

# *Desenvolvimento de software educacional de engenharia para dosagem de mistura de materiais*

*Development of an engineering educational software applied for the blending of materials*

Frederico Torres Pimenta<sup>\*</sup>

Marcelo Greco<sup>\*\*</sup>

Roque Luiz Pitangueira<sup>\*\*\*</sup>

Jisela Aparecida Santanna-Greco<sup>\*\*\*\*</sup>

Trata do desenvolvimento de um software voltado para a dosagem de mistura de materiais granulares baseado na aplicação do método dos mínimos quadrados. O software desenvolvido em Java apresenta como vantagens a possibilidade de ponderar uma função do tipo custo nas misturas, a especificidade para a aplicação e a gratuidade. O problema a ser resolvido consiste na determinação das proporções a serem empregadas de cada material componente de uma mistura, a fim de que essa mistura apresente as características granulométricas adequadas especificadas pelas normas técnicas. As soluções obtidas demonstraram excelentes aderências de resultados às distribuições granulométricas ótimas das faixas objetivo.

*The paper deals with the development of a software for the mix design of granular materials based on the method of least squares. The software, developed in Java, has the possibility of using a weighted cost function in the mixtures, the specificity for the application, and the gratuity. The problem to be solved is the determination of the proportions of each component to be used in the material mixture, so that the mixture has the appropriate particle size distribution characteristics specified by the technical standards. The obtained solutions showed excellent results of adhesion of particle size distributions satisfying the optimal distributions.*

Palavras-chave: Mínimos quadrados ponderados. Mistura de materiais. Java. Correção granulométrica.

*Keywords: Weighted least squares. Material mix. Java. Particle size correction.*

## **1 Introdução**

Os materiais granulares e os solos, para serem utilizados nas mais diversas obras de engenharia, devem ser enquadrados em especificações técnicas vigentes no local de aplicação (SANTANNA-GRECO e GRECO, 2007). Nessas especificações são estabelecidos

<sup>\*</sup> Graduado em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Realizou Iniciação Científica com bolsa do CNPq, vinculado ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da UFMG. Atualmente atua como engenheiro. E-mail: fredtpimenta@gmail.com.

<sup>\*\*</sup> Doutor em Engenharia de Estruturas pela Escola de Engenharia de São Carlos (USP). Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da UFMG. E-mail: mgreco@dees.ufmg.br.

<sup>\*\*\*</sup> Doutor em Engenharia Civil pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da UFMG. E-mail: roque@dees.ufmg.br.

<sup>\*\*\*\*</sup> Doutora em Engenharia de Transportes pela Escola de Engenharia de São Carlos (EESC/USP). Professora do Departamento de Engenharia de Transportes e Geotecnia da Escola de Engenharia da UFMG. E-mail: jiselaaparecida@yahoo.com.br.

critérios a serem atendidos que relacionam as características físicas desses materiais com a utilização proposta. Entre essas características físicas, a distribuição granulométrica é uma das mais importantes. São estabelecidas faixas granulométricas admissíveis representadas por limites inferiores e superiores para cada fração componente do material.

Uma vez determinada a distribuição granulométrica adequada à obra proposta, é comum verificar que os materiais granulares disponíveis não apresentam individualmente a distribuição granulométrica especificada pelo projeto. Embora seja possível, em laboratório, isolar os materiais por dimensões dos grãos e combiná-los através de mistura direta, em obras de engenharia que envolvem grandes volumes de terra e agregados, esse não é um processo praticável (NEUMANN, 1964). Deve-se considerar, então, a mistura dos materiais das jazidas existentes de forma a atender às características especificadas.

A dosagem consiste basicamente em fazer a mistura de materiais granulares com características diversas, tendo como objetivo a determinação da porcentagem de utilização de cada material para composição de um produto final com características granulométricas previamente especificadas.

O ponto de partida é a determinação da distribuição granulométrica de cada material disponível para a mistura. A distribuição granulométrica de um material granular consiste na determinação de suas frações percentuais constituintes em função de seus diâmetros médios. Essa determinação é feita por meio de um ensaio laboratorial de granulometria conjunta, composto do ensaio de peneiramento, que determina as porcentagens das partículas de dimensões maiores, e do ensaio de sedimentação, que classifica as porcentagens das frações de diâmetros menores.

A distribuição granulométrica de materiais granulares é uma importante característica física e sua análise é essencial para a utilização eficiente dos mesmos. Os solos bem graduados (formados por uma ampla gama de partículas), por exemplo, apresentam melhor comportamento em relação à resistência mecânica e compressibilidade que solos de granulometria uniforme (com todas as partículas apresentando aproximadamente o mesmo tamanho). Outros tipos de aplicações podem requerer características granulométricas próprias.

A busca por misturas densas, associadas à maior estabilidade e aos maiores valores de resistência, em geral norteiam as mais diversas especificações referentes ao emprego de solos e agregados em obras de engenharia. Para exemplificar, no caso da construção de pavimentos, os órgãos rodoviários estabelecem faixas granulométricas para os materiais utilizados nas diversas camadas, que variam conforme a intensidade do tráfego previsto para a rodovia. Sendo assim, as curvas granulométricas dos materiais empregados na construção de cada camada devem se enquadrar nas faixas especificadas. No caso das rodovias brasileiras, os materiais destinados à construção de camadas de base estabilizadas granulometricamente devem possuir composição granulométrica satisfazendo a uma das faixas definidas pela especificação de serviço DNIT 141/2010\_ES (BRASIL, 2010).

No caso de material destinado à composição de concreto betuminoso usinado a quente (CBUQ) ou concreto asfáltico usinado a quente (CAUQ), geralmente utilizado em revestimentos de pavimentos flexíveis, as faixas granulométricas são estabelecidas pela especificação DNIT-ES 031/2006 (BRASIL, 2006).

Especificada uma faixa granulométrica e conhecendo-se a distribuição granulométrica dos materiais disponíveis para compor determinada mistura, o problema que se coloca é a determinação da quantidade a ser utilizada de cada material componente, para que a mistura resultante tenha uma curva de distribuição granulométrica próxima ao centro da faixa. Define-se em geral o centro da faixa especificada como curva granulométrica almejada para garantir que a mistura resultante se enquadre na referida faixa, mesmo considerando-se os possíveis desvios e imprecisões típicas de materiais naturais, como por exemplo, segregações dos materiais granulares nas pilhas de estocagem. Segregações podem fazer com que ocorram diferenças entre as granulometrias reais e as granulometrias empregadas nos cálculos, mesmo considerando-se as técnicas de amostragem aplicadas para minimizar esses possíveis erros.

