

Modelagem dinâmica do manipulador RD5NT

Dynamic modeling of the manipulator RD5NT

Eduardo Monteiro Aguiar*

Este artigo apresenta o desenvolvimento de um modelo matemático dinâmico para o manipulador RD5NT da DIDACTA ITALIA. Pretende-se que o modelo seja usado no desenvolvimento de estratégias de controle de posição e trajetória. A escolha do tipo de modelagem tem a finalidade de identificar os parâmetros físicos do manipulador.

This article presents the development of a dynamic mathematical model for the DIDACTA ITALIA RD5NT manipulator. The model is intended to be used in the development of strategies of position-trajectory control. The choice modeling type aims at identifying the physical parameters of the manipulator.

Palavras-chave: Automação. Modelagem. Robótica.

Keywords: Automation. Modeling. Robotics.

Introdução

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense câmpus Campos-Centro possui três manipuladores, modelo RD5NT, adquiridos da DIDACTA ITALIA, usados como material didático na disciplina de Robótica do Curso de Engenharia de Automação. A inexistência de um modelo matemático do equipamento e as escassas informações a respeito dos seus parâmetros geométricos e dinâmicos dificultam uma exploração maior dos equipamentos como objeto educacional.

O modelo matemático dinâmico tem por finalidade o estudo da evolução temporal do sistema, permitindo o desenvolvimento de estratégias de controle a ele aplicadas, com o intuito de realização de determinada tarefa. Nas palavras de Aguirre, “Um modelo matemático de um sistema real é um análogo matemático que representa algumas características observadas em tal sistema.” (AGUIRRE, 2000, p. 38). Assim sendo, a finalidade do modelo matemático dinâmico é enfatizar determinados aspectos físicos do dispositivo, tais como posição no espaço e velocidade.

É propósito deste trabalho, além do desenvolvimento do modelo dinâmico do manipulador, revelar algumas características físicas do equipamento, até então desconhecidas. Opta-se pelo método de modelagem conhecido como modelagem caixa-branca ou modelagem pela física (AGUIRRE, 2000, p. 37).

A abordagem escolhida para a modelagem dinâmica é o método de Newton-Euler devido ao esforço computacional notadamente menor, se comparada à formulação de Lagrange. Embora o método de Newton-Euler apresente esta vantagem, ele necessita

* Mestre em Engenharia Mecânica (UFF). Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense - Campos dos Goytacazes/RJ - Brasil. E-mail: eaguiar@ifff.edu.br.

de um sistema de coordenadas ortogonais para descrever a posição do objeto, o que leva à utilização de matrizes de transformação homogênea (YOSHIKAWA, 1989, p. 81).

Manipulador robótico RD5NT

O manipulador robótico RD5NT é constituído por quatro juntas rotativas (junta da base; junta do ombro; junta do cotovelo; junta do punho) e por uma pinça, cujo comando resume-se a abrir ou fechar o dispositivo, sem nenhum controle da força de atuação. A estrutura possui quatro graus de liberdade. A Figura 1 apresenta o manipulador RD5NT com a indicação das juntas do dispositivo.

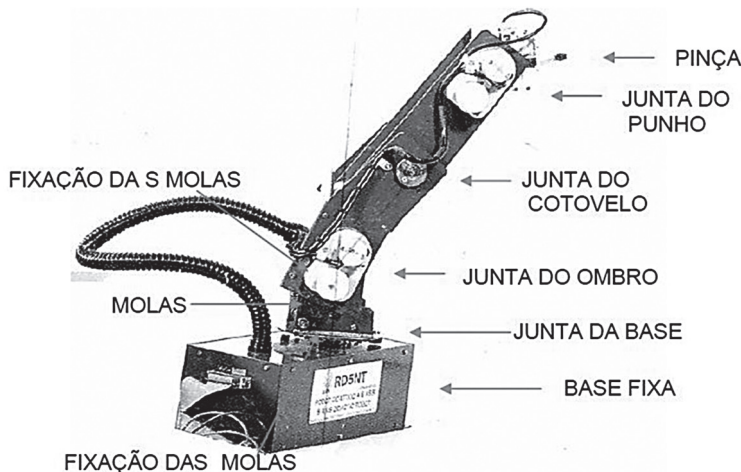


Figura 1 - Manipulador robótico RD5NT

Fonte: Manual DIDACTA ITALIA

Método de Newton-Euler

O método segmenta o manipulador em tantas partes quantos forem os seus elos. A Figura 2 representa um manipulador de três elos onde θ_1 , θ_2 e θ_3 identificam os ângulos das juntas.

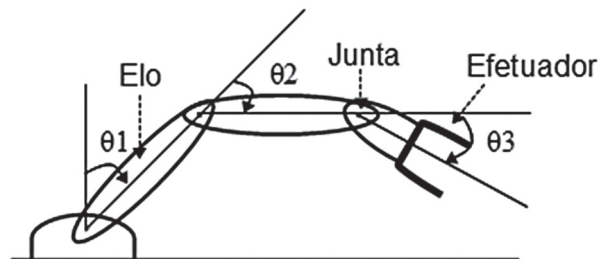


Figura 2 - Manipulador de três elos

Fonte: YOSHIKAWA (1988, p. 100-102)

Como primeiro passo, o manipulador é desmembrado em quantos elos existirem e calculam-se, no sentido da base para o efetuador, os vetores de aceleração e velocidade para cada elo, conforme a Figura 3. Em sequência, calcula-se a força e o momento que devem ser aplicados no centro de massa de cada elo, como ilustra a Figura 4. Tomando o sentido do efetuador para a base, calculam-se a força e o momento que devem ser aplicados à junta i para a realização do movimento, conforme a Figura 5. Por fim, com os dados obtidos nos passos anteriores, calcula-se o torque aplicado em cada junta, conforme a Figura 6.

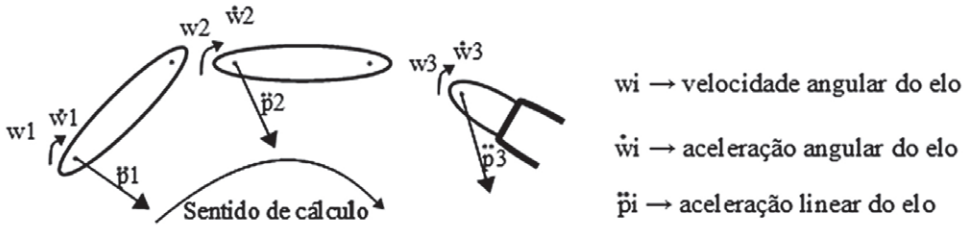


Figura 3 - Cálculo das acelerações e velocidades de cada elo

Fonte: YOSHIKAWA (1988, p. 100-102)

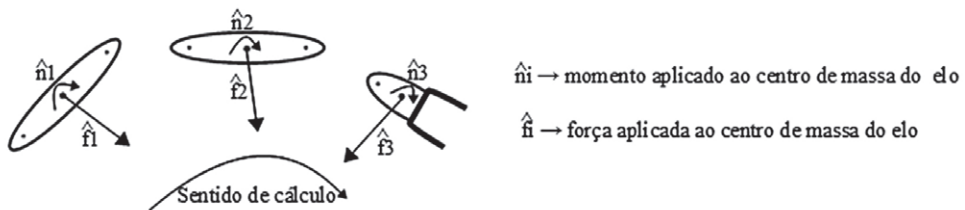


Figura 4 - Cálculo do momento e força aplicada ao centro de massa

Fonte: YOSHIKAWA (1988, p. 100-102)

