobre a função objetivo, através de uma análise sobre o espaço de projeto (contínuo). Qualquer ponto no espaço é candidato à solução do problema. Isso pode acarretar um sentido físico puramente matemático às soluções encontradas. Dessa forma, pode-se obter soluções ótimas locais e, não, globais. Como alternativa, pode-se buscar a heurística para a solução dos problemas práticos.

O inconveniente do uso da técnica dos pontos interiores pode estar no número elevado de cálculos da função numa determinada simulação em comparação com outros métodos de Programação Matemática; entretanto, o esforço computacional pode ser menor se comparado a alguns métodos heurísticos como o método do Reconhecimento Simulado, apesar de neste, a convergência para a vizinhança da solução ótima ser rápida.

As treliças, em particular, se apresentam como objetos bastante propícios nos processos de otimização, uma vez que a redução no peso próprio pode ser obtida não apenas pela alteração nas dimensões das seções transversais, mas também pela mudança na geometria e topologia da estrutura.

De forma geral, pode-se dizer que as técnicas de otimização proporcionam grande economia no projeto de estruturas e, mais do que isso, os resultados dessa pesquisa mostraram a utilidade e potencial das técnicas de otimização na elaboração de projetos que tangem os seguintes aspectos: segurança, economia, durabilidade, estética e funcionalidade; fundamentais para a qualidade da edificação e satisfação dos atores envolvidos: profissionais e clientela.

## ***Referências***

BUZINELLI, D. V. *Projeto de elementos estruturais em alumínio*. São Carlos, 2000. 160p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2000.

CALFEM. Computer Aided Learning of the Finite Element Method. Division of Structural Mechanics, Lund University, Suecia, 1978. Disponível em: <<http://www.byggmek.lth.se/Calfem>>. Acesso em 26 jan. 2012.

KRIPKA, M.; DREHMER, G. A. Determinação da Geometria e Configuração Ótimas em Treliças Metálicas de Banzos Paralelos. In: PRAVIA, Zacarias M. Chamberlain; KRIPKA, Moacir. *Construção Metálica: Estudos e Pesquisas Recentes*. Passo Fundo – RS: UPF Editora, 2005. p. 100-119.

KRIPKA, M.; PRAVIA, Z. M. C.; DIAS, M. M. S.; MEDEIROS, G. F. Dimensionamento Otimizado de Treliças de Alumínio: Análise Numérica e Experimental. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO DA CONSTRUÇÃO METÁLICA, 2008, São Paulo – SP. 8p.

MEDEIROS, G. F.; TISOT, G. D.; KRIPKA, M. Obtenção de Configurações Econômicas para o Projeto de Tesouras em Aço. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO DA CONSTRUÇÃO METÁLICA, 2010, São Paulo – SP. 9p.

METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A. W.; ROSENBLUTH, M. N.; TELLER, A. H.; TELLER, E. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *J. Chem. Phys*, v. 21, p. 1087-1092, 1953.

*Artigo recebido em: 18 jun. 2013*

*Aceito para publicação em 16 ago. 2013*