Com o propósito de se realizar a dosagem de materiais granulares, foi desenvolvido um código computacional baseado na aplicação do método dos mínimos quadrados, utilizando a linguagem de programação Java. Algumas das vantagens mais importantes na escolha da linguagem de programação Java é o fato de sua distribuição e uso serem gratuitos, além de sua portabilidade entre sistemas operacionais. Outro aspecto importante é que Java é uma linguagem de programação compilada, que posteriormente é executada em uma máquina virtual. Linguagens de programação compiladas tendem a ser mais rápidas que as linguagens interpretadas (como por exemplo, MatLab). A linguagem MatLab (MatrixLaboratory) é interpretada em um ambiente de programação com vários recursos numéricos, estatísticos e gráficos disponíveis; possibilita inclusive a programação simbólica (CHAPMAN, 2013). No entanto, apesar da linguagem MatLab ser muito usada na engenharia e programação científica em geral, trata-se de software comercial com licença consideravelmente cara. Há ainda uma versão livre do MatLab, chamada SciLab, mas que possui menos recursos que o MatLab.

## ***2 Objetivo***

Desenvolver e apresentar um software educacional que realize o processamento de dosagens de mistura de materiais granulares com base em métodos dos mínimos quadrados sob enfoque matricial. A ferramenta computacional desenvolvida é específica para o problema de mistura de materiais granulares, desenvolvida com base em linguagem de programação livre que apresenta portabilidade de plataformas e orientada a objetos, com escopo voltado à educação em engenharia. Além disso, propõe-se também um esquema de refinamento dos resultados aplicando-se ponderadores,

como custo dos materiais ou distância até as jazidas através de variações do método dos mínimos quadrados ponderados. Para tais propósitos foi elaborada uma ferramenta computacional desenvolvida em linguagem de programação Java que realiza os cálculos e analisa a validade das soluções.

### ***3 Métodos de mistura de materiais – método dos mínimos quadrados***

A solução do problema de misturas de materiais pode ser obtida mediante uma enorme variedade de métodos. Nesse estudo utiliza-se o Método dos Mínimos Quadrados, uma técnica estatística de regressão utilizada muito comumente nas ciências para investigar a relação entre uma ou mais variáveis (MONTGOMERY e RUNGER, 2003). De acordo com Montgomery e Runger (2003), o desenvolvimento de tal método é creditado a Carl Gauss (1777-1855), matemático alemão responsável por enormes contribuições à matemática. Said e Emre (1985) apresentaram um método de otimização que se baseia na utilização de um modelo de programação quadrática em que se podem obter resultados para o problema de mistura que levem em conta o custo unitário e o desvio padrão, sendo também possível incluir considerações a respeito de propriedades físicas desejadas à mistura. Toklu (2005) apresentou uma aplicação de algoritmos genéticos ao problema de mistura de materiais considerando os conceitos naturais de evolução e seleção natural. Outra técnica interessante utilizada para obtenção de misturas de materiais granulares é apresentada em Silva et al. (2013) e Frery et al. (2012), que utilizam o Método dos Elementos Discretos (MED) para obter uma mistura com certa especificação de qualidade. No caso do artigo de Frery et al. (2012), os autores utilizam uma técnica estatística para obtenção de misturas com determinadas características de porosidade e distribuição granulométrica. Sumanasooriya e Neithalath (2009) apresentam um estudo sobre a influência da mistura de materiais granulares nas propriedades físicas de concretos porosos. No caso, as distribuições granulométricas dos agregados, quando adicionadas à matriz cimentícia, alteram propriedades importantes relacionadas com a porosidade, como absorção acústica, condutividade elétrica e resistência mecânica. De acordo com os autores, para esse tipo de aplicação, porcentagens mais elevadas de materiais com granulometria fina produzem poros no concreto com menores dimensões, e agregados com granulometria mais uniforme tendem a produzir concretos porosos com dimensões de poros mais bem definidas, que possuem uma distribuição mais homogênea do concreto resultante. Shu et al. (2012) demonstram a importância da mistura de materiais em agregados usados para fabricação de asfaltos misturados à temperatura ambiente (entre 10°C e 38°C). De acordo com os autores, o emprego de agregados reciclados poderia tornar o pavimento final menos suscetível ao dano

quando misturado adequadamente aos agregados virgens, não reciclados.

O problema de mistura de materiais, conforme proposto, pelo fato de usualmente a quantidade de materiais disponíveis ser inferior ao número de peneiras analisadas, leva a um sistema linear com mais equações que incógnitas. Dessa forma, raramente é possível determinar uma solução exata para o sistema, sendo necessário utilizar-se de abordagens diferentes da análise direta.

A formulação dos Mínimos Quadrados aplicada à resolução de problemas de misturas de materiais granulares é feita conforme Santanna-Greco e Greco (2007), havendo ainda estudo original anterior, desenvolvido por Neumann (1964), cuja formulação em Mínimos Quadrados é semelhante. Propõe-se ainda uma técnica alternativa que inclui na análise a relevância dos materiais da mistura mediante uma aplicação do Método dos Mínimos Quadrados Ponderados.

A utilização do Método dos Mínimos Quadrados é extensa e inclui aplicações associadas com métodos numéricos como o Método dos Elementos de Contorno. Seybert e Rengarajan (1987) propuseram a criação de equações adicionais no sistema original, obtido pelo método numérico, com a finalidade de estabilizar as respostas obtidas para problemas governados pela equação de Helmholtz. Essa técnica é conhecida como CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation). Outra possibilidade de aplicação do Método dos Mínimos Quadrados é na filtragem de dados em sistemas dinâmicos, que devido à imprecisão dos equipamentos de medida e às vibrações espúrias podem apresentar ruídos de sinais.

### 3.1 Método dos Mínimos Quadrados Simples

Considerando uma dosagem de mistura que analisa um conjunto de  $n$  materiais distintos, representados através das porcentagens passantes por uma série normalizada de  $m$  peneiras, deseja-se encontrar as proporções  $\mathbf{x}_j$  em que esses materiais devem ser misturados de forma a se obter uma distribuição granulométrica alvo  $\mathbf{b}_i$  equivalente às porcentagens das frações da mistura ideal (curva alvo). Representando por  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $m > n$ ) a porcentagem do material  $J$  que passa pela peneira  $i$  tem-se:

$$\mathbf{A}_j \mathbf{x}_j = \mathbf{b}_i \quad (1)$$

Para que os resultados tenham significado físico, exige-se que as proporções sejam positivas, restrição representada pela Equação (2).