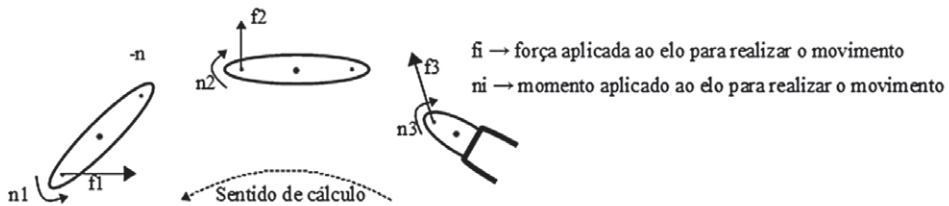


Figura 5 - Cálculo da força e momento para a realização do movimento

Fonte: YOSHIKAWA (1988, p. 100-102)

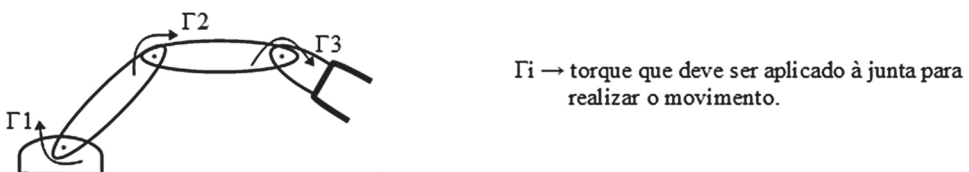


Figura 6 - Cálculo do torque em cada junta

Fonte: YOSHIKAWA (1988, p. 100-102)

As equações de (1) a (14) constituem a formulação de Newton-Euler aplicada a juntas rotativas.

$${}^i w_i = {}^{i-1} R_i^T \cdot {}^{i-1} w_{i-1} + e_z * (\dot{\theta})_i \quad (1)$$

$${}^i (\dot{w})_i = {}^{i-1} R_i^T \cdot {}^{i-1} (\dot{w})_{i-1} + e_z * (\ddot{\theta}) + ({}^{i-1} R_i^T \cdot {}^{i-1} w_{i-1}) \times e_z * (\dot{\theta}) \quad (2)$$

$${}^i (\ddot{p})_i = {}^{i-1} R_i^T \cdot ({}^{i-1} (\ddot{p})_{i-1} + {}^{i-1} (\dot{w})_{i-1} \times {}^{i-1} (\hat{p})_{i-1} + {}^{i-1} w_{i-1} \times ({}^{i-1} w_{i-1} \times {}^{i-1} (\hat{p})_{i-1})) \quad (3)$$

$${}^i \ddot{p}_i = {}^{i-1} R_i^T \cdot ({}^{i-1} (\ddot{p})_{i-1} + {}^{i-1} \dot{w}_{i-1} \times {}^{i-1} (\hat{p})_{i-1} + {}^{i-1} w_{i-1} \times ({}^{i-1} w_{i-1} \times {}^{i-1} (\hat{p})_{i-1})) \quad (4)$$

$${}^i \ddot{p}_i = {}^{i-1} R_i^T \cdot ({}^{i-1} (\ddot{p})_{i-1} + {}^{i-1} (\dot{w})_{i-1} \times {}^{i-1} (\hat{p})_{i-1} + {}^{i-1} w_{i-1} \times ({}^{i-1} w_{i-1} \times {}^{i-1} (\hat{p})_{i-1})) \quad (5)$$

$${}^i \ddot{s}_i = {}^i (\ddot{p})_i + {}^i (\dot{w})_i \times {}^i (s)_i + {}^i w_i \times ({}^i w_i \times {}^i (s)_i) \quad (6)$$

$${}^i (\hat{f})_i = m_i \cdot {}^i (\ddot{s})_i \quad (7)$$

$${}^i (\ddot{p})_i = {}^{i-1} R_i^T \cdot ({}^{i-1} (\ddot{p})_{i-1} + {}^{i-1} (\dot{w})_{i-1} \times {}^{i-1} (\hat{p})_{i-1} + {}^{i-1} w_{i-1} \times ({}^{i-1} w_{i-1} \times {}^{i-1} (\hat{p})_{i-1})) \quad (8)$$

$${}^i (\ddot{s})_i = {}^i (\ddot{p})_i + {}^i (\dot{w})_i \times {}^i (s)_i + {}^i w_i \times ({}^i w_i \times {}^i (s)_i) \quad (9)$$

$${}^i (\hat{f})_i = m_i \cdot {}^i (\ddot{s})_i \quad (10)$$

$${}^i (\hat{n})_i = {}^i I_i \cdot {}^i (\dot{w})_i + {}^i w_i \times ({}^i I_i \cdot {}^i w_i) \quad (11)$$

$${}^i f_i = {}^i R_{i+1} \cdot {}^{i+1} f_{i+1} + {}^i \hat{f}_i \quad (12)$$

$${}^i n_i = {}^i R_{i+1} \cdot {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i (\hat{n})_i + {}^i \hat{s}_i \cdot {}^i (\hat{f})_i + {}^i (\hat{p})_{i+1} \times ({}^i R_{i+1} \cdot {}^{i+1} f_{i+1}) \quad (13)$$

$$\Gamma_i = e_z^T \cdot {}^i n_i \quad (14)$$

Em seqüência, os elementos pertinentes às equações de (1) a (14) são elencados.

(w) : velocidade angular ;	(I) : inércia do eixo da junta ;
(\dot{w}) : aceleração angular ;	(m) : massa do elo ;
(\ddot{p}) : aceleração linear ;	(f) : força desenvolvida na junta ;
(\hat{p}) : distância entre juntas contíguas ;	(n) : momento desenvolvido na junta ;
(s) : distância entre a junta e centro de massa ;	$(\ddot{\theta})$: aceleração do ângulo de junta ;
(\ddot{s}) : aceleração linear do centro de massa ;	$(\dot{\theta})$: velocidade do ângulo de junta ;
(\hat{f}) : força aplicada ao centro de massa ;	(Γ) : torque aplicado do eixo da junta ;
(\hat{n}) : momento aplicado ao centro de massa ;	${}^{(i-1)} R_i$: Matriz de transformação homogênea.

Fonte: elaborado pelo autor

Método de Denavit-Hartenberg

Matriz de transformação homogênea

Uma matriz de transformação homogênea é um conjunto de elementos que indicam as rotações e translações necessárias para que um ponto localizado em um conjunto de eixos coordenados seja expresso em outro conjunto de eixos coordenados (YOSHYKAWA, 1989, p. 24).

O método de Denavit-Hartenberg (DH) estabelece um conjunto de translações e rotações que permitem a elaboração de uma matriz de transformação homogênea genérica. Os parâmetros de DH são determinados obedecendo ao seguinte procedimento:

- a(i-1): Translação ao longo do eixo $x(i-1)$, até o eixo z_i ;
- d_i : Translação ao longo do eixo z_i , até a origem O_i ;
- $\alpha(i-1)$: Rotação sobre o eixo $x(i-1)$ no sentido de z_i para $z(i-1)$, usando a regra da mão direita para determinar o sentido positivo;
- θ_i : Rotação sobre o eixo z_i no sentido de x_i para $x(i-1)$, usando a regra da mão direita para determinar o sentido positivo.

A Figura 7 apresenta, em sequência, a aplicação do método. A letra Σ representa os conjuntos de eixos coordenados e a letra O representa a origem dos mesmos. Para melhor visualização e também por não ser relevante para este trabalho, o eixo Y foi omitido.