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Uma equação de conservação de material também deve ser incluída no sistema, atendendo à Equação (3), na qual  $\delta_{ij}$  é o operador discreto delta de Kronecker.

$$\delta_{ij} x_j = I \quad (3)$$

sendo que a Equação (1) elevada ao quadrado fornece o vetor dos resíduos  $\mathbf{g}_i$ .

$$\mathbf{A}_{ji} \mathbf{A}_j \mathbf{x}_j^2 - 2\mathbf{x}_j \mathbf{A}_j \mathbf{b}_i + \mathbf{b}_i^2 = 0 = \mathbf{g}_i \quad (4)$$

A aplicação do método dos mínimos quadrados é basicamente obtida minimizando a Equação (4) em termos das variáveis porcentagens de materiais ( $\mathbf{x}_j$ ).

$$\mathbf{g}_{i,j} = 2\mathbf{A}_{ji} \mathbf{A}_j \mathbf{x}_j - 2\mathbf{A}_j \mathbf{b}_i = 0 \quad (5)$$

O procedimento prático para resolução do sistema de equações original definido pela Equação (1), que é incompatível, é obtido através de propriedades tensoriais.

$$\mathbf{A}_{ji} \mathbf{A}_j \mathbf{x}_j = \mathbf{A}_j \mathbf{b}_i \quad (6)$$

Na Equação (6), tem-se um novo sistema de equações, agora compatível, de dimensão  $n$ , no qual os resultados obtidos são aproximados, conforme a seguinte equação:

$$\mathbf{M}_j \mathbf{x}_j = \mathbf{c}_j \quad (7)$$

### 3.2 Método dos Mínimos Quadrados Ponderados

Em certas circunstâncias faz-se interessante a ponderação dos materiais. Por exemplo, caso a jazida fornecedora de um dos materiais seja mais próxima do local de aplicação, será interessante a utilização de uma maior quantidade daquele material na mistura. O Método dos Mínimos Quadrados Ponderados pode ser aplicado ao sistema de equações, Equação (1), usando uma matriz diagonal de ponderadores  $\mathbf{W}_i$ . Os coeficientes dessa matriz podem ser obtidos, por exemplo, pela relação entre o custo de cada material e o custo médio da mistura como um todo. O custo também pode incluir a distância das jazidas de materiais até o local da mistura. Se a matriz diagonal de ponderadores ( $\mathbf{W}_i$ ) for igual à matriz identidade, então o problema recairá no método dos mínimos quadrados clássico.

$$\mathbf{w}_i \mathbf{A}_j \mathbf{x}_j = \mathbf{w}_i \mathbf{b}_i \quad (8)$$

A matriz diagonal de ponderadores é obtida a partir do peso relativo de cada

material ( $\mathbf{r}_j$ ) com relação ao peso médio de todos os materiais empregados na mistura, conforme Equação (9) dada a seguir:

$$\mathbf{r}_j = \frac{\text{peso}_j}{\text{peso médio}} \quad (9)$$

$$\mathbf{w}_i = p \mathbf{a}_i \mathbf{A}_j \mathbf{r}_j \quad (10)$$

onde  $p$  é o peso considerado na mistura.

A Equação (8) elevada ao quadrado fornece o vetor dos resíduos  $\mathbf{g}_i$ .

$$\mathbf{A}_j \mathbf{w}_i^2 \mathbf{A}_j \mathbf{x}_j^2 - 2 \mathbf{x}_j \mathbf{A}_j \mathbf{b}_i \mathbf{w}_i^2 + \mathbf{w}_i^2 \mathbf{b}_i^2 = 0 = \mathbf{g}_i \quad (11)$$

A aplicação do Método dos Mínimos Quadrados se dá pela minimização da Equação (11) em termos da variável porcentagem de materiais.

$$\mathbf{g}_{i,j} = 2 \mathbf{A}_j \mathbf{w}_i^2 \mathbf{A}_j \mathbf{x}_j - 2 \mathbf{A}_j \mathbf{w}_i^2 \mathbf{b}_i = 0 \quad (12)$$

O procedimento prático para resolver o sistema de equações incompatível original, Equação (8), é obtido por propriedades tensoriais.

$$\mathbf{A}_j \mathbf{w}_i^2 \mathbf{A}_j \mathbf{x}_j = \mathbf{A}_j \mathbf{w}_i^2 \mathbf{b}_i \quad (13)$$

Na Equação (13), tem-se um novo sistema de equações compatível de dimensão  $n$ , para o qual os resultados obtidos serão aproximados, conforme a seguinte equação:

$$\overline{\mathbf{M}}_j \mathbf{x}_j = \overline{\mathbf{c}}_j \quad (14)$$

### 3.3 Método dos Mínimos Quadrados de Neumann

A aplicação matricial do método dos mínimos quadrados ao problema de mistura de materiais foi proposta originalmente no artigo clássico de Neumann (1964). O autor trabalhou com porcentagens retidas em cada peneira, em vez de porcentagens passantes. Além disso, Neumann (1964) usou uma equação de restrição encapsulada nas equações iniciais das peneiras, apresentadas na Equação (15).

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_i = \hat{\mathbf{a}}_i \quad (15)$$

onde  $\hat{\mathbf{a}}_i$  representa o vetor de erro residual e  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Rearranjando os termos da equação de conservação de materiais, ou seja, Equação (3), é possível isolar a variável relacionada com a porcentagem do último material ( $x_n$ ).

$$x_n = 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1} \quad (16)$$

Finalmente, substitui-se a porcentagem  $x_n$  na Equação (15), obtendo-se a Equação (17).

$$x_1(a_{i1} - a_{in}) + x_2(a_{i2} - a_{in}) + \dots + x_{n-1}(a_{i(n-1)} - a_{in}) - (b_i - a_{in}) = \mathring{a}_i \quad (17)$$

O sistema de equações apresentado na Equação (17) é semelhante ao sistema original de equações definido pela Equação (1), exceto por sua dimensão. O sistema formado pelas equações de peneiras (17) é o sistema original reduzido em uma variável. Obtém-se essa expressão eliminando-se a última coluna de materiais da matriz de coeficientes  $A_j$  (a coluna correspondente à proporção  $x_n$ ) e subtraindo-a termo a termo de cada uma das colunas restantes e do vetor de termos livres  $b_i$ . Este novo sistema pode ser expresso da seguinte forma:

$$\overline{A_j} x_j = \overline{b_i} \quad (18)$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad e \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

onde os termos  $\overline{A_j}$  e  $\overline{b_i}$  representam, respectivamente, a matriz de coeficientes modificada e o vetor correspondente ao centro da faixa granulométrica especificada modificado, ou seja, o vetor de termos livres modificado, considerando o sistema de equações reduzido ( $i = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, n-1$ ). A aplicação do método dos mínimos quadrados é similar ao procedimento apresentado anteriormente, neste artigo. A última incógnita é obtida por meio da relação apresentada na Equação (16).

#### ***4 Modelagem computacional***

O software educacional proposto no trabalho em questão foi desenvolvido em linguagem computacional Java utilizando-se o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO), conforme Flanagan (2005). Esse paradigma utiliza classes inspiradas em modelos de entidades reais. Um objeto representado por uma classe seria, então, a abstração de uma entidade do mundo real com seus atributos e comportamentos relevantes retratados na modelagem proposta (DEITEL e DEITEL, 2000).

Os dados pertencentes aos modelos podem ser representados por dados nativos, característicos da linguagem de programação, e por outros modelos já existentes na linguagem ou criados pelo usuário (SANTOS, 2003).

O projeto foi baseado no padrão *Model/View/Controller* (MVC), que consiste em três tipos de objetos. O *Model* é o objeto que contém os dados e as funcionalidades da aplicação, o *View* é a representação da tela (interface gráfica) e o *Controller* define a maneira com que a interface reage aos dados de entrada do usuário.

Será descrito a seguir apenas o objeto que representa o modelo, a fim de explicar como foi feita a relação dos dados e o processamento das informações. No entanto, serão apresentadas também figuras das janelas em que se dá a interface com o usuário.

#### 4.1 Modelo

A representação básica do problema proposto consiste em analisar um conjunto de materiais granulares e tentar obter uma combinação destes que seja compatível com uma curva granulométrica alvo previamente designada.

Portanto, se reconhecem inicialmente duas entidades básicas do processo: uma que represente cada um dos materiais disponíveis, que será denominada *Material*, e uma que represente a curva granulométrica esperada, a ser reconhecida como *TargetCurve*.

Os atributos relevantes retratados na classe *Material* são o nome do material (*id*), representado por um *String*; o número de peneiras que caracterizam a distribuição granulométrica deste material (*nS, number of sieves*), representado por um número inteiro; as frações passantes em cada peneira, representadas por um *array de doubles (fractions)* e um atributo que penalize a utilização do material representado por um valor *double (cost)*.

A representação da classe *TargetCurve* é semelhante, havendo apenas a identificação do nome do material (*id*); da quantidade de peneiras do ensaio (*nS, number of sieves*) e um *array* de duas dimensões para representar as faixas inferiores e superiores admissíveis em cada peneira (*double [][ ] fractions*). O método *medianCurve* dessa classe retorna a curva granulométrica correspondente à média das faixas inferiores e superiores de cada peneira.

Para relacionar essas classes, foi criada uma nova classe chamada *GranulometricModel*, que representa simplificada o problema proposto. Tal classe tem como atributos um elemento da classe *TargetCurve* e um *array* de elementos da classe *Material*, além de um *array* de *Strings* para representar os nomes das peneiras. O método *getMaterialGroup* organiza os dados granulométricos dos materiais usados na mistura e os retorna em um *array de doubles* de dimensão correspondente ao número de materiais utilizados. Esse *array* corresponde matematicamente à matriz de coeficientes ( $A_j$ ) descrita na modelagem matemática.

Cada um dos atributos das classes acima possui métodos para consultar e alterar o valor do atributo de forma encapsulada. Essas classes estão organizadas dentro de

um pacote denominado *model*, e a representação das relações entre elas é mostrada no diagrama correspondente à Figura 1.

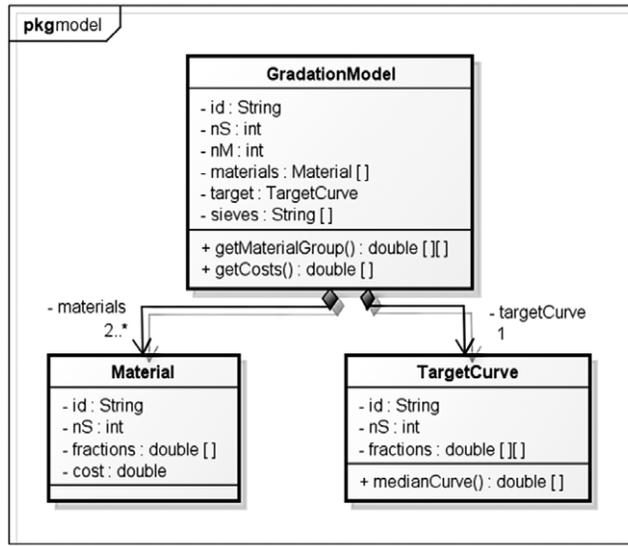


Figura 1: Diagrama da classe Granulometric Model

Com os dados do ensaio granulométrico devidamente preenchidos e representados pela classe *GranulometricModel*, segue-se para a etapa de processamento dos dados e cálculo dos resultados.

Para cada método de mínimos quadrados descrito anteriormente foi criada uma classe que faz o tratamento matemático e processa os dados do ensaio, identificando e retornando seu resultado. Essas classes, a saber, *SquaresMethod*, *WeightedSquaresMethod* e *NeumannMethod*, apresentam estrutura muito semelhante. Alguns métodos são idênticos em sua formulação, e outros, mesmo com abordagens distintas, devem retornar o mesmo tipo de resultado. O conceito de classe abstrata serve-se de tais semelhanças e foi utilizado para modelar a classe *Processor*.

A classe abstrata *Processor* utiliza como único argumento uma instância da classe *GranulometricModel* e possui métodos abstratos e não abstratos. Cada uma das classes criadas para modelar os métodos de mínimos quadrados estende as funcionalidades da classe abstrata *Processor*.

Elas devem implementar, conforme peculiaridades da técnica, cada um dos métodos abstratos, ao passo que herdam os métodos não abstratos da classe *Processor*. Elas podem ter ainda métodos próprios, não existentes e não relacionados à classe-mãe.

Os métodos abstratos, a serem implementados em cada modelagem de mínimos quadrados, são: *result* e *correctedResult*, ambas retornando o vetor de resultados parciais e corrigidos das proporções obtidas naquele método; e *residue*, que retorna um valor *double* associado ao resíduo encontrado das somas das proporções, conforme Equação (3).