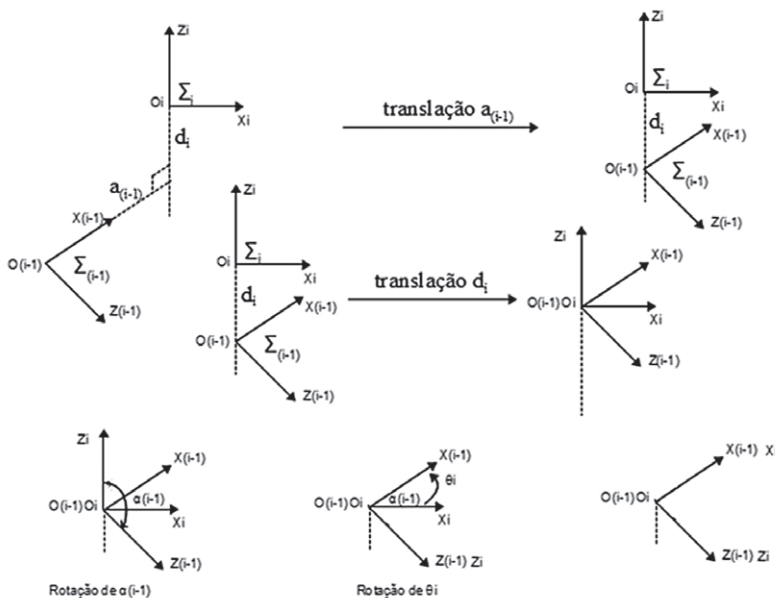


Figura 7 - Procedimentos de rotações e translações

Fonte: Do autor (2014)

Os parâmetros supracitados dão origem à matriz de transformação homogênea de caráter geral elaborada por Denavit-Hartenberg.

$${}^{(i-1)}R_i = \begin{pmatrix} \cos(\Theta_i) & -\sin(\Theta_i) & 0 & a_{(i-1)} \\ \sin(\Theta_i) \cdot \cos(\alpha_{(i-1)}) & \cos(\Theta_i) \cdot \cos(\alpha_{(i-1)}) & -\sin(\alpha_{(i-1)}) & -\sin(\alpha_{(i-1)}) \cdot d_i \\ \sin(\Theta_i) \cdot \sin(\alpha_{(i-1)}) & \cos(\Theta_i) \cdot \sin(\alpha_{(i-1)}) & \cos(\alpha_{(i-1)}) & \cos(\alpha_{(i-1)}) \cdot d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Fonte: YOSHIKAWA (1988, p. 39)

Identificação dos parâmetros

Desenvolvimento das matrizes de transformação homogêneas

O método Denavit-Hartenberg (DH) posiciona em cada junta um sistema de eixos ortogonais, obedecendo três regras quanto à disposição destes eixos (KHALIL, 2002, p. 36).

1. o eixo z_i é colocado ao longo do eixo de movimento da junta i ;
2. o eixo x_i é posicionado ortogonalmente aos eixos z_i e z_{i+1} , preferencialmente colocado sobre o elo que interliga as juntas e direcionado para o elemento final do manipulador;
3. o eixo y_i completa o sistema utilizando a regra da mão direita.

Para determinação do modelo geométrico direto, a Figura 8 apresenta o conjunto de juntas do manipulador, utilizando-se dos símbolos convencionais usados para juntas rotativas (YOSHIKAWA, 1988, p. 3).

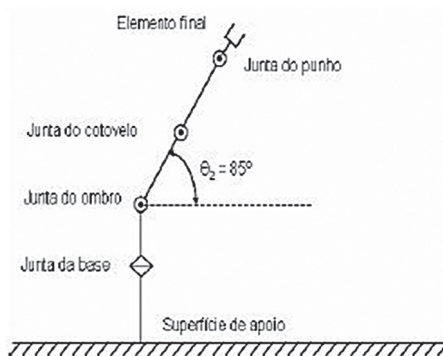


Figura 8 - Configuração das juntas do manipulador

Fonte: Do autor (2014)

A Figura 9 apresenta a disposição dos eixos coordenados ortogonais para levantamento dos parâmetros de Denavit-Hartenberg. A obtenção da distância entre cada sistema coordenado, em valores métricos, obtém-se com um paquímetro de precisão.

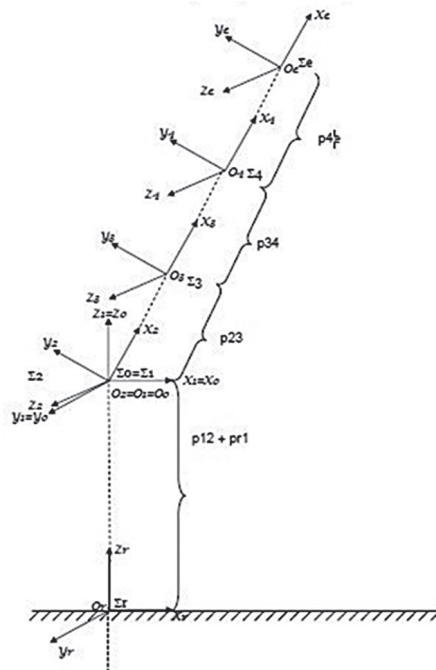


Figura 9 - Disposição dos eixos coordenados nas juntas do manipulador

Fonte: Do autor (2014)

A Tabela 1 identifica as medições realizadas entre cada sistema de eixos coordenados e o significado da abreviatura para cada distância.

Tabela 1 - Medições entre sistemas de eixos ortogonais

Distância	Símbolo	Valor
Distância entre a superfície de apoio e a base	pr1	0,105 m
Distância entre a junta da base e o eixo da junta do ombro	p12	0,127 m
Distância entre os eixos da junta do ombro e do cotovelo	p23	0,115 m
Distância entre os eixos da junta do cotovelo e do punho	p34	0,157 m
Distância entre os eixos da junta do punho e do efetuador	p4e	0,092 m

Fonte: Do autor (2014)

As medições da Tabela 1 e a correlação angular entre eixos permitem determinar os parâmetros DH. A Tabela 2 apresenta os dados que permitem a determinação das diversas matrizes de transformação.

Tabela 2 - Parâmetros de Denavit-Hartenberg

${}^{(i-1)}T_i$	$a_{(i-1)}$ m	$\alpha_{(i-1)}$ rad	d_i m	θ_i rad
${}^R T_0$	0	0	0,232	0
${}^0 T_1$	0	0	0	θ_1
${}^1 T_2$	0	$\pi/2$	0	θ_2
${}^2 T_3$	0,115	0	0	θ_3
${}^3 T_4$	0,157	0	0	θ_4
${}^4 T_e$	0,092	0	0	0

Fonte: Do autor (2014)

Os valores tabulados resultam nas matrizes de transformação homogênea da Figura 10.

$$\begin{aligned}
 {}^R T_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0,229 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & {}^0 T_1 &= \begin{pmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 {}^1 T_2 &= \begin{pmatrix} C2 & -S2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S2 & C2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & {}^2 T_3 &= \begin{pmatrix} C3 & -S3 & 0 & 0,117 \\ S3 & C3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 {}^3 T_4 &= \begin{pmatrix} C4 & -S4 & 0 & 0,155 \\ S4 & C4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & {}^4 T_e &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,093 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Figura 10 - Matrizes de transformação homogênea parciais

Fonte: Do autor (2014)

Faz-se necessário estabelecer símbolos para a representação dos elementos das matrizes, que são extensos. Desta forma, convencionou-se:

$\cos(\theta_1) \rightarrow C1$; $\cos(\theta_2) \rightarrow C2$; $\cos(\theta_3) \rightarrow C3$; $\cos(\theta_4) \rightarrow C4$; $\sin(\theta_1) \rightarrow S1$;
 $\sin(\theta_2) \rightarrow S2$; $\sin(\theta_3) \rightarrow S3$; $\sin(\theta_4) \rightarrow S4$; $\cos(\theta_2+\theta_3) \rightarrow C23$; $\cos(\theta_2+\theta_3+\theta_4) \rightarrow C234$.

Fonte: YOSHIKAWA, 1988, p. 42

Medição dos centros de massa

Na determinação do centro de massa de cada elo, usa-se o seguinte método: coloca-se o elo sobre uma aresta de 4 mm de espessura, tomando-se o cuidado de manter o paralelismo entre o eixo da junta e a aresta. Ajusta-se o posicionamento até

atingir o ponto de equilíbrio. Obtido o equilíbrio, determina-se o centro de massa pelo ponto médio da aresta. Os valores estão elencados na Tabela 3.

Tabela 3 - Determinação dos centros de massa de cada elo

ELO	PONTO	EIXO	SÍMBOLO	DISTÂNCIA
BASE	CM1	Z1	s11	0,036 m
OMBRO	CM2	X2	s22	0,017 m
COTOVELO	CM3	X3	s33	-0,01 m
PUNHO	CM4	X4	s44	0,02 m

Fonte: Do autor (2014)

Identificação do torque gravitacional do jogo de molas

No manipulador, um conjunto de três molas, interligando a base fixa ao elo do ombro, exerce uma força contrária à força peso atuante no centro de gravidade do elo da junta do ombro. Para identificar a rigidez da mola, usa-se o seguinte procedimento: uma das extremidades da mola é fixada a uma mesa e a outra é tracionada por um dinamômetro. O deslocamento da mola é medido com um paquímetro, sendo relacionado à força atuante. A Tabela 4 apresenta os resultados.

Tabela 4 - Força do conjunto de molas

DADOS EXPERIMENTAIS DA MOLA	
Deslocamento (metro)	Força (Newton)
0,064	4
0,074	8
0,084	12
0,094	16
0,104	20
0,114	24

Fonte: Do autor (2014)

Os dados da Tabela 4 permitem o levantamento da equação da força que efetivamente atua no centro de massa do elo do ombro em função do ângulo da junta (θ_2).

$$f(\text{efetiva}) = -0,1147 \cdot \cos(\theta_2 - 0,787) \quad (16)$$

O torque atuante sobre o centro de massa do elo do ombro (s_{22}) com sentido contrário ao torque provocado pela gravidade é encontrado pela equação:

$$g_{\text{mola}} = -s_{22} \cdot 0,1147 \cdot \cos(\theta_2 - 0,787) \quad (17)$$

A equação (18) permite calcular o torque gravitacional atuante na junta do ombro sem o efeito da mola:

$$g_2 = p_{23} \cdot m_3 \cdot C_2 \cdot \text{grv} + s_{22} \cdot m_2 \cdot C_2 \cdot \text{grv} + p_{23} \cdot m_4 \cdot C_2 \cdot \text{grv} + (p_{34} \cdot m_4 - s_{33} \cdot m_3) \cdot \text{grv} \cdot C_{23} + s_{44} \cdot m_4 \cdot \text{grv} \cdot C_{234}. \quad (18)$$

Adicionando o efeito das molas (17) no torque gravitacional atuante no ombro (18), calcula-se o valor absoluto da gravidade (grv) pela equação (19).

$$g_2 = p_{23} \cdot m_3 \cdot C_2 \cdot \text{grv} + s_{22} \cdot m_2 \cdot C_2 \cdot \text{grv} + p_{23} \cdot m_4 \cdot C_2 \cdot \text{grv} + (p_{34} \cdot m_4 - s_{33} \cdot m_3) \cdot \text{grv} \cdot C_{23} + s_{44} \cdot m_4 \cdot \text{grv} \cdot C_{234} - s_{22} \cdot 0,1147 \cdot \cos(\theta_2 - 0,787) \quad (19)$$

Medição da massa de cada elo

Utilizando balanças de precisão, determina-se a massa de cada elo. Os resultados obtidos estão contidos na Tabela 5.

Tabela 5 - Massa de cada elo do manipulador

ELO	SÍMBOLO	MASSA (kg)
BASE	m1	1,271
OMBRO	m2	1,433
COTOVELO	m3	2,675
PUNHO	m4	0,324

Fonte: Do autor (2014)

Medição do momento de inércia de cada elo

O momento de inércia em relação ao eixo de rotação de cada junta é determinado adotando a técnica do pêndulo físico. Considerando que os eixos estão em paralelo, aplica-se o teorema dos eixos paralelos de Steiner (NUSSENZVEIG, 2000, p. 259). Esta abordagem permite estabelecer um conjunto de equações para cálculo do momento de inércia em relação ao eixo da junta. A Figura 11 representa o procedimento.

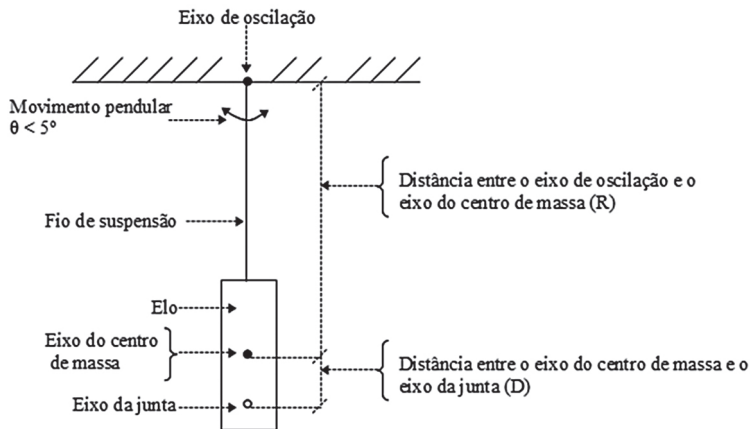


Figura 11 - Procedimento para determinação da inércia da junta de rotação

Fonte: Do autor (2014)

O período em segundos, para pequenos ângulos de oscilação, pode ser encontrado pela equação (20) (CAPARICA, 2007, p. 390).

$$\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot R}} \quad (20)$$

Modificando a equação (20), encontra-se o valor do momento de inércia em relação ao centro de massa.

$$I = \frac{\tau^2 \cdot m \cdot g \cdot R}{(2 \cdot \pi)^2} \quad (21)$$

Onde:

$I \rightarrow$ momento de inércia em relação ao centro de massa;

$m \rightarrow$ massa do elo em kg;

$\tau \rightarrow$ período de oscilação;

$R \rightarrow$ distância entre o eixo de oscilação e o centro de massa.

$$I_{\text{pêndulo}} = \frac{\tau^2 \cdot m \cdot g \cdot R}{(2 \cdot \pi)^2} \quad (22)$$

$$I_{\text{centro de massa}} = m_{\text{elo}} \cdot R^2 - I_{\text{pêndulo}} \quad (23)$$

$$I_{\text{junta}} = m_{\text{elo}} \cdot D^2 + I_{\text{centro de massa}} \quad (24)$$

Medem-se então os valores de m , R e D . Para uma melhor precisão, usa-se um cronômetro para medir o tempo de dez oscilações completas, obtendo como resultado a média dos valores encontrados. A Tabela 6 colige os dados dos momentos de inércia de cada elo.

Tabela 6 - Momentos de inércia

ELO	SÍMBOLO	MOMENTO DE INÉRCIA
BASE	Izz1	0,002 kgm ²
OMBRO	Izz2	0,0048 kgm ²
COTOVELO	Izz3	0,0131 kgm ²
PUNHO	Izz4	0,00071 kgm ²

Fonte: Do autor (2014)

O manipulador utiliza um motor C.C. da Maxon, modelo 2130.906-22112-050, cujos dados estão reunidos da Tabela 7.