Os métodos não abstratos, cujas funcionalidades podem ser usadas pelas classes herdeiras, são:

- *granulometricResult*: faz a multiplicação do vetor de resultados corrigidos na matriz de coeficientes  $A_j$ , conforme Equação (1), e retorna a curva granulométrica correspondente;
- *resultCheck*: retorna um valor *boolean* correspondente à existência de um resultado físico aceitável. Não pode haver valor negativo no vetor de proporções corrigidas, conforme Equação (2);
- *resultFits*: avalia através de um valor *boolean* se a curva granulométrica obtida está dentro da faixa aceitável;
- *deviationFromTarget*: retorna um valor *double* correspondente à soma dos quadrados dos desvios, em cada peneira, entre a curva obtida e a curva alvo;
- *unitCost*: retorna um valor *double* correspondente ao custo unitário do resultado obtido.

As relações entre as classes herdeiras *SquaresMethod*, *WeightedSquaresMethod* e *NeumannMethod* e a classe-mãe *Processor* são representadas na Figura 2.

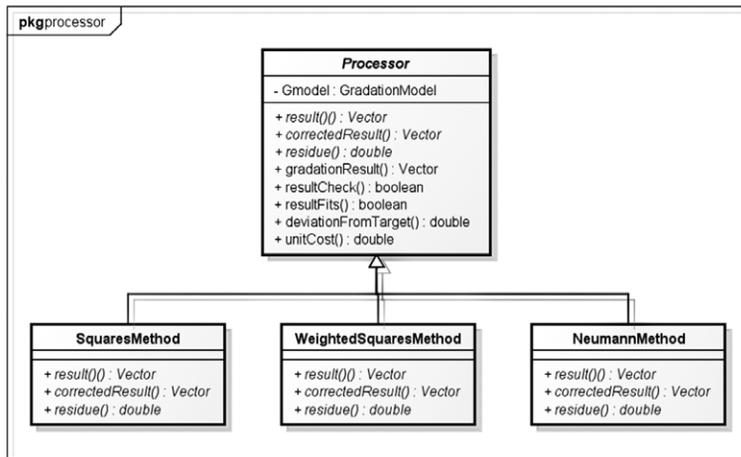


Figura 2: Diagrama da classe Granulometric Model

Para a manipulação matemática e processamento dos dados foram criadas as classes *Vetor* e *Matriz* para representar as entidades matemáticas análogas. A resolução dos sistemas lineares e a aplicação de métodos de mínimos quadrados foram feitas através de classes criadas para esses fins, a saber *EquationSystem* e *LeastSquareSolver*. O método de solução empregado na classe *EquationSystem* utiliza o método de decomposição LU baseado no algoritmo de Crout.

## 5 Exemplos numéricos

Apresentam-se dois exemplos numéricos, para ilustração dos métodos de mistura de materiais propostos. O primeiro exemplo é apresentado com o intuito de validar a

formulação numérica proposta. Já o segundo exemplo é mais completo e inclui comparação entre metodologias diferentes e ponderações considerando-se custos dos materiais.

### 5.1 Exemplo 1

Considere-se a necessidade de obtenção de material pétreo para a composição de misturas asfálticas densas, utilizadas como revestimentos de pavimentos flexíveis asfálticos. No Brasil, o Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes (DNIT) determina as características granulométricas necessárias para que uma mistura de materiais possa ser utilizada como agregado em misturas asfálticas destinadas a revestimentos de pavimentos flexíveis, através da especificação de serviço DNIT 031/2006 (BRASIL, 2006). Por meio dessa especificação são estabelecidos limites máximos e mínimos para as porcentagens de ocorrência das diversas partículas que compõem os materiais. Entretanto, dificilmente encontra-se na natureza um material que apresente tais características, sem a necessidade de alterações. Tampouco nas pedreiras, locais em que ocorre o beneficiamento das rochas para a produção de britas, o agregado é separado conforme o definido pelas normas de aplicação desse material. Percebe-se, assim, a necessidade de aplicação de técnicas de mistura de materiais para a obtenção dos produtos almejados.

No exemplo ilustrativo, apresentado a seguir, considerou-se a utilização de resíduos sólidos reciclados da construção civil como agregados em misturas asfálticas, em substituição a materiais pétreos. Essa utilização contribuiu com a diminuição da exploração de insumos naturais e com a preservação dos recursos naturais, diminuindo o impacto negativo que a construção de novas rodovias provoca ao meio ambiente. A utilização de resíduos sólidos da construção civil como agregado reciclado foi precedida por um processo de britagem e separação do material em peneiras. Os materiais disponíveis para a dosagem de uma mistura destinada a revestimento de pavimentos flexíveis foram classificados como brita 1, brita 0 e pó de brita, cujas distribuições granulométricas encontram-se apresentadas na Tabela 1, juntamente com os limites da faixa C da especificação DNIT 031/2006 (BRASIL, 2006).

**Tabela 1: Distribuições granulométricas dos agregados reciclados disponíveis e limites da faixa C estabelecidos pela especificação DNIT 031/2006 (BRASIL, 2006).**

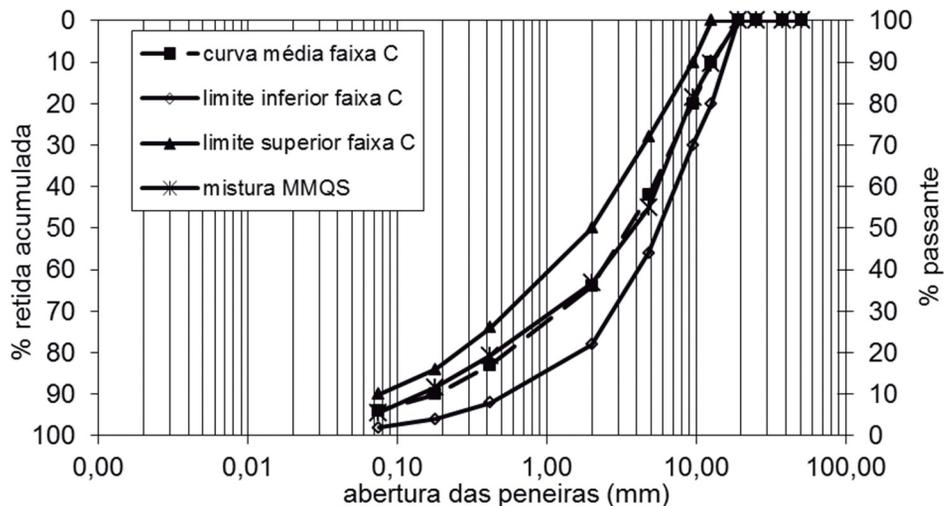
diâmetros médios de referência (mm)	materiais disponíveis % em peso passante			faixa granulométrica especificada		
	brita 1	brita 0	pó de brita	limite superior	limite inferior	média do intervalo granulométrico especificado (%)
19,1	100	100	100	100	100	100
12,7	52,02	100	100	100	80	90
9,5	15,87	98,9	100	90	70	80
4,8	2,05	39,05	97,08	72	44	58
2,0	1,16	7,21	82,79	50	22	36
0,42	0,88	4,11	43,08	26	8	17
0,18	0,35	1,06	27,31	16	4	10
0,075	0,14	0,27	13,04	10	2	6