Tabela 7 - Dados do motor de acionamento e da caixa de engrenagem

GRANDEZA	SÍMBOLO	RELAÇÃO	VALOR
Resistência de armadura	R_a	–	31,9 Ω
Indutância de armadura	L_a	–	$1,71 \cdot 10^{-3}$ H
Inércia do eixo motor	J_{mi}	–	$4,02 \cdot 10^{-7}$ kgm ²
Constante de tempo do motor	–	J_{mi}/b_{mi}	$43,2 \cdot 10^{-3}$ s
Coefficiente de atrito viscoso	b_{mi}	–	$9,3 \cdot 10^{-6}$ kgm ² /s
Constante de torque	k_t	–	$17,2 \cdot 10^{-3}$ Nm/A
Constante de velocidade	k_b	–	$3 \cdot 10^{-5}$ V/rps
Tensão de alimentação	U_a	–	12 V CC
Relação da caixa de engrenagens	N		500

Fonte: MAXON MOTOR [2014]

Modelo matemático do manipulador

O desenvolvimento do modelo matemático do manipulador é constituído de três ações: elaboração do modelo do manipulador sem o atuador que movimenta cada uma das juntas; elaboração do modelo do atuador, constituído do motor e caixa de engrenagens; acoplamento dos dois modelos.

Modelo matemático do manipulador

O modelo do manipulador é implementado pelas equações de (1) a (14) que constituem o método de Newton-Euler, e que foram elencadas no item 3.

A expansão da equação (14) do método Newton-Euler $\Gamma_i = e_z^T \cdot i n_i$ resulta na equação matricial (25).

$$\Gamma_{4 \times 1} = M(\theta)_{4 \times 4} \times (\ddot{\theta})_{(4 \times 1)} + C(\theta)_{(4 \times 6)} \times (\dot{\theta}_j)_{6 \times 1} \times (\dot{\theta}_k)_{6 \times 1} + B(\theta)_{4 \times 4} \times (\dot{\theta})_{(4 \times 1)} + g(\theta)_{(4 \times 1)} \quad (25)$$

Os elementos, na sequência listados, das matrizes da equação (25) são uma função dos parâmetros físicos do manipulador e dos ângulos de junta (θ) que são as variáveis do sistema.

- $\Gamma_{4 \times 1}$: vetor dos torques aplicados às juntas do manipulador ;
 $M(\theta)_{4 \times 4}$: matriz dos coeficientes dos torques inerciais ;
 $(\ddot{\theta})_{(4 \times 1)}$: vetor de aceleração dos ângulos de junta ;
 $C(\theta)_{(4 \times 6)}$: matriz dos coeficientes dos torques centrífugos ;
 $(\dot{\theta}_j)_{6 \times 1} \times (\dot{\theta}_k)_{6 \times 1}$: vetor do produto cruzado das velocidades dos ângulos de junta ;
 $(\dot{\theta})_{(4 \times 1)}^2$: vetor dos quadrados das velocidades dos ângulos de junta ;
 $(\theta)_{(4 \times 1)}$: vetor dos torques gravitacionais incidentes em cada junta.

Fonte: Do autor (2014)

Modelo matemático do atuador

O circuito do atuador é constituído de um motor de corrente contínua acoplado a uma caixa de engrenagem de redução, conforme representa a Figura 12.

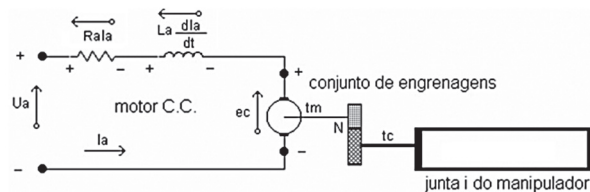


Figura 12 - Motor de acionamento e o conjunto de engrenagens

Fonte: ROMANO (2002, p. 41)

A relação entre a corrente de armadura (I_a) e os outros parâmetros elétricos é dada pela equação.

$$i_a = \int ((U_a - R_a \cdot i_a - e_c)) \cdot \left(\frac{1}{L_a} \right) \cdot dt \quad (26)$$

A força contraeletromotriz na armadura é determinada pela equação.

$$e_c = N \cdot k_b \cdot (\dot{\theta})_{ci} \quad (27)$$

A substituição da equação (27) na equação (26) resulta na equação (28):

$$i_a = \int ((U_a - R_a \cdot i_a - N \cdot k_b \cdot (\dot{\theta})_{ci})) \cdot \left(\frac{1}{L_a} \right) \cdot dt \quad (28)$$

O torque resistente no eixo da engrenagem é encontrado na equação mecânica do conjunto motor e engrenagem.

$$\Gamma_r = N \cdot \Gamma_m - I_m \cdot N^2 \cdot (\ddot{\theta})_r - B_m \cdot N^2 \cdot (\dot{\theta})_r \quad (29)$$

A relação entre a corrente de armadura e o torque no eixo do motor é dada pela equação:

$$\Gamma_m = k_t \cdot i_a \quad (30)$$

Substituindo a equação (30) na equação (29) resulta a equação (31):

$$\Gamma_r = N \cdot k_t \cdot i_a - I_m \cdot N^2 \cdot (\ddot{\theta})_r - B_m \cdot N^2 \cdot (\dot{\theta})_r \quad (31)$$

Substituindo a equação (28) na equação (31) resulta a equação (32):

$$\Gamma_r = N \cdot k_t \cdot \left(\int ((U_a - R_a \cdot i_a - N \cdot k_b \cdot (\dot{\theta})_r)) \cdot \left(\frac{1}{L_a}\right) \cdot dt \right) - I_m \cdot N^2 \cdot (\ddot{\theta})_r - B_m \cdot N^2 \cdot (\dot{\theta})_r \quad (32)$$

A equação (32) representa o modelo matemático do atuador de cada junta. Os elementos das equações (26) a (32) são listados em sequência:

- Γ_r → torque resistente oferecido pela junta ao eixo da caixa de acoplamento;
- N → relação de transformação do conjunto de engrenagens da caixa de acoplamento;
- k_t → constante de torque do motor;
- U_a → tensão de alimentação do motor;
- R_a → resistência ôhmica da armadura do motor;
- i_a → corrente de armadura do motor;
- k_b → constante de velocidade do motor;
- L_a → indutância da armadura;
- I_m → inércia do eixo do motor;
- B_m → coeficiente de atrito viscoso do motor;
- $(\dot{\theta})$ → velocidade do ângulo de junta;
- $(\ddot{\theta})$ → aceleração do ângulo de junta.

Fonte: Do autor (2014)

Acoplamento do atuador na junta do manipulador

A equação (32) representa o torque resistente no eixo da caixa de acoplamento que é oferecido pela junta na qual atua. Esta igualdade entre a equação (32) e a equação (29) permite o acoplamento entre o modelo dinâmico do manipulador e o modelo dinâmico do atuador, resultando no diagrama em blocos da Figura 13.

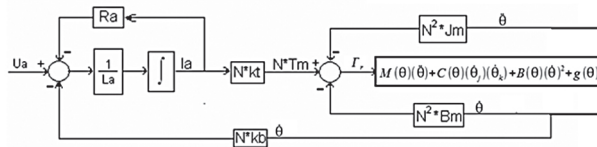


Figura 13 - Diagrama em blocos do atuador interligado ao manipulador

Fonte: Do autor (2014)

Cálculo do modelo dinâmico do conjunto manipulador e atuador

Usa-se o *software* matemático MatLab® para gerar o modelo matemático. Os diversos algoritmos criados são alimentados pelos parâmetros físicos identificados, tendo como variáveis os ângulos das juntas. O *software* permite elaborar uma reprodução virtual do equipamento físico possibilitando a comparação entre os dois.

Algumas condições iniciais são consideradas nos cálculos efetuados:

1 – Considera-se que o conjunto de eixos ortogonais Z_0 , Y_0 e X_0 de origem O_0 tem as seguintes condições iniciais:

$${}^0w_0 = [000]; \quad {}^0\dot{w}_0 = [000]; \quad {}^0\ddot{p}_0 = -|gravidade|.$$

2 – Considera-se a inexistência de força e momento externos, aplicados no efetuador resultando nas seguintes condições:

$${}^e f_e = [000]; \quad {}^e f_e = [000].$$

3 – O eixo z é escolhido no modelo geométrico como o eixo de movimento, atendendo a este princípio, exige a multiplicação dos resultados pelo vetor normalizado:

$$e_z = [001].$$

Validação do modelo matemático

O programa MatLab®, através da ferramenta simulink®, permite, a partir do modelo dinâmico desenvolvido, criar uma planta do virtual manipulador. Para validação do modelo matemático, uma interface gráfica usando o programa LabView® e uma placa de aquisição (PCI 6024E) obtêm os dados do manipulador. Desta maneira, pode-se comparar o comportamento do modelo, através do MatLab® e o comportamento da planta física, por intermédio do LabView®. A Figura 14 representa a planta criada para o manipulador. A Figura 15 representa a planta criada para o acionador.

Os conectores indicados por: (1); (2); ... (12) são os pontos de interligação com o simulink® dos acionadores. Observe que, por uma questão de programação, os ângulos de junta, até então simbolizados por (θ) , são substituídos pela letra (q) .

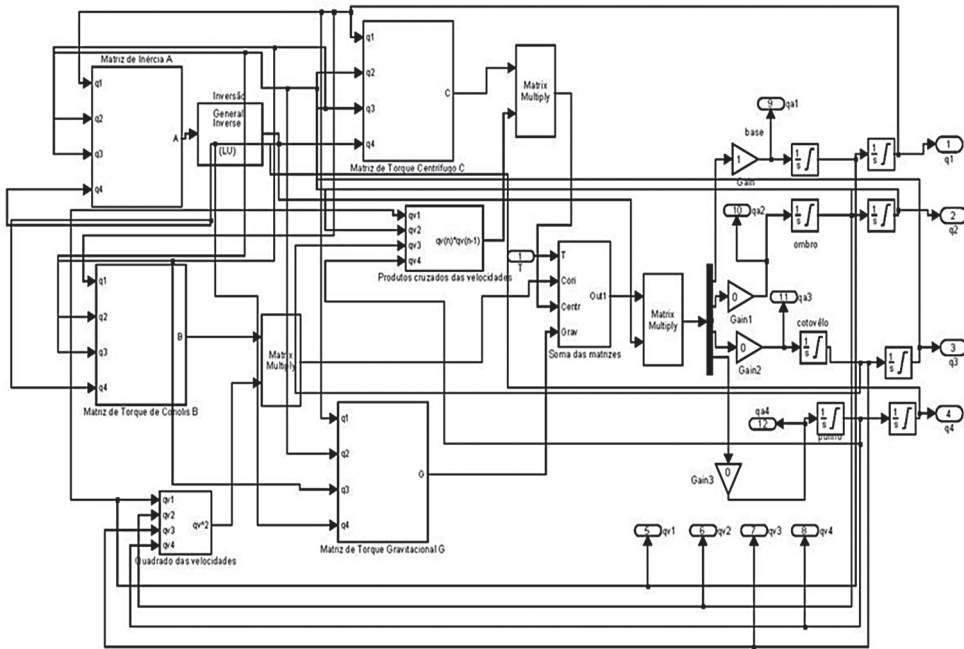


Figura 14 - Planta simulink® do modelo matemático do manipulador

Fonte: Do autor (2014), uso de programação MatLab®

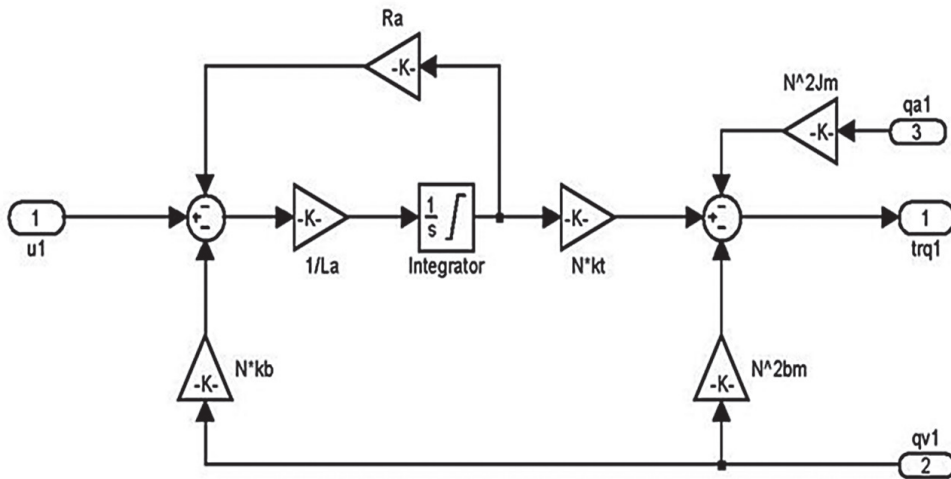


Figura 15 - Planta de um conjunto de acionamento

Fonte: Do autor (2014), uso de programação MatLab®

O acoplamento da planta do modelo do manipulador com o modelo do acionador é representado na Figura 16. A ferramenta simulink® proporciona uma interface gráfica que permite, através do monitor do computador, verificar a relação gráfica entre os ângulos de junta no transcorrer do tempo.

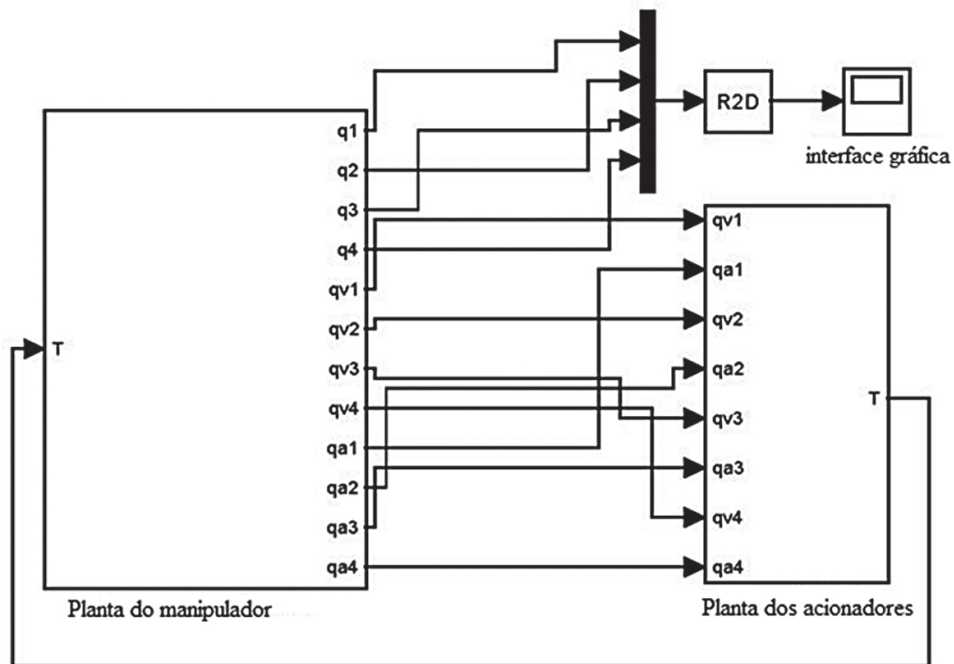


Figura 16 - Conexão entre a planta do manipulador e a planta dos acionadores

Fonte: Do autor (2014), uso de programação MatLab[®]

Comparação entre a velocidade angular das juntas

Os gráficos das figuras 17, 18, 19 e 20 apresentam o comportamento de cada junta. Neste experimento, busca-se a verificação da velocidade angular das duas plantas.