Através da aplicação do Método dos Mínimos Quadrados Simples (MMQS) foram obtidas as proporções em que os materiais brita 1, brita 0 e pó de brita devem ser empregados para que seja obtida uma mistura com curva de distribuição granulométrica mais próxima possível do centro da faixa C da especificação DNIT 031/2006 (BRASIL, 2006). Tais proporções encontram-se apresentadas na Tabela 2. Na Figura 3 encontram-se apresentados graficamente os limites inferior e superior da faixa C especificada, a curva média da referida faixa C e a distribuição granulométrica do produto resultante da aplicação do método. Ou, em outras palavras, a distribuição granulométrica da mistura obtida. Esses mesmos dados e resultados podem ser observados na Figura 4, que consiste em uma tela do programa desenvolvido.

Analisando-se os resultados obtidos, pode-se verificar pela Figura 3 que a mistura resultante apresentou curva granulométrica muito próxima da curva estabelecida como alvo, ou seja, da curva média da faixa C da especificação DNIT 031/2006, o que demonstra a eficácia do método proposto.

**Tabela 2: Porcentagens de emprego dos materiais disponíveis para a composição da mistura especificada, obtidas através do método dos mínimos quadrados simples.**

materiais disponíveis	porcentagens
	$x_i$ (%)
brita 1	21,5
brita 0	37,6
pó de brita	40,9



**Figura 3: Faixa granulométrica especificada e curva de distribuição granulométrica da mistura obtida através da aplicação do Método dos Mínimos Quadrados Simples (MMQS)**

A Figura 4 consiste em uma tela do programa desenvolvido, mostrando a aplicação para as condições consideradas no exemplo 1. Na referida figura podem ser observados os campos para introdução dos dados granulométricos referentes aos materiais disponíveis, na guia superior à esquerda. Nesses campos são introduzidas as porcentagens em peso passantes por cada peneira, ou seja, as porcentagens em peso abaixo de cada diâmetro médio de referência. No canto superior à direita da tela são introduzidos os limites máximos e mínimos considerados, ou seja, as porcentagens máximas e mínimas passantes por cada peneira. O peso ponderador para os materiais nesse caso foi considerado zero, pois foi aplicado o Método dos Mínimos Quadrados Simples. No canto inferior esquerdo encontra-se um gráfico com a representação dos limites da faixa granulométrica especificada e com a curva de distribuição granulométrica da mistura obtida através da aplicação do Método dos Mínimos Quadrados Simples (método selecionado no presente exemplo). Na tela podem ainda ser observadas as porcentagens de emprego de cada material, que consiste no resultado da aplicação do programa; a resposta “resultado aceitável: verdadeiro”, indicando que a dosagem foi possível com os materiais considerados; o desvio quadrático e o custo unitário total da mistura. No canto inferior à direita encontram-se os dados granulométricos da mistura obtida, para cada peneira considerada (ou diâmetro de referência).

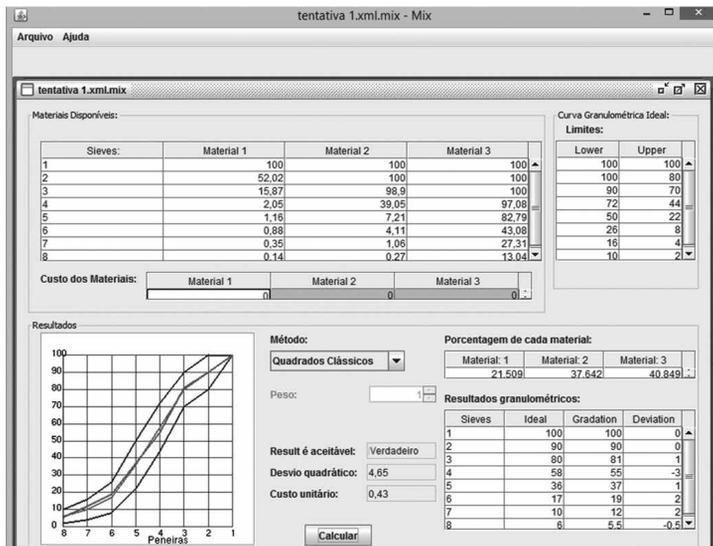


Figura 4: Preenchimento dos dados granulométricos e resultado obtido através do método de Mínimos Quadrados Simples, para o exemplo 1

### 5.2 Exemplo 2

Para comparação dos resultados apresentados pelo método dos Mínimos Quadrados Simples, pelo método de Neumann e pelo Método dos Mínimos Quadrados Ponderados, apresenta-se um exemplo em que a mesma dosagem de mistura é realizada pelos três métodos.

As figuras correspondentes à aplicação de cada método são apresentadas no formato de telas do programa desenvolvido. Nessas figuras estão preenchidos os dados granulométricos do problema (quantidade de peneiras, proporções de cada material, limites inferior e superior de cada peneira), assim como os resultados obtidos em cada um deles (resultado aceitável, proporções dos materiais, granulometria de ensaio e custo unitário).

A Figura 5 representa o modelo de preenchimento dos dados granulométricos do ensaio e o resultado do Método de Mínimos Quadrados Simples. O preenchimento foi realizado seguindo-se os mesmos procedimentos e campos descritos anteriormente para o exemplo apresentado na Figura 4.

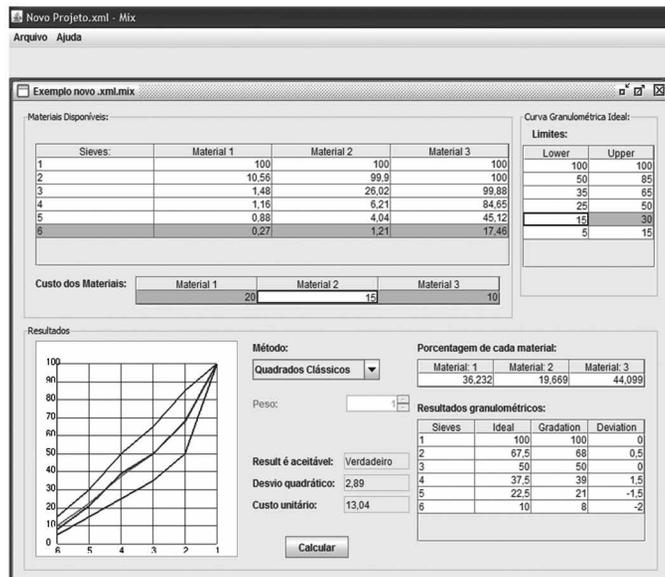


Figura 5: Preenchimento dos dados granulométricos e resultado obtido através do método de Mínimos Quadrados Simples, para o exemplo 2

A mistura dos mesmos materiais foi realizada também através do Método de Mínimos Quadrados de Neumann, conforme a tela apresentada na Figura 6, na qual podem ser observados os dados granulométricos dos materiais considerados para a mistura, a seleção do Método de Neumann, na guia correspondente, e os resultados obtidos.