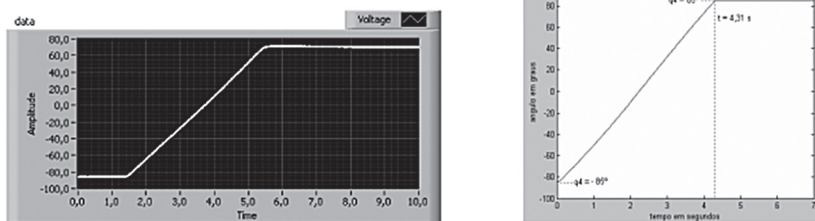


Figura 17 - Junta do punho: manipulador (planta física); modelo matemático

Fonte: Do autor (2014), uso de: programação LabView[®]; programação MatLab[®]

Nesta simulação, o punho do manipulador necessita de 4,09 s para percorrer uma faixa angular de -85° a 85° . O modelo matemático percorre a mesma faixa em 4,31s. O manipulador é 0,22 s mais rápido.

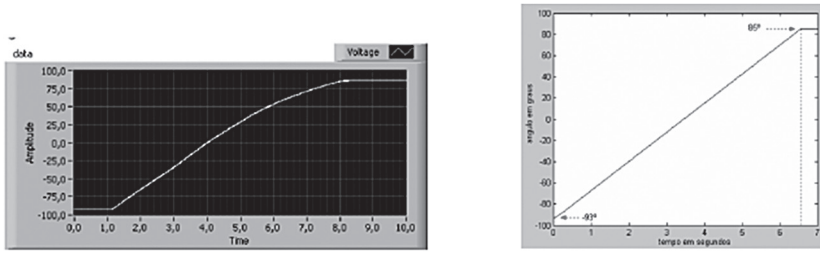


Figura 18 - Junta do cotovelo: manipulador (planta física); modelo matemático

Fonte: Do autor (2014), uso de: programação LabView® ; programação MatLab®

O cotovelo do manipulador necessita de 4,37 s para percorrer uma faixa angular de -95° a 91° . O modelo matemático percorre a mesma faixa em 4,93 s. O manipulador é 0,43 s mais rápido.

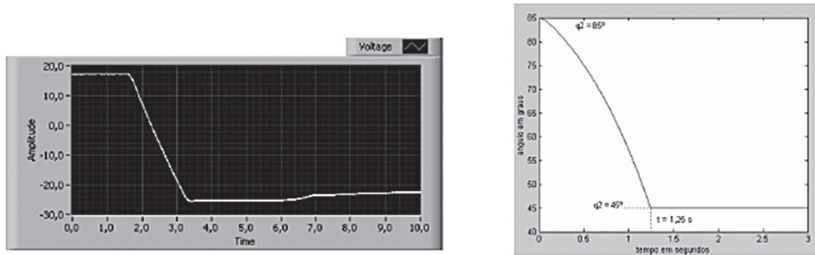


Figura 19 - Junta do ombro: manipulador (planta física); modelo matemático

Fonte: Do autor (2014), uso de: programação LabView® ; programação MatLab®

O ombro do manipulador necessita de 1,73 s para percorrer um intervalo angular de 60° . O modelo matemático percorre o mesmo intervalo em 1,25 s. O modelo é 0,48 s mais rápido.

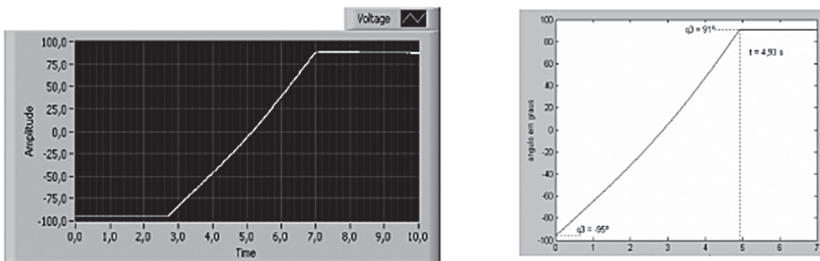


Figura 20 - Junta da base: manipulador (planta física); modelo matemático

Fonte: Do autor (2014), uso de: programação LabView® ; programação MatLab®

A base do manipulador necessita de 6,83 s para percorrer um intervalo angular de 178° . O modelo matemático percorre o mesmo intervalo em 6,98 s. O manipulador é 0,15 s mais rápido.

Erro entre os ângulos das juntas

Como forma de comparação entre o manipulador e o modelo é usado um programa criado no MatLab® que plota, em um único gráfico, a trajetória das juntas física e virtual e o erro existente entre elas. A mesma programação permite o cálculo do erro médio absoluto, o erro máximo, o erro mínimo e o desvio padrão.

Calcula-se ainda o coeficiente de correlação de Pearson, definido como “uma medida do grau e da direção de uma relação linear entre duas variáveis” (LARSON, 2004, p. 337). O coeficiente permite estabelecer a correlação entre os ângulos do manipulador e os ângulos gerados pelo modelo.

O coeficiente de correlação de Pearson varia de -1 a +1. Quanto mais próximo de 1 maior será a correlação entre as variáveis no sentido positivo. Quanto mais próximo de -1 maior será a correlação entre as variáveis no sentido negativo. A proximidade do zero informa que as variáveis não guardam correlação.

A Figura 21 apresenta o gráfico das duas curvas da junta do punho. A Tabela 8 elenca os valores comparativos entre manipulador e o seu modelo.

Tabela 8 - Dados comparativos da junta do punho

coeficiente de Pearson	erro médio absoluto	erro máximo	erro mínimo	desvio padrão
0,99	7,59°	13,38°	4,62°	2,42

Fonte: Do autor (2014)

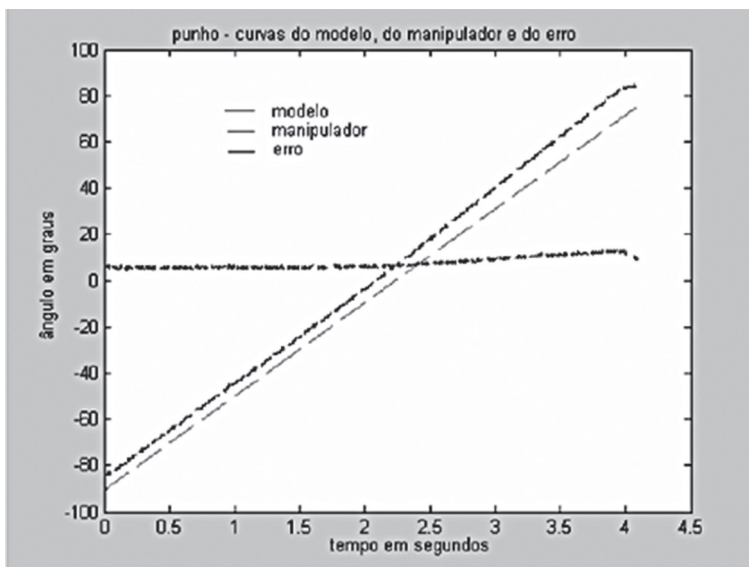


Figura 21 - Gráfico da correlação do erro da junta do punho

Fonte: Do autor (2014), uso de programação MatLab®

A Figura 22 apresenta o gráfico das curvas do manipulador e do modelo. A Tabela 9 apresenta os valores de comparação para a junta do cotovelo.

Tabela 9 - Dados comparativos da junta do cotovelo

coeficiente de Pearson	erro médio absoluto	erro máximo	erro mínimo	desvio padrão
0,99	11,32°	28,69°	4,82°	7,14°

Fonte: Do autor (2014)

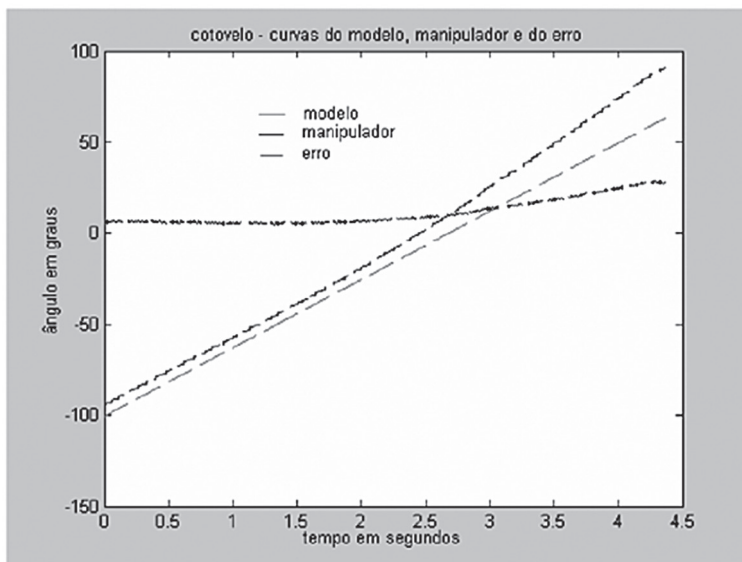


Figura 22 - Gráfico da correlação do erro da junta do cotovelo

Fonte: Do autor (2014), uso de programação MatLab®

A Figura 23 refere-se à junta do ombro mostrando o gráfico das duas curvas do manipulador e do modelo. A Tabela 10 apresenta os dados de comparação para a junta do ombro.

Tabela 10 - Dados comparativos da junta do cotovelo

coeficiente de Pearson	erro médio absoluto	erro máximo	erro mínimo	desvio padrão
0,99	3,16°	9,53°	2,59°	3,11°

Fonte: Do autor (2014)

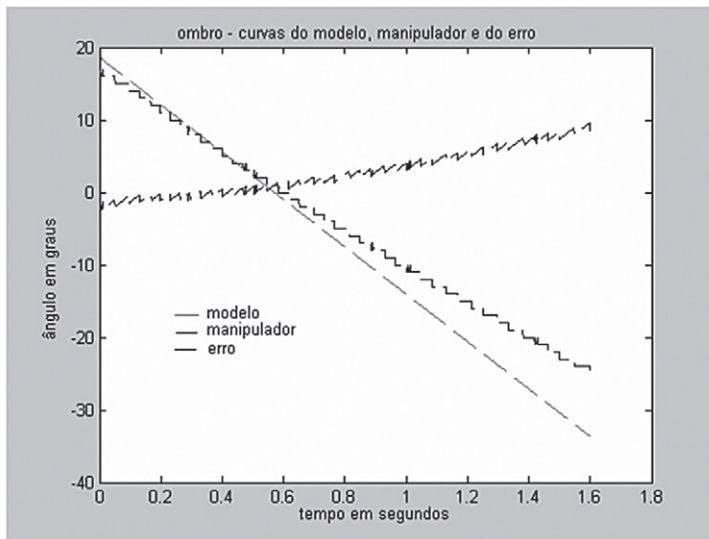


Figura 23 - Gráfico da correlação do erro da junta do ombro

Fonte: Do autor (2014), uso de programação MatLab®

A Figura 24 apresenta o gráfico das duas curvas, manipulador e modelo no que se refere à junta da base. A Tabela 11 apresenta os dados de comparação.

Tabela 11 - Dados comparativos da junta do cotovelo

coeficiente de Pearson	erro médio absoluto	erro máximo	erro mínimo	desvio padrão
0,99	9,56°	18,21°	8,37°	7,08°

Fonte: Do autor (2014)

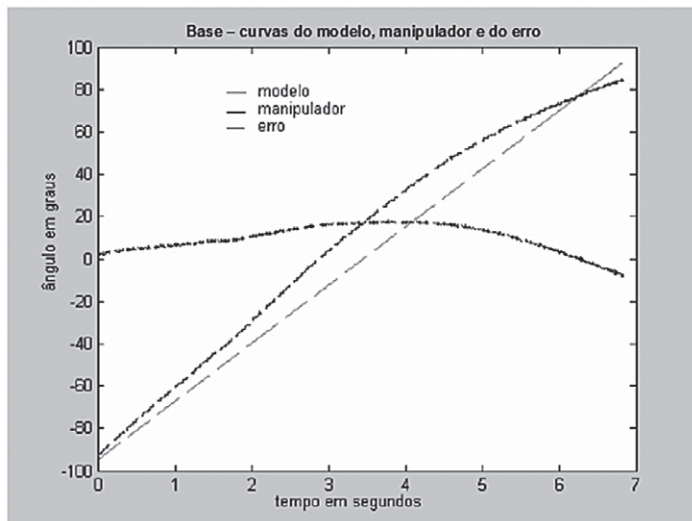


Figura 24 - Gráfico da correlação do erro da junta da base

Fonte: Do autor (2014), uso de programação MatLab®

Conclusão

O Modelo dinâmico desenvolvido para o manipulador RD5NT busca a identificação dos seus parâmetros e revela aspectos de construção não observados, tais como o modelo do motor do sistema de acionamento, a função do conjunto de molas no elo do ombro, a localização dos centros de massa de cada elo, a relação de redução do conjunto de engrenagens do elemento motor, o comprimento dos elos e a sua massa, entre outros elementos úteis ao conhecimento físico do equipamento.

Pode-se afirmar que o modelo matemático representa o manipulador com fidelidade aceitável. Destaca-se o coeficiente de correlação de Pearson como sinalizador desta similaridade, lembrando que o coeficiente próximo a 1 indica a forte correlação entre os ângulos do modelo matemático e os respectivos ângulos do manipulador. Nota-se que em nenhuma das juntas o mencionado coeficiente foi menor do que 0,99. Ressalta-se a pequena diferença de tempo observada em cada junta ao percorrerem a mesma faixa angular. Valores reduzidos do erro médio absoluto e do desvio padrão também acenam para uma relação adequada entre o modelo matemático e o manipulador, permitindo o uso do primeiro como objeto para auxílio no estudo das ações desenvolvidas no dispositivo físico.

Referências

AGUIRRE, Luis Antonio. *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnica Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Belo Horizonte: UFMG, 2000.

CAPARICA, Álvaro de Almeida. The Isochronism of right-angle triangles. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, v. 29, n. 3, 2007.

KHALIL, W., DOMBRE, E. *Modeling, Identification and Control of Robots*. London: Kogan Page Science, 2002.

LARSON, Ron; FARBER, Betsy. *Estatística Aplicada*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.

MAXON MOTOR. *Products: motor*. Sachseln, [2014]. Disponível em: <www.maxonmotor.com/maxon/view/product/motor/dcmotor/DC-Sonderprogramm/2130.906-22.112-050>. Acesso em: 27 jan. 2015.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. *Curso de Física Básica: 1, Mecânica*. São Paulo: Edgard Blücher, 2000.

ROMANO, Vitor Ferreira. *Robótica Industrial: Aplicação na Indústria de Manufatura e de Processo*. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

YOSHIKAWA, Tsuneo. *Foundations of Robotics: Analysis and Control*. Corona Publishing, 1988.

Artigo recebido em: 6 maio 2014
Aceito para publicação em: 24 nov. 2014