Para aplicação do Método de Mínimos Quadrados Ponderados foram atribuídos aos materiais 1, 2 e 3 os pesos 20, 15 e 10, respectivamente. Os resultados apresentados pelo Método dos Mínimos Quadrados Ponderados com ponderador  $p = 2$ , conforme apresentado na Equação (10), são apresentados na Figura 7. Os resultados apresentados pelo mesmo método, mas com ponderador  $p = 100$ , são apresentados na Figura 8.

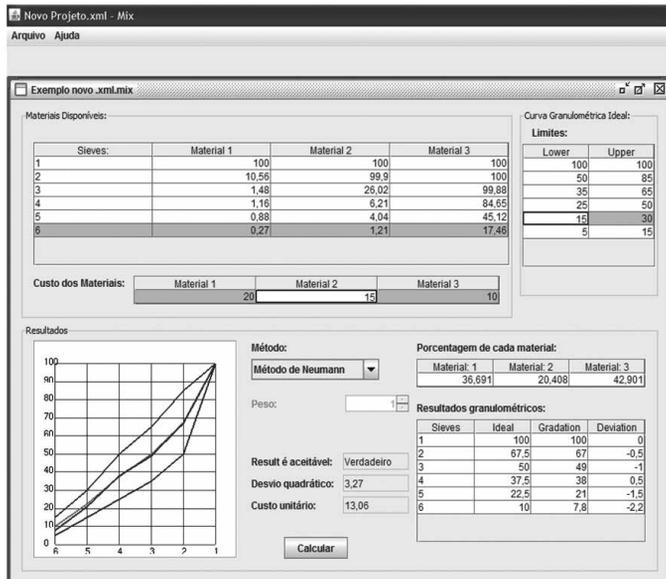


Figura 6: Preenchimento dos dados granulométricos e resultado obtido através do Método de Mínimos Quadrados de Neumann

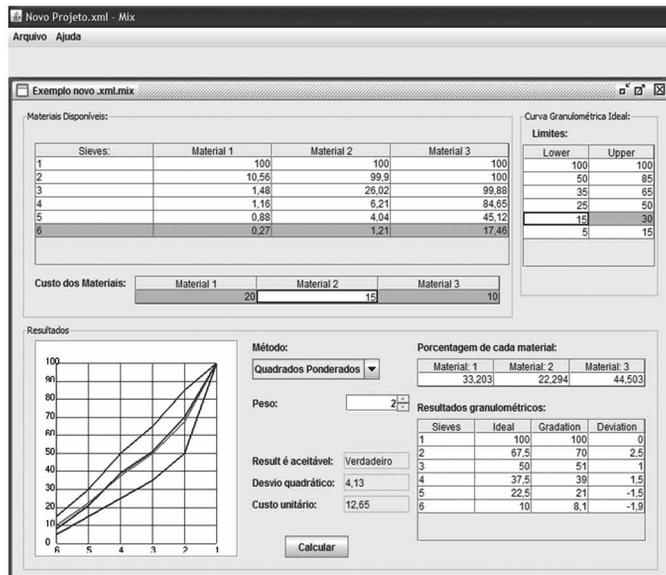


Figura 7: Preenchimento dos dados granulométricos e resultado obtido através do método de Mínimos Quadrados Ponderados (com ponderador igual a 2)

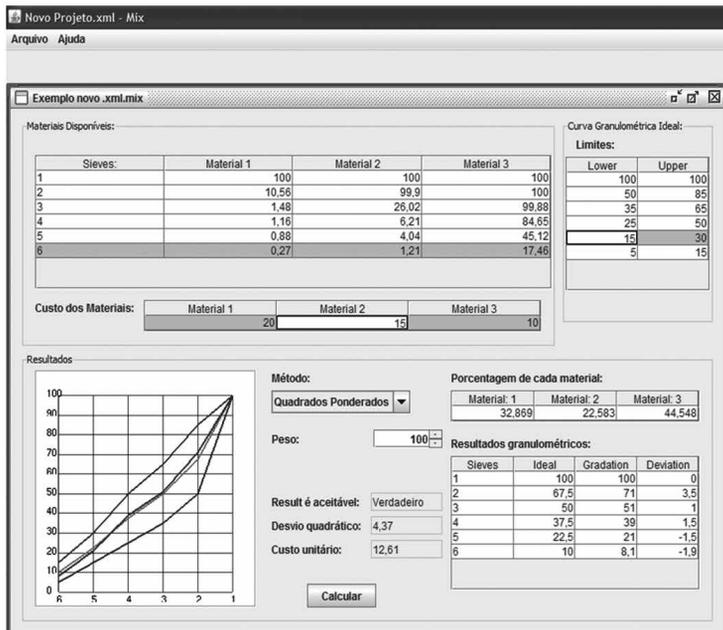


Figura 8: Preenchimento dos dados granulométricos e resultado obtido através do método de Mínimos Quadrados Ponderados (com ponderador igual a 100)

Os resultados obtidos através dos métodos aplicados encontram-se resumidos na Tabela 3.

Tabela 3: Comparação dos métodos de mínimos quadrados através de resultados obtidos no exemplo numérico apresentado (exemplo 2).

	Simple	Neumann	Ponderador = 2	Ponderador = 100
$x_1$ (%)	36,23	36,69	33,20	32,87
$x_2$ (%)	19,67	20,41	22,29	22,58
$x_3$ (%)	44,10	42,90	44,50	44,55
Desvio padrão	2,89	3,27	4,13	4,37
Custo Unitário	13,04	13,06	12,65	12,61

Verifica-se que todos os métodos obtiveram resultados aceitáveis sob o ponto de vista granulométrico e que, entre eles, o que apresentou o menor desvio padrão foi o Método de Mínimos Quadrados Simples.

O Método de Mínimos Quadrados Ponderados apresentou os menores custos. A elevação sucessiva do peso do ponderador, apresentada na Tabela 3, pelos resultados de ponderadores de valor 2 e 100, indicou uma redução pouco significativa do custo unitário da mistura. Comparando-o ao método que obteve o segundo menor custo (Mínimos Quadrados Simples), a redução do custo unitário foi de apenas 3,30%, enquanto o desvio quadrático teve elevação de 51,21%.

## ***6 Discussão e análise dos resultados***

A fundamentação matemática do método dos mínimos quadrados aplicado ao problema de mistura de materiais buscou encontrar as proporções na mistura que atendam à curva de distribuição granulométrica alvo com os menores desvios quadráticos. O resultado desse método analítico, apesar de matematicamente correto, pode não ter significado físico, como no caso das proporções encontradas para um ou mais materiais serem negativas. Ocorrendo proporções negativas, identifica-se que esse material não é compatível com a dosagem de mistura ou que um dos materiais não é necessário à dosagem. Devem ser procuradas soluções para o problema testando-se as combinações possíveis e desprezando-se a cada momento um dos materiais (NEUMANN, 1964).

Não havendo proporções negativas, tem-se que o Método de Mínimos Quadrados apresenta resultados excelentes para a dosagem de mistura sob o ponto de vista de adequação à curva ideal. Dentro desses resultados, observou-se que o método de Mínimos Quadrados Simples obteve, no exemplo 2 analisado, menor desvio padrão que o método de Neumann. Uma possível explicação é que o ajuste das proporções à equação de restrição (Equação 3) no caso do método simples divide o resíduo de forma proporcional a todos os materiais. No Método dos Mínimos Quadrados de Neumann, por outro lado, todo o erro de resíduo do processo é aplicado ao último material.

O método de Mínimos Quadrados Ponderados proposto e aplicado nos exemplos testados neste estudo apresentou resultados satisfatórios, ao passo que reduz o custo unitário da mistura, ainda que a elevação do desvio quadrático seja bem mais pronunciada que a queda do custo unitário.

Após certo número de iterações de elevação de ponderador, observou-se que não havia alteração significativa no valor do custo. Verificou-se, portanto, que estando o resultado dentro da faixa aceitável, não seria necessário um número muito grande de elevações no valor do ponderador, motivo pelo qual foi adotado ponderador máximo de 100, nos testes realizados neste trabalho.

O Método dos Mínimos Quadrados Ponderados atendeu o caso do exemplo proposto, mas verificou-se em outros exemplos que nem sempre o método reduzia o valor do custo. Nestes casos testou-se alterar o formato dos ponderadores representados na Equação (9), trocando de posição o numerador e o denominador, o que novamente retornou resultados satisfatórios.

## ***7 Considerações finais***

Existindo significado físico no resultado do Método dos Mínimos Quadrados Simples e de Neumann, ou seja, todas as proporções incógnitas positivas, este resultado será ótimo em relação à adequação à curva ideal para o problema de mistura de materiais proposto.

Concluiu-se, ainda, que assim como há a possibilidade de inexistência de uma solução física no Método dos Mínimos Quadrados Simples e de Neumann, a validade do método dos Mínimos Quadrados Ponderados é restrita. No entanto, quando aplicável, apresenta resultados satisfatórios.

É imprescindível ressaltar que todas as formulações e soluções do problema de mistura de materiais granulares propostas neste trabalho foram baseadas apenas em critérios matemáticos e consideram a suposição de que o método físico de mistura, seja ele qual for, não terá impactos relevantes nas características granulométricas dos materiais envolvidos. Portanto, desprezaram-se os possíveis efeitos da vibração, abrasão, impacto e fragmentação dos grãos no processo de mistura empregado.

### *Agradecimentos*

Os autores do artigo gostariam de agradecer ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), à FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais), à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e à UFMG (Universidade Federal de Minas Gerais) pelos apoios financeiros concedidos.

### *Referências*

- BRASIL. Ministério dos Transportes. Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes. *DNIT 031/2006-ES: pavimentos flexíveis: concreto asfáltico*. Rio de Janeiro: Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes, 2006.
- BRASIL. Ministério dos Transportes. Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes. *DNIT 141/2010-ES: pavimentação: base estabilizada granulometricamente: especificação de serviço*. Rio de Janeiro: Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes, 2010.
- CHAPMAN, S. J. *MATLAB: programming with applications for engineers*. Stanford: Cengage Learning Engineering, 2013.
- DEITEL, H.; DEITEL P. *Java:: como programar*. Porto Alegre: Bookman, 2000.
- FLANAGAN, D. *Java in a nutshell*. 5th ed. [S.l.]: O'Reilly Media, 2005.
- FRERY, A. C. et al. Stochastic particle packing with specified granulometry and porosity. *Granular Matter*, v. 14, p. 27-36, 2012.
- MONTGOMERY, D.; RUNGER, G.. *Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros*. LTC, 2003.
- NEUMANN, D. Mathematical method for blending aggregates. In: AMERICAN

SAID, M. E.; EMRE, K. C. Optimization model for aggregate blending. *Journal of Construction Engineering and Management*, v. 111, p. 216-230, 1985.

SANTANNA-GRECO, J. A.; GRECO, M. Projeto de misturas de materiais para pavimentação através de métodos matriciais. In: IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 28., 2007, Porto, Portugal, *Anais...* Porto, Portugal: CMNE/CILAMCE, 2007.

SANTOS, R. *Introdução à programação orientada a objetos usando Java*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2003.

SEYBERT, A. F.; RENGARAJAN, T. K. The use of CHIEF to obtain unique solutions for acoustic radiation using boundary integral equations. *The journal of the acoustical society of America*, v. 81, p. 1299-1306, 1987.

SHU, X. et al. Laboratory evaluation of moisture susceptibility of foamed warm mix asphalt containing high percentages of RAP. *Construction and Building Materials*, v. 35. p. 125-130, 2012.

SILVA, J. R. et al. Modelagem de mecanismos de mistura de materiais granulares usando o método dos elementos discretos. In: IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 24., 2013, Pirenópolis. *Anais...* Pirenópolis: CILAMCE, 2013.

SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS, 90., 1964, New York, NY. *Proceedings...* Journal of the Construction Division, New York, NY, p. 1-13, 1964.

SUMANASOORIYA, M. S.; NEITHALATH, N. Stereology and morphology based pore structure descriptors of enhanced porosity (pervious) concretes. *ACI Materials Journal*, v. 106, p. 429-438, Sept./Oct. 2009.

TOKLU, Y. C. Aggregate blending using genetic algorithms. *Computer-aided civil and infrastructure engineering*, v. 20, p. 450-460, 2005.

*Artigo recebido em: 22 abr. 2014*  
*Aceito para publicação em: 8 dez. 2014*